I VETTORI
ESERCIZI RISOLTI E DISCUSSI

Esercizi svolti dal prof. Trivia Gianluigi e scritti con Lyx.

Somma di vettori: metodo grafico

Esercizio 1. Si considerino due spostamenti, uno di modulo $3\,m$ e un altro di modulo $4\,m$. Si mostri in che modo si possono combinare i vettori spostamento per ottenere uno spostamento risultante di modulo $7\,m$, $1\,m$, $5\,m$.

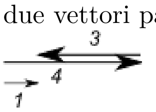
Soluzione. Affrontando la somma di vettori, cioè la ricerca della risultante, dal punto di vista grafico, si possono presentare i seguenti casi:

(1) i due vettori sono paralleli e concordi (stesso verso): la somma è il vettore che ha la stessa direzione e lo stesso verso dei due vettori e modulo uguale alla somma dei due moduli
(2) i due vettori sono paralleli e discordi (verso opposto): la somma è il vettore che ha la stessa direzione dei due vettori il verso è quello del vettore col modulo maggiore e il cui modulo è dato dalla differenza dei due moduli
(3) i due vettori non sono paralleli, ma hanno in comune la coda (cioè il punto opposto alla freccia): la risultante è il vettore che rappresenta la diagonale del parallelogramma che ha i due vettori dati come lati consecutivi
(4) i due vettori non sono paralleli e tali che la coda dell'uno coincida con la punta dell'altro: la risultante è il vettore che unisce il due vettori dati a formare un triangolo.

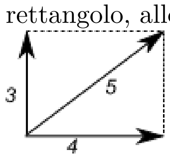
Per quanto detto, è possibile pensare alle seguenti disposizioni:

Caso 1. due vettori paralleli e concordi, poiché il vettore risultante ha modulo dato dalla somma dei due

Caso 2. due vettori paralleli e discordi, la cui ha modulo dato dalla differenza dei due vettori



Caso 3. i due vettori sono fra loro perpendicolari e la risultante è la diagonale del rettangolo che li ha come lati: infatti i numeri $3,4,5$ formano una terna pitagorica, cioè se 3 e 4 sono i cateti di un triangolo rettangolo, allora la sua ipotenusa è 5.



Esercizio 2. Trovare l'angolo tra due vettori di modulo 10 e 15 unità, quando la loro risultante è 20 unità. Disegnare la figura appropriata.

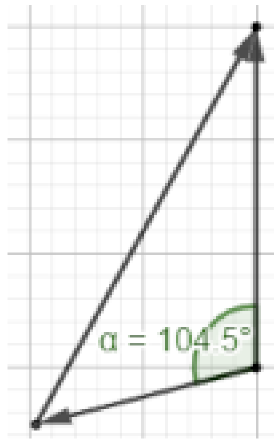
Soluzione. I tre vettori formano un triangolo di lati $10, 15, 20$ unità. Applichiamo a tale triangolo il teorema di Carnot (si veda la trigonometria) che consente di ricavare quanto richiesto. Da

[Richiamo sul th. di Carnot: dato un triangolo qualunque di cui si conosce la lunghezza di tutti i lati, indicati con a, b, c, si ha $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha$, dove α è l'angolo opposto al lato a; vale un'identica relazione per ognuno degli altri lati]

$$20^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \cdot 10 \cdot 15 \cdot \cos\alpha$$

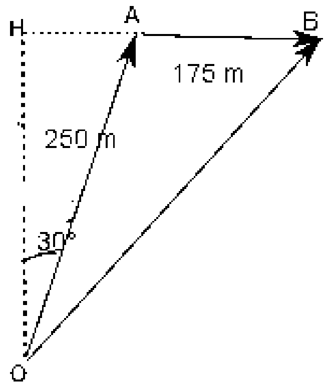
e ricavando l'angolo cercato,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{10^2 + 15^2 - 20^2}{300}\right) = \arccos\left(\frac{-75}{300}\right) = 104,5^\circ$$



Esercizio 3. Una donna cammina per $250\,m$ in una direzione che forma un angolo di 30° verso est rispetto al nord, poi per $175\,m$ direttamente verso est. (a) Usando sistemi grafici si trovi uno spostamento finale dal punto di partenza. (b) si confronti il modulo del suo spostamento con la distanza che ha percorso.

Caso 1. Caso (a): la somma grafica dei due vettori si ottiene completando il parallelogramma che ha come lati consecutivi i due vettori, come mostrato in figura



Caso 1. (b): per calcolare il suo spostamento (cioè il vettore risultante) osserviamo che il triangolo OHA è la metà di un triangolo equilatero. Da questa osservazione si deduce che $AH = \frac{AO}{2} = 125\,m$ e quindi $BH = 300\,m$. Inoltre OH è l'altezza di tale triangolo, per cui $OH = 125\sqrt{3}\,m$. Pertanto per trovare OB possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo OHB:

$$OB = \sqrt{OH^2 + BH^2} = \sqrt{46875 + 90000} = 370\,m$$

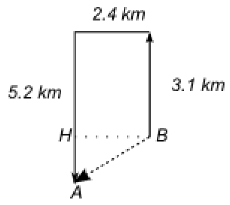
Come si può osservare il modulo dello spostamento è minore della distanza effettivamente percorsa, ma questo fatto è insito nella definizione di spostamento che viene calcolato considerando il punto iniziale e finale e non il percorso intermedio effettivamente fatto.

$$d_{percorsa} = 425\,m \qquad spostamento = 370\,m$$
$$differenza = 55\,m$$

L'angolo $B\widehat{O}H = \arctan \frac{300\,m}{125\sqrt{3}\,m} = 54°$

Esercizio 4. Una persona cammina su questo percorso: $3.1\,km$ verso nord, poi 2.4 verso ovest e infine 5.2 verso sud. (a) si costruisca il diagramma dei vettori che rappresenta questo movimento. (b) quale è la distanza e la direzione in linea retta per arrivare allo stesso punto finale?

(a): ecco il diagramma che descrive lo spostamento (il nord nel foglio è verso l'alto)



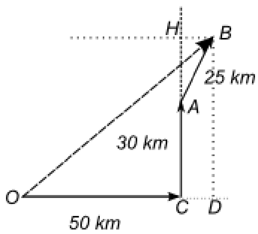
(b): il vettore tratteggiato indica distanza e direzione in linea d'aria del punto di arrivo, ed è anche la risultante della somma dei tre vettori. La figura che si ottiene è quella di un trapezio rettangolo, di cui vogliamo conoscere il lato obliquo, noti gli altri lati. Il lato obliquo, AB, si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHB, dove $AH = 5.2 - 3.1 = 2.1\,km$ e $HB = 2.4\,km$

$$AB = \sqrt{2.1^2 + 2.4^2} = 3.2\,km$$

e la direzione sarà quella di sud ovest con un angolo di

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2.1}{2.4}\right) = 41.2°$$

Esercizio 5. Un'automobile viaggia verso est per $50\,km$, poi verso nord per $30\,km$ e infine in direzione di 30° a est rispetto al nord per $25\,km$. Si disegni il diagramma di vettori e si determini lo spostamento totale dell'auto dal suo punto di partenza.



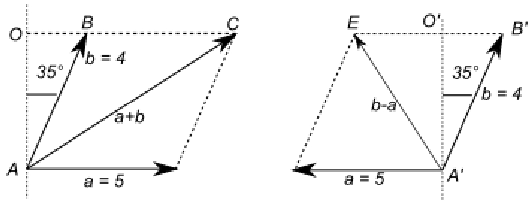
Soluzione. Il grafico mostra l'insieme degli spostamenti. Per determinare modulo e direzione, calcoliamo il segmento HB, in quanto il triangolo AHB è la metà di un triangolo equilatero. Quindi $HB = 12.5\,km$, cioè la metà del vettore AB. Ma $HB = CD = 12.5\,km$. Consideriamo ora il triangolo ODB. Il cateto $BD = AH + AC$, ma $AH = 12.5\sqrt{3} = 21.7\,km$, e quindi $BD = 21.7 + 30 = 51.7\,km$. Anche $OD = OC + CD = 50 + 12.5 = 62.5\,km$. Ne segue che, applicando il teorema di Pitagora al triangolo ODB, si ha

$$OB = \sqrt{51.7^2 + 62.5^2} = 81.1\,km$$

e l'angolo formato nella direzione nord est sarà

$$\alpha = \arctan\left(\frac{51.7}{62.5}\right) = 39.6°$$

Esercizio 6. Il vettore $\overrightarrow{a}$ ha un modulo di 5.0 unità ed è orientato verso est. Il vettore $\overrightarrow{b}$ è orientato in direzione di 35° a est rispetto al nord e ha un modulo di 4.0 unità. Si costruiscano i diagrammi vettoriali per calcolare $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}$. Si stimino i moduli e le direzioni dei vettori somma e differenza in base ai diagrammi.



Soluzione. La rappresentazione grafica dei vettori nelle due condizioni è quella mostrata in figura. Per calcolare i moduli e le direzioni delle risultanti, dobbiamo ricorrere ai teoremi della trigonometria. Calcoliamo il vettore $\vec{a}+\vec{b}$ come ipotenusa del triangolo rettangolo AOC. Dobbiamo però prima calcolare il segmento OB, mediante il teorema dei triangoli rettangoli, per il quale ogni cateto è uguale al prodotto dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto o il coseno dell'angolo adiacente.

$$OB = 4 \cdot \sin 35 = 2.29\,u$$

quindi

$$OC = OB + BC = 5 + 2.29 = 7.29\,u$$

calcoliamo poi OA

$$OA = 4 \cdot \cos 35 = 3.28\,u$$

Applicando il teorema di Pitagora, si ha quindi

$$AC = \sqrt{3.28^2 + 7.29^2} = 8\,u$$

la direzione di tale vettore, rispetto al nord è

$$\alpha = \arctan\left(\frac{7.29}{3.28}\right) = 65.8°$$

Calcoliamo ora il modulo del vettore $\vec{b}-\vec{a}$, applicando il teorema di Pitagora al triangolo $EO'A'$. Calcoliamo prima EO'

$$EO' = EB - O'B = 5 - 2.29 = 2.71\,u$$

Pertanto

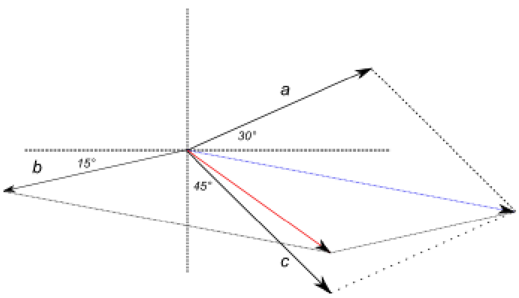
$$EA' = \sqrt{2.71^2 + 3.28^2} = 4.3\,u$$

la sua direzione, rispetto al nord dalla parte ovest, è

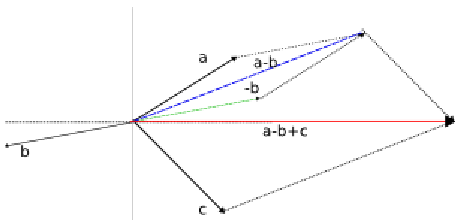
$$\beta = \arctan\left(\frac{2.71}{3.28}\right) = 39.6°$$

Esercizio 7. Tre vettori, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ciascuno con un modulo di 50 unità, giacciono sul piano xy e formano angoli rispettivamente di 30°, 195° e 315° con l'asse x. Trovare con metodo grafico i moduli e le direzioni dei vettori (a) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, (b) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ e (c) un vettore $\vec{d}$ tale che $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=0$.

Caso 1. (a): nel disegno sono riportate le direzioni dei vettori indicati e la loro somma. il vettore in blu è la somma parziale tra a e c, mentre quello in rosso è la somma totale. (la somma di tre vettori si esegue applicando la proprietà associativa).

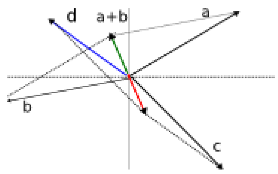


Caso 1. (b): l'operazione $\vec{a}-\vec{b}$ si esegue sommando al vettore $\vec{a}$, l'opposto del vettore $\vec{b}$ (in verde in figura). La somma eseguita graficamente è mostrata in figura



Caso 1. (c): la rappresentazione grafica dell'espressione è data in figura

Caso 2. dove il vettore $\overrightarrow{d}$ è indicato in blu. La somma indicata nel testo risulterà nulla in quanto i vettori risultanti da $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}+\overrightarrow{d}$ sono uguali in modulo e direzione, ma opposti in verso.



I vettori e le loro componenti

Esercizio 8. (a) Trasformare i seguenti angoli da gradi decimali in radianti: $20.0°$, $50.0, 100°$. (b) Trasformare i seguenti angoli da radianti in gradi decimali: $0.33\,rad$, $2.1\,rad$, $7.7\,rad$.

Caso 1. (a): L'angolo in radianti è dato dal rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza, che sottende l'angolo, e il raggio. In formula:

$$\alpha_{rad}=\frac{l_{arco}}{r_{aggio}}$$

Si ha pertanto che $1rad$ è l'angolo al centro per il quale l'arco di circonferenza è lungo quanto il raggio. Ciò implica che in un angolo giro vi sono tanti angoli radianti quanti raggi in una circonferenza. Quindi un angolo giro è composto di $2\pi\,rad$; un angolo piatto di $\pi\,rad$. Il fattore di trasformazione è pertanto

$$\pi \to 180°$$

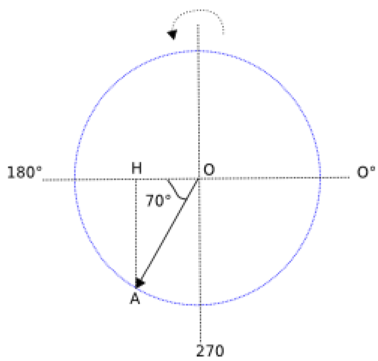
Per trasformare gli angoli da gradi a radianti, basta quindi dividere per $180°$ e moltiplicare per π.

$$\begin{aligned} 20.0° &= \tfrac{20.0°\pi}{180°} = \frac{\pi}{9}=0.349\,rad \\ 50.0° &= \tfrac{50.0°\pi}{180°} = \frac{5}{18}\pi=0.873\,rad \\ 100° &= \tfrac{100.0°\pi}{180°} = \frac{5}{9}\pi=1.745\,rad \end{aligned}$$

Caso 2. (b): Per trasformare gli angoli da radianti in gradi basta moltiplicare il valore del radiante per $\frac{180}{\pi}$:

$$\begin{aligned} 0.33\,rad &= 0.33\,rad\cdot\tfrac{180°}{\pi\,rad} = 18.9° \\ 2.1\,rad &= 2.1\,rad\cdot\tfrac{180°}{\pi\,rad} = 120.3° \\ 7.7\,rad &= 7.7\,rad\cdot\tfrac{180°}{\pi\,rad} = 441.2° \end{aligned}$$

Esercizio 9. Quali sono le componenti x e y di un vettore $\overrightarrow{a}$ nel piano xy se la sua direzione è di $250°$ in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle x e se il suo modulo vale $7.3\,u$?



Soluzione. La determinazione delle componenti di un vettore si basa sulle definizioni delle funzioni goniometriche. (Si veda la figura) Il vettore è rappresentato da $\overrightarrow{v} = OA$; la componente orizzontale v_x è rappresentata dal segmento OH (proiezione di OA sull'asse x), che nel piano cartesiano ha verso negativo. Il coseno dell'angolo formato dal vettore con l'asse x è, per definizione,

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OA}$$

da cui:

$$OH = v_x = 7.3 \cdot \cos 250° = -2.5\, u$$

(il segno negativo indica che la componente è rivolta a sinistra).
La componente verticale è data dal segmento AH, proiezione di OA sull'asse y. Il seno dell'angolo formato dal vettore con l'asse x è, per definizione:

$$\sin\alpha = \frac{AH}{OA}$$

da cui:

$$AH = v_y = 7.3 \cdot \sin 250° = -6.9\, u$$

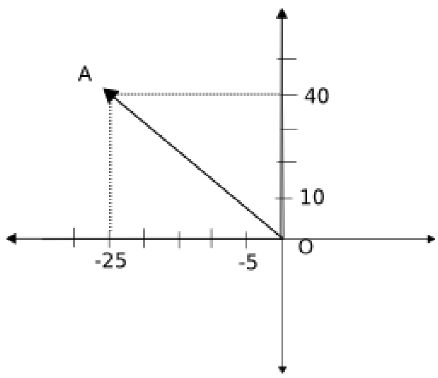
anche in questo caso il segno meno indica che la componente è rivolta verso il basso.

Esercizio 10. La componente x di un determinato vettore è -25.0 unità e la componente y è $+40.0$ unità. (a) Qual è il modulo del vettore? (b) Qual è l'angolo tra la direzione del vettore e il semiasse positivo dell'asse x?

Caso 1. (a): Questo esercizio chiede di rappresentare i vettori in un piano cartesiano e di usare come direzioni di riferimento quelle dell'asse x (orizzontale) e dell'asse y (verticale). In tal modo le componenti rappresentano le coordinate dell'estremo finale del vettore, se ha la «coda» nell'origine del piano cartesiano. Il modulo di un vettore è pertanto la lunghezza del segmento nel piano cartesiano ed è ottenibile con la classica formula della distanza (teorema di Pitagora)

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Osservando la figura, nella quale è rappresentato il vettore indicato



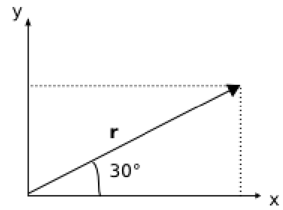
In questo caso

$$OA = \overrightarrow{v} = \sqrt{(-25-0)^2 + (40-0)^2} = \sqrt{625+1600} = 47.2\, u$$

(b): l'angolo formato con il semiasse positivo delle x è ricavabile tramite la funzione inversa della tangente

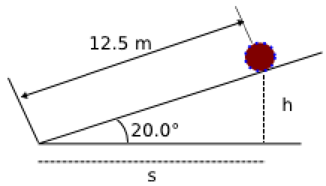
$$\alpha = \arctan\left(\frac{40}{-25}\right) = 122°$$

Esercizio 11. Un vettore spostamento r sul piano xy è lungo $15\, m$ e orientato come in figura. Determina le componenti x e y del vettore.



Soluzione. In questo caso il calcolo delle componenti può essere eseguito semplicemente ricordando che il triangolo avente come cateti le componenti e come ipotenusa, il vettore, è la metà di un triangolo equilatero, il cui lato è lungo quanto il modulo del vettore r. Pertanto la componente verticale $r_y = 15 : 2 = 7,5\,m$, mentre la componente orizzontale è l'altezza di questo triangolo, per cui $r_x = \frac{15\,m\cdot\sqrt{3}}{2} = 13\,m$

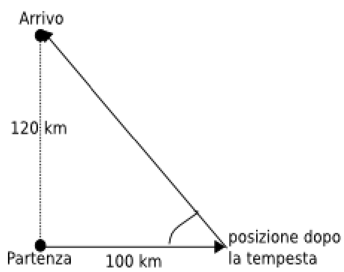
Esercizio 12. Un corpo viene sollevato, trascinandolo per $12.5\,m$ su un piano inclinato di $20.0°$ rispetto al piano orizzontale. A che altezza si trova sollevato il corpo rispetto alla posizione di partenza? Qual è stato il suo spostamento orizzontale?



Soluzione. Lo spostamento orizzontale richiesto è indicato dal segmento s in figura, mentre l'altezza dal segmento h. Questi segmenti formano con il tratto in salita un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa misura $12.5\,m$. Applicando i teoremi del triangolo rettangolo, si ha

$$\begin{aligned} h &= 12.5 \cdot \sin 20.0° = 4.28\,m \\ s &= 12.5 \cdot \cos 20.0° = 11.75\,m \end{aligned}$$

Esercizio 13. Una nave si prepara a salpare per una destinazione situata $120\,km$ a nord del punto di partenza. Una tempesta spinge la nave in un punto posto a $100\,km$ a est del suo punto di partenza. A che distanza e in che direzione la nave deve ora fare rotta per raggiungere la destinazione originaria?



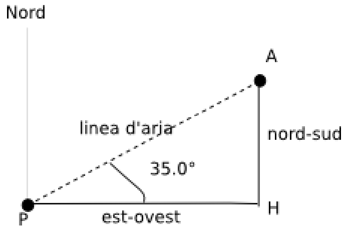
Soluzione. La figura mostra la situazione schematizzata. Si tratta di trovare l'ipotenusa del triangolo rettangolo, con il teorema di Pitagora

$$d = \sqrt{120^2 + 100^2} = 156\,km$$

l'angolo per individuare la direzione è quello indicato in figura è ottenibile sempre con il teorema dei triangoli rettangoli

$$\alpha = \arctan\frac{120}{100} = 50.2°$$

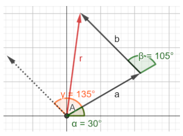
Esercizio 14. Una persona desidera raggiungere un punto che si trova a $3.40\,km$ di distanza dalla sua attuale posizione, in direzione $35.0°$ a nord-est. Ma questa persona è costretta a percorrere strade orientate nord-sud o est-ovest. Qual è la lunghezza dell'itinerario minimo che essa potrebbe percorrere per raggiungere la sua destinazione?



Soluzione. Gli spostamenti est-ovest o nord-sud rappresentano le coordinate del punto A, supposto P come origine. Il percorso minimo è quindi la somma dei segmenti PH e AH.

$$d = AH + PH = 3.40\,(\sin 35.0^\circ + \cos 35.0^\circ) = 4.74\,km$$

Esercizio 15. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno lo stesso modulo di 10 unità. Essi sono orientati come in figura e la loro risultante è $\boldsymbol{r}$. Trovare (a) le componenti di $\boldsymbol{r}$ secondo i due assi x e y; (b) il modulo di $\boldsymbol{r}$; (c) l'angolo che $\boldsymbol{r}$ forma con l'asse x.



Soluzione. (a) Il vettore $\boldsymbol{a}$ forma con l'asse x un angolo di 30°, pertanto

$$a_x = 10\cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \quad a_y = 10\sin 30^\circ = 5$$

Il vettore $\boldsymbol{b}$ forma con l'asse x un angolo di 135°, pertanto

$$b_x = -10\cos 135^\circ = -7,1 \quad b_y = 10\sin 135^\circ = 7,1$$

(b) le componenti di $\boldsymbol{r}$ sono

$$r_x = 5\sqrt{3} - 7,1 = 1,6 \quad r_y = 5 + 7,1 = 12,1$$

e il modulo è

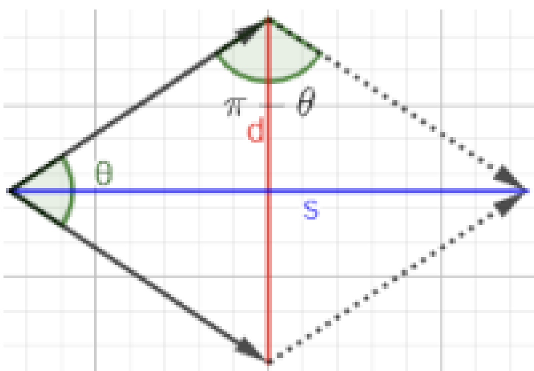
$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{1,6^2 + 12,1^2} = 12,1$$

e (c) l'angolo formato con l'asse x è

$$\phi = \arctan\frac{12,1}{1,6} = 82,5^\circ$$

Esercizio 16. Dimostrare che se due vettori hanno lo stesso modulo v e formano un angolo θ, la loro somma è $s = 2v\cos\frac{\theta}{2}$ e la loro differenza $d = 2v\sin\frac{\theta}{2}$.

Soluzione. Costruendo graficamente la somma e la differenza dei due vettori si ottiene un rombo (vedasi figura).



Poiché la somma degli angoli interni di un quadrilatero è uguale a 2π, l'angolo opposto al vettore somma sarà $\pi-\theta$. Applichiamo il teorema di Carnot per entrambe le richieste.

$$d^2 = 2v^2 - 2v^2\cos\theta$$

da cui

$$d = v\sqrt{2\left(1-\cos\theta\right)} = v\sqrt{\frac{4\left(1-\cos\theta\right)}{2}} = v\sin\frac{\theta}{2}$$

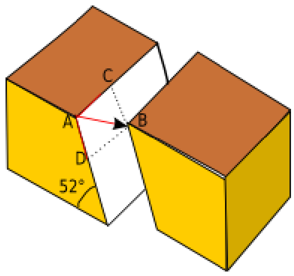
(ricordando le formule di bisezione). Analogamente per il vettore somma si ha

$$d^2 = 2v^2 - 2v^2\cos\left(\pi-\theta\right) = 2v^2 + 2v^2\cos\left(\theta\right)$$

perché $\cos\left(\pi-\theta\right) = -\cos\theta$; pertanto

$$d = v\sqrt{2\left(1+\cos\theta\right)} = v\sqrt{\frac{4\left(1\cos\theta\right)}{2}} = v\cos\frac{\theta}{2}$$

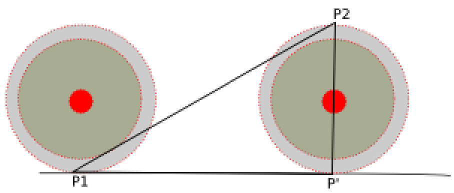
Esercizio 17. I punti A e B della figura sotto originariamente coincidevano. Lo spostamento netto AB è avvenuto lungo il piano di scorrimento. AC è lo scorrimento orizzontale di AB, mentre AD è lo scorrimento verso il basso di AB. Qual è lo spostamento netto AB se $AC = 22.0\,m$ e $AD = 17.0\,m$?



Soluzione. Soluzione: Lo spostamento netto è ottenibile, facendo riferimento alla figura, applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ADB, di cui AB è l'ipotenusa:

$$\overline{AB} = \sqrt{22.0^2 + 17.0^2} = 27.8\,m$$

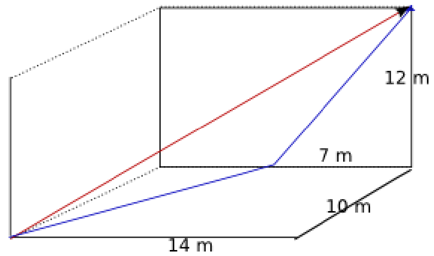
Esercizio 18. Una ruota con raggio $45.0\,cm$ rotola senza scivolare su un piano orizzontale. P è un segno sul bordo della ruota. Nell'istante t_1 P è sul punto di contatto con il piano; al tempo t_2 si trova ruotata di mezzo giro. Trovare lo spostamento di P in questo intervallo di tempo.



Soluzione. Lo spostamento del punto è indicato in figura con il segmento P_1P_2. Il tratto $P_1P^{'}$ corrisponde a metà circonferenza, in quanto la rotazione indicata è di mezzo giro; il segmento $P^{'}P_2$ è il diametro della ruota. Calcoliamo pertanto lo spostamento, considerandolo come l'ipotenusa del triangolo $P_1P^{'}P_2$, con il teorema di Pitagora:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{\left(45\pi\right)^2 + 90^2} = 167.7\,cm$$

Esercizio 19. Le dimensioni di un locale sono, in metri, 10, 12, 14. Una mosca parte da un angolo della stanza e vola fermandosi infine all'angolo opposto, in diagonale, a quello di partenza. Determinare il modulo del suo spostamento. Stabilire se vi può essere un tragitto minore, maggiore o uguale a questo. Infine, se la mosca si spostasse solo sulle pareti, quale sarebbe il percorso più breve?



Soluzione. Soluzioni: La risposta al primo quesito è rappresentata dalla lunghezza del vettore in rosso disegnato in figura, cioè la diagonale del parallelogramma:

$$d = \sqrt{(10^2 + 12^2 + 14^2)} = 21\,m$$

Questo è anche il percorso più breve che unisce i due punti indicati (la lunghezza di un segmento è la distanza tra due punti, cioè il percorso più breve). Vi può essere un percorso maggiore in tutti i casi in cui la mosca si discosta da questo tragitto. La condizione di uguaglianza si ha pertanto se il percorso è quello indicato dalla diagonale.
Il percorso più breve lungo le pareti è quello segnato in blu, la cui lunghezza è:

$$d_1 + d_2 = \sqrt{10^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2} + \sqrt{12^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2} = 21.1\,m$$

Somma di Vettori tramite le componenti

Esercizio 20. Trovare le componenti del vettore $\overrightarrow{r}$, somma dei vettori spostamento $\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{d}$, le cui componenti in metri lungo le tre direzioni perpendicolari sono: $c_x = 7.4$, $c_y = -3.8$, $c_z = -6.1$, $d_x = 4.4$, $d_y = -2.0$, $d_z = 3.3$

Soluzione. la soluzione è basata sul calcolo vettoriale, cioè

$$\begin{aligned} r_x &= c_x + d_x = 11.8 \\ r_y &= c_y + d_y = -5.8 \\ r_z &= c_z + d_z = -2.8 \end{aligned}$$

Esercizio 21. Calcola la somma dei due vettori espressi mediante i vettori unitari: $\overrightarrow{a} = 4.0\overrightarrow{i} + 3.0\overrightarrow{j}$ e $\overrightarrow{b} = -13.0\overrightarrow{i} + 7.0\overrightarrow{j}$; calcola poi il modulo e la direzione del vettore somma.

Soluzione. I due vettori sono complanari nel piano xy. Per trovare il vettore somma, sommiamo le loro componenti vettoriali, per cui

$$\overrightarrow{a+b} = \overrightarrow{c} = (4.0 - 13.0)\,\overrightarrow{i} + (3.0 + 7.0)\,\overrightarrow{j} = -9.0\overrightarrow{i} + 10.0\overrightarrow{j}$$

Per calcolare il modulo basta applicare

$$c = \sqrt{(-9.0)^2 + 10.0^2} = \sqrt{181} = 13.4$$

la direzione si ottiene

$$\alpha = \arctan\left(\frac{10.0}{-9.0}\right) = 312°$$

Esercizio 22. Se $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{c}$ e $\overrightarrow{c} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, che cosa sono $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$?

Soluzione. Soluzione: Mettendo a sistema le due relazioni, si ottiene

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{c} \end{cases}$$

sommando la prima equazione alla seconda, si ha

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{c} \\ 2\overrightarrow{a} = 6\overrightarrow{c} \end{cases} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a} = 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} \overrightarrow{b} = 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{a} = 9\overrightarrow{i} + 12\overrightarrow{j} \end{cases}$$

Esercizio 23. Un vettore $\overrightarrow{B}$, se sommato al vettore $\overrightarrow{C} = 3.0\overrightarrow{i} + 4.0\overrightarrow{j}$, dà un vettore risultante diretto nel verso positivo dell'asse y e modulo pari a quello di $\overrightarrow{C}$. Calcolare il modulo di $\overrightarrow{B}$.

Soluzione. Calcoliamo il modulo del vettore $\overrightarrow{C}$.

$$C = \sqrt{9+16} = 5$$

quindi il vettore risultante $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B+C}$ avrà modulo 5. Ora il vettore deve essere diretto nel verso positivo dell'asse y e pertanto, tenendo conto anche del valore del suo modulo, avrà le seguenti componenti vettoriali

$$\overrightarrow{A} = 0\overrightarrow{i} + 5.0\overrightarrow{j}$$

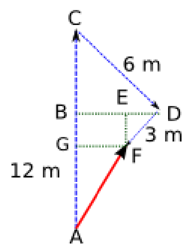
pertanto

$$\begin{aligned} B_x &= 3.0 - 0 = 3.0 \\ B_y &= 5.0 - 4.0 = 1.0 \end{aligned}$$

il modulo di $\overrightarrow{B}$ sarà

$$B = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} = 3.2$$

Esercizio 24. Un giocatore di golf riesce a mettere in buca in tre colpi. Il primo colpo sposta la palla $12\,m$ verso nord, il secondo $6.0\,m$ verso sud-est, e il terzo $3.0\,m$ verso sud-ovest. Quale spostamento sarebbe stato necessario far compiere alla palla per piazzarla nella buca al primo tiro?



Soluzione. Osserviamo la figura. I triangoli CDB, FED sono rettangoli isosceli (metà di un quadrato), tenuto conto delle direzioni indicate nei dati. Sapendo che la relazione tra lato e diagonale di un quadrato è

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}}$$

si ha

$$BD = \frac{6}{\sqrt{2}} = 4,2\,m$$

analogamente

$$ED = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,1\,m$$

si ha quindi

$$BE = GF = 4,2 - 2,1 = 2,1\,m$$

inoltre $CG = CB + BG = BD + ED = 4,2 + 2,1 = 6,3\,m$
Pertanto

$$AG = 12 - 6,3 = 5,7\,m$$

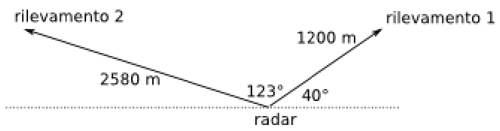
possiamo ora calcolare il modulo del vettore spostamento AF,

$$AF = \sqrt{AG^2 + GF^2} = \sqrt{5,7^2 + 2,1^2} = 6\,m$$

La direzione si può calcolare rispetto alla direzione nord, calcolando l'angolo $G\widehat{A}F$

$$G\widehat{A}F = \arctan\frac{GF}{AG} = \arctan\frac{2,1}{5,7} = 20,2°$$

Esercizio 25. Una stazione radar aggancia un aereo in avvicinamento proveniente da est. Alla prima osservazione il rilevamento è di $1200\,m$ a $40°$ sopra l'orizzonte. Come nella figura, l'aereo è seguito per altri $123°$ calcolati in un piano verticale orientato est-ovest, finché scompare dallo schermo dopo un ultimo rilevamento a $2580\,m$. Trovare lo spostamento dell'aereo mentre era seguito dal radar.



Soluzione. È possibile ottenere la soluzione in due modi, secondo le conoscenze matematiche possedute. La più diretta è l'applicazione del teorema di Carnot, noto dalla trigonometria, (tale teorema afferma che in ogni triangolo il quadrato costruito su un lato è uguale alla somma dei quadrati costruiti sugli altri due lati meno il doppio dell'area del rettangolo avente come dimensione i due lati per il coseno dell'angolo da essi compreso, cioè, in formula: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$. É un'estensione del teorema di Pitagora al caso dei triangoli qualunque)

$$s = \sqrt{1200^2 + 2580^2 - 2 \cdot 1200 \cdot 2580 \cdot \cos 123°} = 3386\,m$$

nella direzione orizzontale.
In alternativa è possibile calcolarlo sommando le due componenti orizzontali dei vettori in figura, calcolo che richiede comunque la conoscenza dei teoremi di trigonometria sui triangoli rettangoli. In tal caso si ha

$$s_{1x} = 1200 \cdot \cos 40 = 919$$

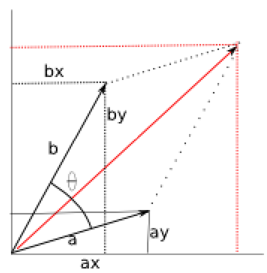
$$s_{2x} = 2580 \cdot \cos 17° = 2467$$

sommando i due contributi, si ottiene

$$s = 919\,m + 2467\,m = 3386\,m$$

sempre nella direzione orizzontale (E-O)

Esercizio 26. Due vettori di lunghezza a e b formano un angolo θ compreso fra le loro direzioni quando hanno in comune la coda. Si dimostri, ricavando le componenti lungo due assi perpendicolari, che la lunghezza della loro somma è $r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$:



Soluzione. prendiamo come riferimento la figura sopra. Indichiamo con α l'angolo tra il vettore a e l'asse x.

$$\begin{aligned} a_x &= a\cos\alpha \\ a_y &= a\sin\alpha \end{aligned}$$

Analogamente, l'angolo tra il vettore b e l'asse x, sarà $\alpha + \theta$

$$\begin{aligned} b_x &= b\cos(\alpha+\theta) \\ b_y &= b\sin(\alpha+\theta) \end{aligned}$$

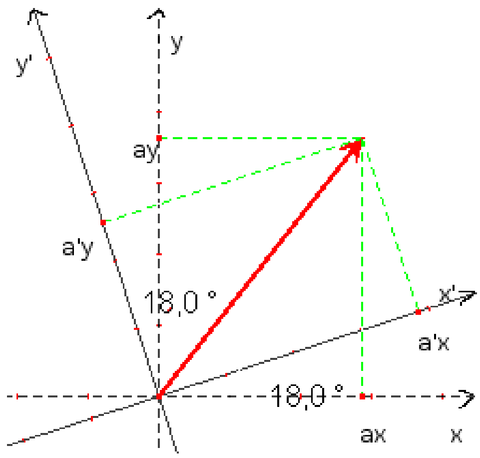
Di conseguenza, essendo $(a+b)_x = a_x + b_x$ e $(a+b)_y = a_y + b_y$, si ottiene

$$\begin{aligned} (a+b)_x &= a\cos\alpha + b\cos(\alpha+\theta) \\ (a+b)_y &= a\sin\alpha + b\sin(\alpha+\theta) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il modulo del vettore risultante

$$\begin{aligned}
\|a+b\| &= \sqrt{(a+b)_x^2+(a+b)_y^2} = \\
&= \sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2(\alpha+\theta)+2ab\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)+} \\
&\quad \sqrt{+a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2(\alpha+\theta)+2ab\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)} = \\
&= \sqrt{a^2+b^2+2ab\left[\cos\alpha\cos(\alpha+\theta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)\right]} = \\
&= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha-\alpha-\theta)} = \\
&= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\theta)}
\end{aligned}$$

Esercizio 27. Un vettore $\vec{a}$ con modulo $17.0\,m$ è orientato $56.0°$ in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle x, come in figura. (a) quali sono le componenti a_x e a_y del vettore? (b) Un secondo sistema di coordinate è inclinato di $18.0°$ rispetto al primo. quali sono le componenti $a_x^{'}$ e $a_y^{'}$ in questo sistema di coordinate?



Caso 1. (a): essendo l'angolo tra il vettore e l'asse x di $56°$ si ha

$$\begin{aligned}
a_x &= 17.0\cdot\cos 56.0° = 9.5\,m \\
a_y &= 17.0\cdot\sin 56.0° = 14,1\,m
\end{aligned}$$

Caso 2. La rotazione degli assi cartesiani è antioraria, pertanto l'angolo formato ora dal vettore con il nuovo asse $x^{'}$ è $56-18=38°$. Pertanto

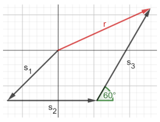
$$\begin{aligned}
a_x^{'} &= 17.0\cdot\cos 38.0° = 13.4\,m \\
a_y^{'} &= 17.0\cdot\sin 38.0° = 10,5\,m
\end{aligned}$$

Esercizio 28. Dati due vettori $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{i}+8\boldsymbol{j}$, determinare modulo e direzione dei vettori $a, b, a+b, b-a, a-b$.

Soluzione. $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$; $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6^2+8^2}=10$; $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(4+6)^2+(-3+8)^2}=11,2$; $|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(6-4)^2+(8+3)^2}=11,2$. Troviamo ora gli angoli che determinano le direzioni

$$\begin{array}{ccc}
\phi_a=\arctan-\frac{3}{4}=323° & \phi_b=\arctan\frac{8}{6}=53,1° & \phi_{a+b}=\arctan\frac{5}{10}=26,5° \\
\phi=\arctan-\frac{3}{4}=323° & \phi_{a-b}=\arctan\frac{11}{2}=79,7° & \phi_{b-a}=\arctan\frac{2}{11}=270°
\end{array}$$

Esercizio 29. Una massa puntiforme subisce tre successivi spostamenti in un piano come mostrato in figura: $4\,m$ a sud-ovest, $5\,m$ a est, $6\,m$ in una direzione $60°$ a nord-est.



Soluzione. troviamo i tre vettori mediante le loro componenti

$$\boldsymbol{s}_1 = -2,8\boldsymbol{i} - 2,8\boldsymbol{j} \quad \boldsymbol{s}_2 = 5\boldsymbol{i} \quad \boldsymbol{s}_3 = 3\boldsymbol{i} - 5,2\boldsymbol{j}$$

la risultante sarà espressa da $\boldsymbol{r} = 5,2\boldsymbol{i} + 2,4\boldsymbol{j}$; il suo modulo sarà

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{5,2^2 + 2,4^2} = 5,7$$

e l'angolo

$$\phi = \arctan \frac{2,4}{5,2} = 24,7°$$

Prodotto di vettori

Esercizio 30. Un vettore $\vec{a}$ ha modulo $2.5\,m$ ed è rivolto a nord. Quali sono modulo e direzione dei vettori $4.0\vec{a}$ e $-3.0\vec{a}$

Il prodotto di un vettore per uno scalare rappresenta un multiplo del vettore assegnato, che modifica solo il proprio modulo, lasciando invariate direzione e verso: i moduli risultano quindi

$$a_1 = 4.0 \cdot 2.5\,m = 10.0\,m$$

$$a_2 = -3.0 \cdot 2.5\,m = -7.5\,m$$

i versi saranno nord per a_1 e sud per a_2.

Esercizio 31. Un vettore $\boldsymbol{a}$ di modulo $10\,u$ e un altro vettore $\boldsymbol{b}$ di modulo $6\,u$ formano un angolo di $60°$. Trovare il prodotto scalare dei due vettori; il prodotto vettoriale dei due vettori.

Soluzione. $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 10 \cdot 6 \cdot \cos 30° = 52\,u$; $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 10 \cdot 6 \cdot \sin 30° = 30\,u$

Esercizio 32. Dati due vettori mediante le loro componenti $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$ dimostrare analiticamente che $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ (dove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i vettori unitari, o versori, che indicano la direzione rispetto agli assi di riferimento, rispettivamente x, y, z)

Moltiplichiamo le componenti tra loro

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = & \ (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}) = \\ = & \ \boldsymbol{ii}a_xb_x + \boldsymbol{ij}a_xb_y + \boldsymbol{ik}a_xb_z + \boldsymbol{ji}a_yb_x + \boldsymbol{jj}a_yb_y + \boldsymbol{jk}a_yb_z + \boldsymbol{ki}a_zb_x + \boldsymbol{kj}a_zb_y + \boldsymbol{kk}a_zb_z \end{aligned}$$

Ora, nel sistema cartesiano gli assi sono tra loro perpendicolari; nel caso del prodotto di versori uguali, paralleli e formanti un angolo uguale a $0°$, $\cos 0° = 1$ e quindi $\boldsymbol{ii} = \boldsymbol{jj} = \boldsymbol{kk} = 1$, mentre per tutti i prodotti misti, l'angolo da essi formato è pari a $90°$ e quindi $\cos 90° = 0$. Rimarranno pertanto solo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Esercizio 33. Usando la definizione di prodotto scalare $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi$ e la relazione $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$, calcolare l'angolo fra i due vettori seguenti

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k} \quad \boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$$

Soluzione. Avremo

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = ab\cos\phi$$

per cui

$$3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = ab\cos\phi$$

ma $3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = 6 + 3 - 9 = 0$ per cui $\phi = 90°$ e i due vettori sono perpendicolari.

Esercizio 34. Si consideri $\vec{a}$ nella direzione positiva dell'asse x, $\vec{b}$ nella direzione positiva di y e uno scalare d. Quale è la direzione di $\vec{b}/d$, se d è (a) positivo e se è (b) negativo. Qual è il modulo del prodotto scalare (c) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e di (d) $\vec{a}\cdot\vec{b}/d$. Qual è la (e) direzione e i (f) moduli di $\vec{a}\times\vec{b}$ e $\vec{b}\times\vec{a}$. Quali sono direzione e modulo di (g) $\vec{a}\times\vec{b}/d$.

Caso 1. (a): l'angolo tra i due vettori è di 90°. Se $d > 0$, la direzione di $\vec{b}/d$ rimane invariata, cioè nella direzione positivo dell'asse y

Caso 2. (b): se lo scalare $d < 0$, allora si inverte il verso del vettore e $\vec{b}/d$ sarà diretto nella direzione negativa di y

Caso 3. (c): il modulo del prodotto scalare è

$$\|\vec{a}\cdot\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos 90^\circ = 0$$

Caso 4. (d): lo stesso si avrà per il modulo di $\vec{a}\cdot\vec{b}/d$ per d sia positivo che negativo

Caso 5. (e): nel prodotto vettoriale, la direzione è perpendicolare al piano contenente i due vettori è diretto verso l'alto se $d > 0$ o verso il basso, se $d < 0$. il modulo di $\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin 90^\circ = ab$

Caso 6. (f): il prodotto vettoriale è commutativo per cui il risultato sarà, come in precedenza, ab.

Caso 7. (g): la direzione di $\vec{a}\times\vec{b}/d$ sarà verso l'alto se $d > 0$ e verso il basso se $d < 0$; i moduli saranno in entrambi i casi ab/d.

Esercizio 35. Due vettori $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ giacciono nel piano x, y. I loro moduli sono rispettivamente di 4.5 e 7.3 unità, e le loro direzioni sono rispettivamente di 320° e 85°, misurati in senso antiorario dal semiasse positivo delle x. Quali sono i valori di (a) $\vec{r}\times\vec{s}$ e (b) $\vec{r}\cdot\vec{s}$.

Caso 1. (a): $\vec{r}\times\vec{s} = 4.5\cdot 7.3\cdot\sin 125^\circ = 26.9$ dove l'angolo 125° è quello minore compreso tra i due vettori.

Caso 2. (b): $\vec{r}\cdot\vec{s} = 4.5\cdot 7.3\cdot\cos(320-85) = -18.8$