TRIGONOMETRIA

CAPITOLO 1

Archi e Angoli

1. Gradi sessaggesimali

La misura dell'ampiezza di un angolo è ottenuta solitamente ponendo l'ampiezza di un angolo giro uguale a $360°$, e quindi l'unità, $1\,grado$, è la $360-esima$ parte dell'angolo giro. I sottomultipli del grado sono presi secondo il sistema di numerazione sessaggesimale, cioè $1° = 60^{'}$ e $1^{'} = 60^{''}$ e quindi $1° = 3600^{''}$. Al di sotto del secondo di grado si ritorna all'uso dei centesimi di secondo di grado, ripristinando il sistema decimale; non ci sono multipli che rappresentano una particolare unità di misura.

2. Angoli radianti

Oltre questa unità, si introduce il radiante, che fa riferimento ad una circonferenza qualsiasi ed è l'angolo con vertice nel centro della circonferenza e tale che l'arco che lo sottende abbia lunghezza uguale al raggio.

Definizione: La misura di un angolo α, espressa in radianti, è il rapporto tra la lunghezza dell'arco di circonferenza, che lo sottende, e il raggio; in formule

$$\alpha = \frac{lunghezza\,arco}{raggio} = \frac{l}{r}$$

La misura in radianti è pertanto indipendente dalla circonferenza, poiché, considerando un'altra circonferenza di raggio maggiore, anche la lunghezza della sua corda crescerà secondo una proporzionalità diretta. (ricordiamo che la lunghezza di un arco sta all'intera circonferenza come l'angolo giro sta all'angolo al centro sotteso dalla corda stessa).

3. Formule di trasformazione

Se vengono introdotte due diverse unità di misura, lo stesso angolo sarà espresso nei due casi mediante due numeri diversi; di norma, data la misura in una unità, è possibile ricavare il valore espresso nell'altra unità di misura. Il criterio seguito è quello della proporzionalità. Cioè l'angolo giro in gradi sessaggesimali è pari a $360°$; lo stesso angolo giro, espresso in radianti, vale 2π, cioè il numero di volte in cui il raggio è contenuto nella circonferenza (si ricordi la definizione di radiante). Quindi

$$\alpha^{\circ} : \alpha^{r} = 360° : 2\pi$$

da cui

$$\alpha^{r} = \alpha^{\circ} \cdot \frac{2\pi}{360} = \alpha^{\circ} \cdot \frac{\pi}{180}$$

o anche

$$\alpha^{\circ} = \alpha^{r} \cdot \frac{180}{\pi}$$

4. Esercizi

Exercise 5. Trasformare in frazione di grado i seguenti angoli:

- $15°\,30^{'} = 15° + \frac{30}{60} = 15.5°$
- $2°\,12^{''} = 2° + \frac{12}{3600} = 2° + \frac{1}{300} = \left(\frac{601}{300}\right)° = 2,003°$
- $3°\,1^{'}\,10^{''} = 3° + \frac{1}{60} + \frac{10}{3600} = \frac{1087}{360} = 3.019°$

Exercise 6. Trasformare in gradi, primi, secondi le seguenti funzioni di grado:

- $\left(\frac{1201}{300}\right)^{\circ} = 4° + \frac{1}{300} = 4° + \frac{12}{3600} = 4°\,12^{''}$
- $\left(\frac{3241}{720}\right)^{\circ} = 4° + \frac{361}{720} = 4 + \frac{1805}{3600} = 4° + \frac{1800}{3600} + \frac{5}{3600} = 4° + \frac{30}{60} + \frac{5}{3600} = 4°\,30^{'}\,5^{''}$

Questi calcoli possono essere svolti facilmente utilizzando una calcolatrice:

- $\left(\frac{1201}{300}\right)^{\circ} = 1201 : 300 = 4.00333333$; sottraiamo la parte intera: $Ans - 4 = 0.003333333$; moltiplichiamo per 60 per ottenere il numero dei primi: $Ans \cdot 60 = 0.2$; essendo minore dell'unità avremo $0^{'}$; moltiplichiamo poi per 60 per avere i secondi: $Ans \times 60 = 12^{''}$
- $\left(\frac{3241}{720}\right)^{\circ} = 3241 : 720 = 4.501388888$, avremo $4°$; poi $(Ans - 4) \cdot 60 = 30.0833333$, avremo $30^{'}$; poi $(Ans - 30) \cdot 60 = 5^{''}$

A dire il vero, le calcolatrici offrono la possibilità di eseguire tali trasformazioni con maggiore rapidità, ma non mi soffermo su ciò, non potendo qui presentare le modalità per ogni marca di calcolatrice.

Exercise 7. Trasformare in radianti le seguenti misure espresse in gradi:

- $12°$: basta applicare la formula di conversione.
$$12° \cdot \frac{\pi^r}{180°} = \frac{1}{15}\pi = 0.2094^r$$
- $5°\,30'\,15''$: trasformiamo prima in frazione di grado e poi in radianti:
$$5 + \frac{30}{60} + \frac{15}{3600} = \frac{1321}{240}^{\circ}$$
per cui
$$\frac{1321}{240}^{\circ} \cdot \frac{\pi^r}{180°} = \frac{1321}{43200}\pi = 0.0306^r$$

Exercise 8. Trasformare in gradi le seguenti misure espresse in radianti:

- $\frac{3}{4}\pi$: applichiamo la formula di trasformazione
$$\frac{3}{4}\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 135°$$
- $\frac{11}{4}\pi$: come prima
$$\frac{11}{4}\pi \cdot \frac{180}{\pi} = 495°$$
- $2,5467^r$: anche in questo caso, basta applicare la formula di trasformazione, sostituendo a π il suo valore numerico, ovviamente approssimato
$$2,5467^r \cdot \frac{180}{\pi} = 146,73° = 146°\,43'\,33''$$

8.1. Applichiamo ora la definizione di radiante.

Exercise 9. Determinare la misura l dell'arco, noti l'angolo al centro e il raggio:

- $\alpha = \frac{\pi}{12}$ e $r = 6$. Ricordando la definzione di radiante $\alpha^r = \frac{l}{r}$, si ha
$$l = \alpha r = \frac{\pi}{12} \cdot 6 = \frac{\pi}{2} = 1,5708$$

Exercise 10. Dati la misura del raggio, dell'angolo al centro, trovare la lunghezza dell'arco sotteso e l'area del settore circolare:

- $\alpha = \frac{3}{7}\pi$ e $r = 14$: dalla definizione di angolo radiante si ha
$$l = \alpha r = \frac{3}{7}\pi \cdot 14 = 6\pi = 18.85$$
mentre l'area del settore circolare sta con l'area del cerchio come l'angolo al centro sta all'angolo giro:
$$A_{settore} : \pi r^2 = \alpha : 2\pi$$
da cui
$$A_{settore} = \frac{\frac{3}{7}\pi \cdot 14^2\pi}{2\pi} = \frac{3}{14} \cdot 14^2\pi = 42\pi = 131.9$$

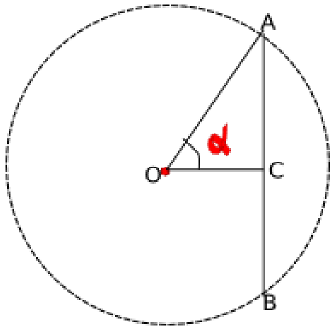
CAPITOLO 2

Funzioni Goniometriche

1. Cenni storici

Il fondatore della trigonometria è Ipparco, che visse a Rodi e ad Alessandria e morì intorno al 125 a.C. Il metodo usato da Ipparco ci è pervenuto attraverso la descrizione e l'uso fattone da Tolomeo (Ipparco e Tolomeo furono tra i più grandi astronomi del passato).

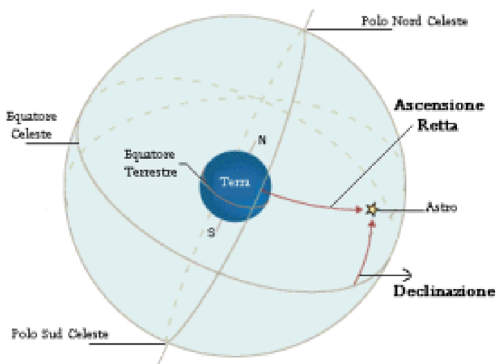
Per un dato arco AB, Ipparco, in un libro perduto, dà il numero di unità della corrispondente corda AB. Tale numero è equivalente alle moderne funzioni goniometriche. (Nella figura uno schema del ragionamento di Ipparco).



Se 2α è l'angolo al centro dell'arco AB, Ipparco dà il numero di unità contenute in $2AC$ rispetto al raggio, che ne contiene 60.

2. Derivazione astronomica

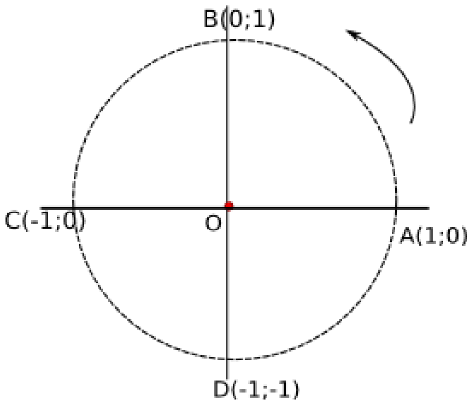
Da ciò si deduce che l'origine della trigonometria, così come la conosciamo oggi, è legata all'astronomia e quindi alla individuazione delle altezze dei corpi celesti attraverso la misura, fatta da terra, dell'angolo da essi formato con l'orizzonte. L'altezza, o declinazione di una stella, è oggi l'angolo al centro sotteso da un arco di meridiano celeste compreso fra l'equatore celeste e il parallelo passante per l'oggetto.



La circonferenza viene divisa in 360°, come già fatto dai Babilonesi, e il diametro in 120 parti. Ciascuna di queste parti vengono ulteriormente divise in 60 parti secondo il sistema babilonese di frazioni sessaggesimali.

3. Descrizione moderna

Nella matematica moderna l'approccio è assai simile, ma è ottenuto attraverso l'utilizzo del piano cartesiano nel quale è rappresentata una circonferenza, detta goniometrica, che ha per centro l'origine del piano e raggio unitario, come in figura.

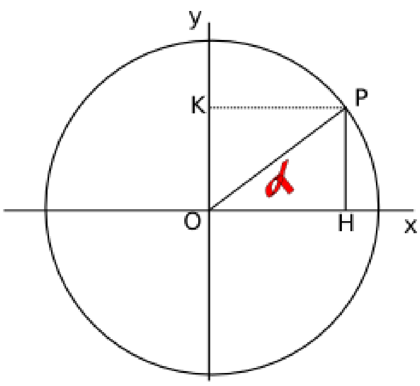


Il legame tra la corda, o semicorda e l'angolo al centro, è espresso mediante l'introduzione di una funzione, che svolge appunto questo ruolo di «intermediario».

DEFINITION 3.1. Dicesi seno di un angolo, in simboli $\sin\alpha$, il rapporto tra la proiezione del raggio sull'asse delle ordinate e il raggio stesso. In pratica, indica il rapporto tra la semicorda e il raggio.

$$\sin\alpha = \frac{PH}{OP}$$

essendo il raggio unitario, è possibile assimilare il seno di un angolo alla ordinata del punto P, interrsezione tra il secondo lato dell'angolo e la circonferenza.



Osservando la figura, il punot P, come ogni punto del piano cartesiano, è caratterizzato da due coordinate.

DEFINITION 3.2. Chiamiamo coseno dell'angolo α, in simboli $\cos\alpha$, il rapporto tra la proiezione del raggio sull'asse delle ascisse e il raggio stesso.

$$\cos\alpha = \frac{OH}{OP}$$

Essendo il raggio unitario, $\cos\alpha$ rappresenta l'ascissa del punto P sulla circonferenza.

Pertanto, il punto P sulla circonferenza avrà coordinate

$$P\left(\cos\alpha; \sin\alpha\right)$$

É facile osservare che, poiché il triangolo OPH in figura è rettangolo, applicando il teorema di Pitagora, si ha

$$OH^2 + PH^2 = OP^2$$

ma $OH = \cos\alpha$ e $PH = \sin\alpha$, e quindi

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

questa è detta **prima relazione fondamentale della goniometria**.

Al variare di P sulla circonferenza corrispondono variazioni nei valori del seno e del coseno. In particolare

- I Quadrante: $\begin{array}{lcc} \sin\alpha & \textit{crescente} & > 0 \\ \cos\alpha & \textit{decrescente} & > 0 \end{array}$
- II Quadrante: $\begin{array}{lcc} \sin\alpha & \textit{decrescente} & > 0 \\ \cos\alpha & \textit{decrescente} & < 0 \end{array}$
- III Quadrante: $\begin{array}{lcc} \sin\alpha & \textit{decrescente} & < 0 \\ \cos\alpha & \textit{crescente} & < 0 \end{array}$
- IV Quadrante: $\begin{array}{lcc} \sin\alpha & \textit{crescente} & < 0 \\ \cos\alpha & \textit{crescente} & > 0 \end{array}$

3.1. Esercizi.

Exercise 4. Stabilire in quale quadrante cade il secondo estremo dei seguenti archi:

- $315°$: IV quadrante con angoli $270° < \alpha < 360°$
- $117°$: II quadrante con angoli $90° < \alpha < 180°$
- $12°$: I quadrante con angoli $0° < \alpha < 90°$
- $\frac{5}{4}\pi$: III quadrante con angoli $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$;