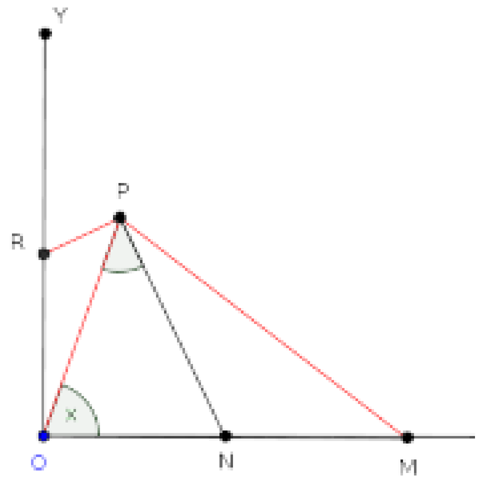
Problemi di trigonometria con discussione

svolti dal prof. Gianluigi Trivia

PROBLEMA 1. Sulla semiretta OX dell'angolo $X\hat{O}Y = 90°$ si considerino i punti M e N tali che $\overline{OM} = 2\overline{ON} = 2a$ e sulla semiretta OY il punto R tale che $\overline{OR} = a$. Internamente all'angolo $X\hat{O}Y$ determinare un punto P tale che $O\hat{P}N = 45°$ in modo che, posto $N\hat{O}P = x$, risulti

$$f(x) = PM^2 + PR^2 + OP^2 = ka^2$$

con $k \in \mathbb{R}_0^+$. Discussione.



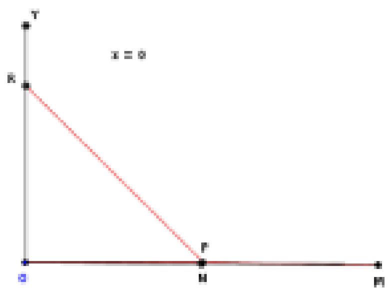
SOLUZIONE. Analizziamo l'intervallo di variazione dell'angolo incognito x. Quando $x = 0°$, il punto $P \equiv N$ e, di conseguenza, $RP = a\sqrt{2}$, $PM = a$, $OP = a$, per cui

$$f(x) = 2a^2 + a^2 + a^2 = ka^2$$

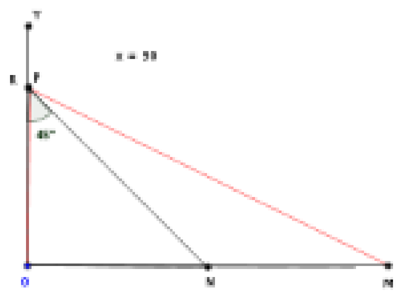
da cui $k = 4$. Se $x = 90°$, si ha $P \equiv R$ e $RP = 0$, $PM = a\sqrt{5}$, $OP = a$, per cui

$$5a^2 + a^2 = ka^2$$

da cui $k = 6$.



Condizione $x = 0$



Condizione $x = 90°$

L'incognita varierà nell'intervallo $0 < x < 90°$.

Calcoliamo ora i segmenti indicati in funzione dell'incognita. applicando il teorema dei seni al triangolo OPN, si ha

$$\frac{OP}{\sin\left[180-(45+x)\right]} = \frac{ON}{\sin 45°}$$

risolvendo rispetto a OP, si ha, sapendo che $\sin 45 = \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$OP = \frac{a\sin(45+x)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = a\sqrt{2}\left(\sin 45\cos x + \cos 45\sin x\right) = a\left(\cos x + \sin x\right)$$

possiamo calcolare il quadrato di OP

$$OP^2 = a^2\left(\cos x + \sin x\right)^2 = a^2\left(1+\sin 2x\right)$$

Calcoliamo ora PR, applicando il teorema di Carnot al triangolo OPR

$$PR^2 = OR^2 + OP^2 - 2\cdot OR\cdot OP\cos(90-x)$$

sostituendo i valori, si ha

$$PR^2 = a^2 + a^2\left(1+\sin 2x\right) - 2a^2\left(\cos x + \sin x\right)\sin x$$

svolgendo

$$PR^2 = 2a^2 + a^2\sin 2x - a^2\sin 2x - 2a^2\sin^2 x = 2a^2\cos^2 x$$

Calcoliamo ora PM^2 applicando sempre il teorema di Carnot al triangolo OPM

$$PM^2 = OP^2 + OM^2 - 2\cdot OP\cdot OM\cdot\cos x = a^2\left(1+\sin 2x\right) + 4a^2 - 2\cdot a\left(\cos x + \sin x\right)\cdot 2a\cos x$$

$$PM^2 = 5a^2 + a^2\sin 2x - 4a^2\cos^2 x - 2a^2\sin 2x = 5a^2 - a^2\sin 2x - 4a^2\cos^2 x$$

La funzione cercata sarà pertanto

$$f(x) = a^2\left(1+\sin 2x\right) + 2a^2\cos^2 x + 5a^2 - a^2\sin 2x - 4a^2\cos^2 x = ka^2$$

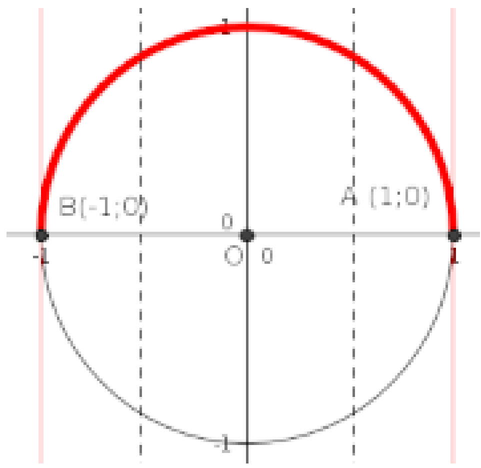
svolgendo e dividendo tutto per a^2, si ha

$$5 + 1 - 2\cos^2 x = 5 + \cos 2x = k$$

Discussione: affrontiamo la discussione delle soluzioni con il metodo grafico, mediante la risoluzione grafico del seguente sistema, ponendo $X = \cos 2x$, con $0 < 2x < 180$

$$\begin{cases} X = k-5 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

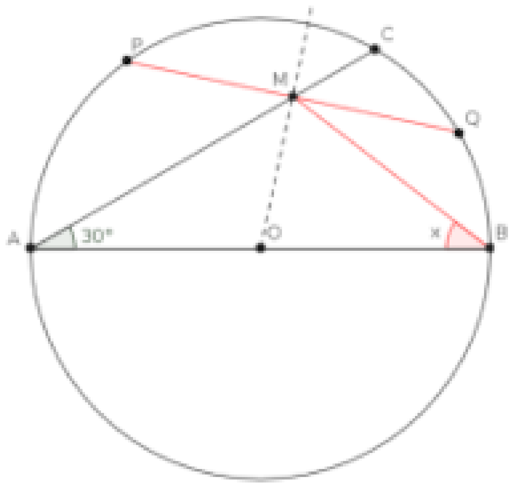
cioè mediante lo studio delle intersezioni tra la circonferenza goniometrica e il fascio di rette parallele all'asse X



se la retta passa per il punto $A\left(1;0\right)$, allora $k=6$
se la retta passa per il punto $B\left(-1;0\right)$, allora $k=4$
avremo quindi $1\,soluzione$ per $4\leq k\leq 6$

Problema 2. Data una circonferenza di diametro $AB=2r$ e centro O, si conduca una corda AC tale che $C\hat{A}B=\frac{\pi}{6}$. Se M è un punto di tale corda, determinare l'ampiezza dell'angolo $M\hat{B}A$ in modo che, detta PQ la corda della circonferenza di cui M è punto medio, si abbia:

$$\overline{PQ}^2=4k\overline{MB}^2$$



Soluzione. [Il punto M sta sulla corda AC, per trovare la corda PQ, si tracci la semiretta MO e poi la perpendicolare da M a tale semiretta; per i teoremi delle corde, PQ avrà necessariamente M come punto medio]. Determiniamo l'intervallo dei valori dell'angolo incognito $M\widehat{B}A=x$. Il punto M deve appartenere alla corda AC, per cui

Se $M\equiv A$ l'angolo $M\widehat{B}A=0$ allora $PQ=0$ e $MB=2r$

Se $M\equiv C$ l'angolo $M\widehat{B}A=60°$, perché il triangolo AMB è inscritto in una semicirconferenza, e $MB=r$, corda che sottende un angolo al centro di 60°, lato del triangolo equilatero inscritto, e $PQ=0$. Pertanto $0\leq x\leq 60°$

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo AMB per ricavare la lunghezza del segmento

$$\frac{MB}{\sin 30°}=\frac{AB}{\sin\left[180-\left(30+x\right)\right]}$$

da cui

$$MB=\frac{2r\cdot\frac{1}{2}}{\sin\left(30+x\right)}=\frac{r}{\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x}=\frac{2r}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}$$

Per calcolare MQ è possibile applicare il teorema delle due secanti, prolungando la semiretta OM, oppure calcolare OM e applicare il teorema di Pitagora al triangolo OMQ. Seguiremo questa seconda modalità. Calcoliamo prima OM con il teorema di Carnot

$$OM^2=MB^2+OB^2-2\cdot MB\cdot OM\cdot\cos x$$

sostituendo

$$OM^2=\left(\frac{2r}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}\right)^2+r^2-\frac{4r^2\cdot\cos x}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}$$

Troviamo ora MQ con il teorema di Pitagora

$$MQ^2=OQ^2-OM^2=r^2-{\frac{4r^2}{\left(\cos x+\sqrt{3}\sin x\right)^2}}^{2}-r^2+\frac{4r^2\cdot\cos x}{\cos x+\sqrt{3}\sin x}$$

svolgendo i calcoli, si ottiene

$$MQ^2 = -\frac{4r^2}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} + \frac{4r^2\cos x}{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$$

da cui

$$PQ^2 = -\frac{16r^2}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} + \frac{16r^2\cos x}{\cos x + \sqrt{3}\sin x}$$

La relazione cercata è quindi

$$-\frac{16r^2}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2} + \frac{16r^2\cos x}{\cos x + \sqrt{3}\sin x} = \frac{16kr^2}{\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)^2}$$

eseguendo i calcoli, (il denominatore è, nell'intervallo considerato, sempre positivo) si ottiene

$$-1 + \cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = k$$

$$\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x - k - 1 = 0$$

risolvo riconducendola ad equazione lineare, applicando le formule goniometriche

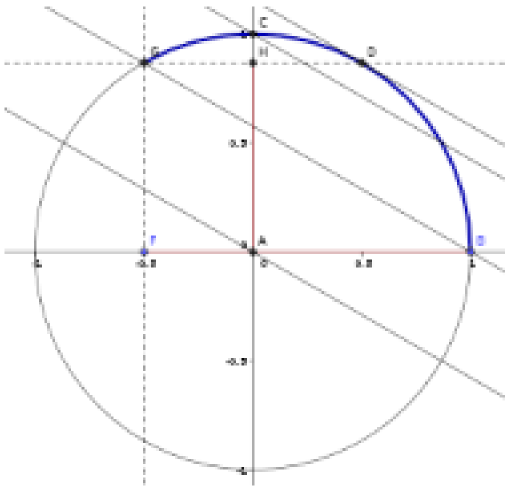
$$\frac{\cos 2x + 1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - (k+1) = 0$$

$$\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x - 1 - 2k = 0$$

costruiamo il seguente sistema risolutivo, ponendo $\cos 2x = X$ e $\sin 2x = Y$

$$\begin{cases} X + \sqrt{3}Y - 1 - 2k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

procediamo con la risoluzione grafica;



Dalla figura si osserva che avremo sempre due soluzioni; troviamo l'intervallo dei valori di k.

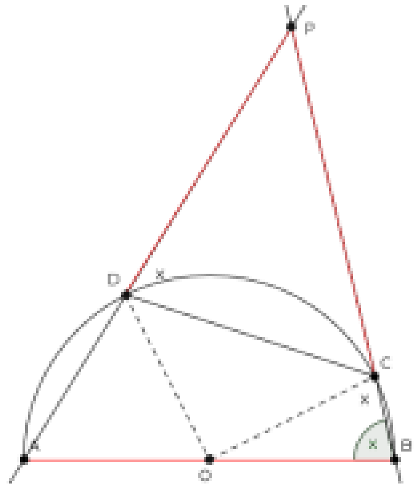
Per la retta passante per $B(1;0)$ si ha $1 + 0 - 1 - 2k =$, da cui $k = 0$

Ricaviamo la retta tangente in $D\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, si ha $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 - 2k = 0$, da cui $k = \frac{1}{2}$

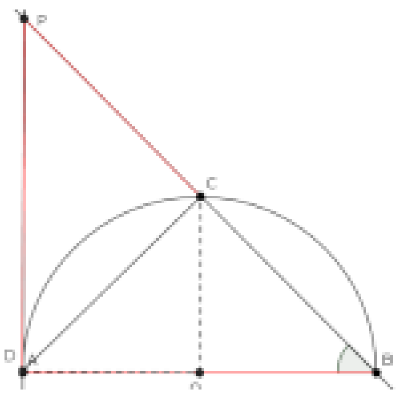
Pertanto l'intervallo dei valori sarà $0 \leq k \leq \frac{1}{2}$, dove avremo sempre due soluzioni.

Problema 3. Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, si tracci la corda CD (con C più vicino a B) lato del quadrato inscritto e sia P il punto comune alle due rette AD e BC. Determinare la posizione della corda Cd in modo che si abbia

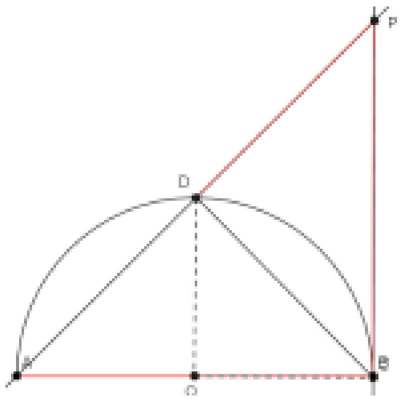
$$\overline{PD} + \sqrt{2\overline{PC}} = k\overline{AB}$$



Soluzione. Tracciamo dal centro O i raggi OC, OD, che formeranno rispettivamente con le corde BC, AD, dei triangoli isosceli. Poniamo, come indicato in figura, l'angolo $O\widehat{B}C = x$. Dovendo il punto C essere più vicino a B, possiamo determinare l'intervallo di variazione dell'incognita.
Se $x = \frac{\pi}{4}$, allora $C \equiv B$, il segmento PB appartiene alla tangente in B ;
se $x = \frac{\pi}{2}$, allora $A \equiv D$, il segmento PD appartiene alla tangente in A



Condizione $x = 0$



Condizione $x = 90°$

L'incognita ammetterà valori accettabili per $45° \leq x \leq 90°$

Determiniamo i valori degli angoli, alla luce delle condizioni posti.

L'angolo $B\hat{O}C = \pi - 2x$; l'angolo $D\hat{O}C = \frac{\pi}{2}$, angolo al centro sotteso dal lato di un quadrato inscritto; l'angolo $A\hat{O}D = 2x - \frac{\pi}{2}$; l'angolo $B\hat{A}D = \frac{3}{4}\pi - x$; pertanto, L'angolo $A\hat{P}B = \pi - \left(\frac{3}{4}\pi - x + x\right) = \frac{\pi}{4}$; l'angolo $P\hat{D}C = x$; l'angolo $P\hat{C}D = \frac{3}{4}\pi - x$.

Possiamo quindi applicare il teorema dei seni per ricavare i segmenti richiesti

$$\frac{\overline{PD}}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - x\right)} = \frac{r\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \rightarrow \quad \overline{PD} = r\sqrt{2}\left(\cos x + \sin x\right)$$

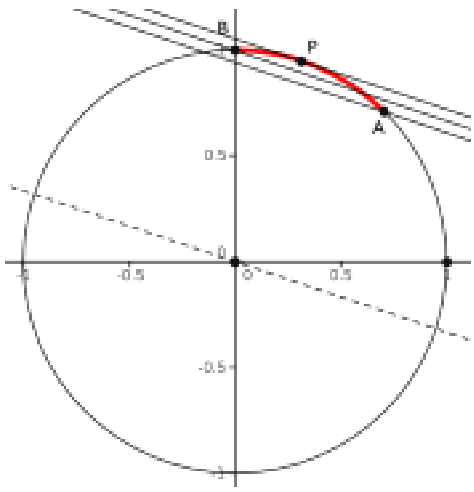
$$\frac{\overline{PC}}{\sin x} = \frac{r\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \overline{PC} = 2r\sin x$$

La relazione richiesta sarà pertanto

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\left(\cos x + \sin x\right) + 2\sqrt{2}\sin x &= 2k \\ \sqrt{2}\cos x + 3\sqrt{2}\sin x - 2k &= 0 \end{aligned}$$

L'equazione è lineare e ci consente di risolvere graficamente con il sistema risolutivo, ponendo $\cos x = X$ e $\sin x = Y$

$$\begin{cases} \sqrt{2}X + 3\sqrt{2}Y - 2k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$



Come si vede dal grafico in figura (piano $\cos x, \sin x$), avremo 1 soluzione per le rette secanti comprese tra i punti A e B e due soluzioni per le rette comprese tra B e la tangente in P.

Se la retta passa per $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si ha $1 + 3 - 2k = 0$, da cui $k = 2$

Se la retta passa per $B(0;1)$, si ha $0 + 3\sqrt{2} - 2k = 0$, da cui $k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

L'equazione della tangente in P, sarà $\sqrt{2}X + 3\sqrt{2}Y - 2k$ e la sua distanza dal centro è $= 1$, quindi

$$1 = \frac{|-2k|}{\sqrt{20}} \quad \to \quad k = \sqrt{5}$$

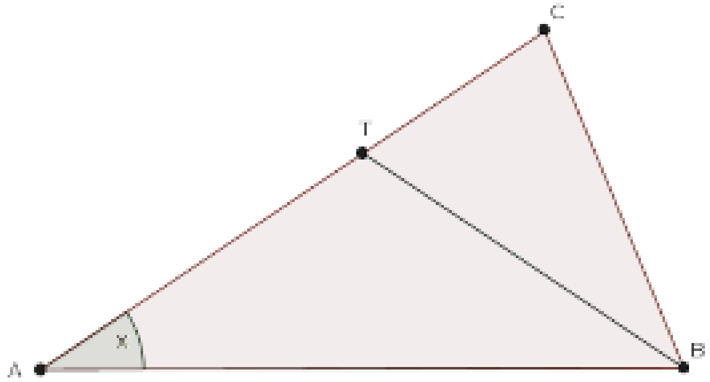
Le soluzioni saranno

$$2 < k < \frac{3\sqrt{2}}{2} \qquad 1\, soluzione$$
$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \leq k \leq \sqrt{5} \qquad 2\, soluzioni$$

PROBLEMA 4. Si consideri il triangolo ABC in cui $\overline{AB} = 2l$ e $A\widehat{B}C = 2B\widehat{A}C$. Condurre la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$ che incontri in T il lato AC e posto $B\widehat{A}C = x$, considerare la funzione

$$y = \frac{Area\,(ABT)}{Area\,(BCT)}$$

verificando che $y = 2\cos 2x + 1$. Determinare il minimo e massimo valore di y, se esistono.



SOLUZIONE. L'angolo $\widehat{C}=\pi-3x$, essendo l'angolo $\widehat{B}$ sempre essere doppio dell'angolo $\widehat{A}=x$. Per cui se $x=0$, allora $\widehat{C}=\pi$ e il triangolo degenera; se $x=\frac{\pi}{3}$, allora l'angolo $\widehat{C}=0$ e il triangolo non esiste. I limiti di variabilità saranno pertanto $0<x<\frac{\pi}{3}$.

Il triangolo ATB è isoscele, essendo BT la bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$, pertanto, l'angolo $A\widehat{T}B=\pi-2x$ e applicando il teorema dei seni a tale triangolo si ha

$$\frac{AB}{\sin(\pi-2x)}=\frac{AT}{\sin x}\qquad AT=\frac{2l\sin x}{\sin 2x}=\frac{2l\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{l}{\cos x}$$

L'area del triangolo ATB sarà

$$A_{ABT}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\cos x}\cdot 2l\sin x=l^2\tan x$$

Consideriamo ora il triangolo BTC. L'angolo $T\widehat{B}C=x$ (sempre perché BT è la bisettrice), l'angolo $B\widehat{T}C=2x$, angolo esterno del triangolo ATB e quindi uguale alla somma dei due angoli non adiacenti (o anche supplementare dell'angolo $A\widehat{T}B$); avremo, sempre applicando il teorema dei seni

$$\frac{BT}{\sin(\pi-3x)}=\frac{BC}{\sin 2x}\qquad BC=\frac{\frac{l\sin 2x}{\cos x}}{\sin 3x}$$

applicando le formule trigonometriche, si ha

$$\begin{aligned}BC &= \frac{2l\sin x}{\sin(2x+x)}=\frac{2l\sin x}{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}\\ &= \frac{2l\sin x}{2\sin x\cos^2 x+\sin x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)}\\ &= \frac{2l\sin x}{\sin x\left(3\cos^2 x-\sin^2 x\right)}=\frac{2l}{(4\cos^2 x-1)}\end{aligned}$$

L'area del triangolo BTC sarà

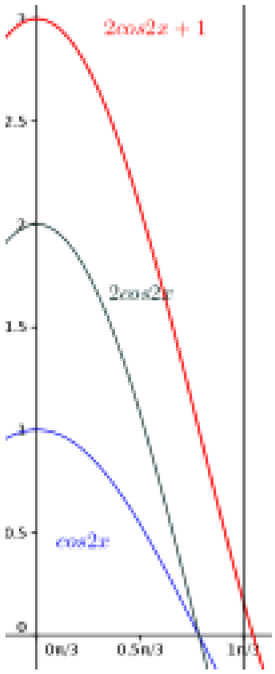
$$A_{BTC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{\cos x}\cdot\frac{2l\sin x}{(4\cos^2 x-1)}=\frac{l^2\tan x}{(4\cos^2 x-1)}$$

La funzione sarà quindi espressa da

$$y=\frac{Area\,(ABT)}{Area\,(BCT)}=\frac{l^2\tan x}{\frac{l^2\tan x}{\left(4\cos^2 x-1\right)}}=4\cos^2 x-1=4\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}-1=2\cos 2x+1$$

proprio la funzione indicata.

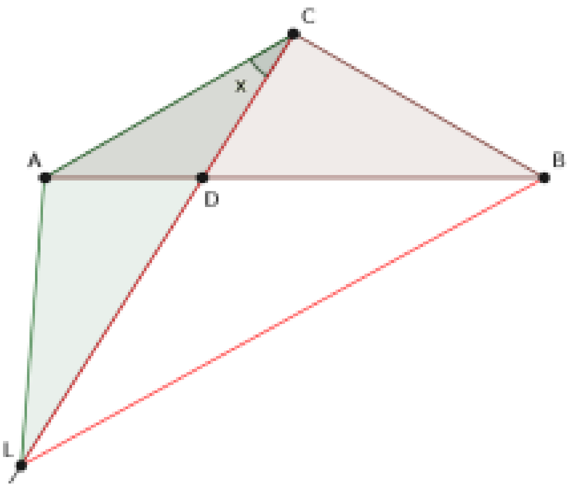
Per valutare l'esistenza e il valore del massimo e minimo, rappresentiamo graficamente tale funzione, mostrando le trasformazioni a partire dalla funzione $\cos 2x$.



Gli estremi della funzione non sono compresi e pertanto non è possibile determinare valori di max e min.

Problema 5. Dato il triangolo ABC tale che $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$, $\overline{AC} = 2$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{6}$, tracciare con origine in C una semiretta che intersechi il lato AB nel punto D e prendere su di essa un punto L tale che il triangolo ACL sia isoscele sulla base CL in modo che risulti

$$\overline{CL}^2 + \overline{BL}^2 = 4k$$



Soluzione. Calcolo la misura del lato BC, applicando il teorema di Carnot

$$\overline{BC} = \sqrt{12 + 4 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

verifico in tal modo che il triangolo ABC è isoscele sulla base AB e quindi $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{6}$ e $A\widehat{C}B = \frac{2}{3}\pi$. Poniamo $A\widehat{C}L = x$; la semiretta AL deve intersecare il lato AB per cui, se $x = 0$ allora $D \equiv A$, $CL = 2AC$ e $BL^2 = 16 + 4 - 16\cos\frac{2}{3}\pi = 28$ e la relazione richiesta si riduce a $16 + 28 = 4K$, da cui $k = 11$.
Se $x = \frac{\pi}{2}$, allora $CL = 0$ e $BL = 2$, per cui $k = 1$; in tale case il triangolo degenera. Se l'angolo x

superasse tale valore, il triangolo CAL non esisterebbe, perché la somma degli angoli interni è un angolo piatto. I limiti di variabilità saranno $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Ricaviamo la misura del segmento CL applicando il teorema di Carnot al triangolo CAL:

$$CL^2 = 4+4-8\cos(\pi-2x) = 8+8\cos 2x$$

Ricaviamo anche la misura del segmento BL applicando il teorema di Carnot al triangolo ALB:

$$BL^2 = 4+12-8\sqrt{3}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}-2x\right) = 16-8\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

La relazione cercata sarà

$$8+8\cos 2x+16+12\cos 2x-4\sqrt{3}\sin 2x = 4k$$

$$20\cos 2x-4\sqrt{3}\sin 2x+24-4k = 0$$

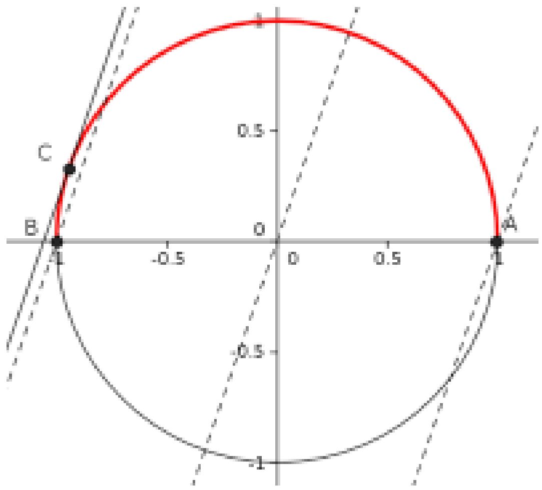
riducendo

$$5\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+6-k = 0$$

Questa è un'equazione lineare nelle incognite $\cos 2x = X$ $\sin 2x = Y$; i limiti diventano $0 \leq 2x \leq \pi$. Il sistema risolvente diviene

$$\begin{cases} 5X-\sqrt{3}Y+6-k=0 \\ X^2+Y^2=1 \end{cases}$$

risolviamo graficamente



Per la retta passante per il punto $A(1;0)$ si ha $5+6=k$, da cui $k=11$
Per la retta passante per il punto $B(-1;0)$ si ha $-5+6=k$, da cui $k=1$
Determiniamo la retta tangente in C che dista dal centro $O(0;0)$ il valore del raggio $=1$

$$1 = \frac{|6-k|}{\sqrt{25+3}} \qquad k = 6-2\sqrt{7}$$

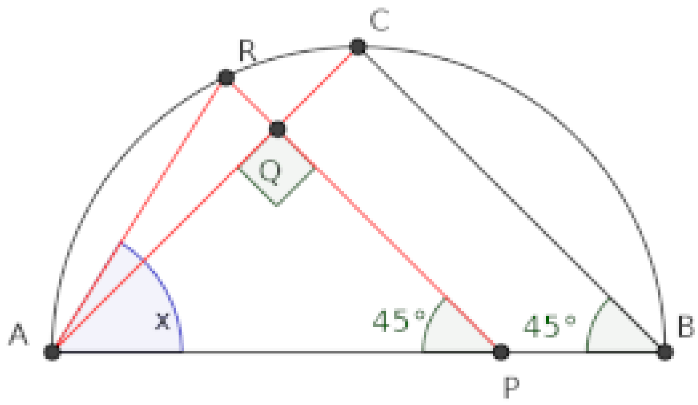
Avremo, pertanto,

$$1\,sol \quad per \quad 1<k\leq 11$$

$$2\,sol \quad per \quad 6-2\sqrt{7}\leq k\leq 1$$

Problema 6. Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, sia $\overline{AC}=r\sqrt{2}$ una sua corda. Determinare sul segmento AB un punto P tale che, detti Q ed R i punti in cui la perpendicolare condotta da P ad AC incontra rispettivamente AC e la semicirconferenza, si abbia:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}+k\frac{\overline{AR}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PQ}}$$



SOLUZIONE. La corda $AC = r\sqrt{2}$ è il lato del quadrato inscritto, la cui metà è rappresentata dal triangolo rettangolo isoscele ACB. Anche l'angolo $A\widehat{P}R = \frac{\pi}{4}$, perché il segmento PR è parallelo alla corda BC, perché perpendicolari alla stessa retta contenente AC. Poniamo, quindi, $P\widehat{A}R = x$.

Se $P \equiv A$, anche $Q \equiv A \equiv R$, $x = \frac{\pi}{2}$ e la relazione non è più definita, contenendo frazioni con denominatori nulli. Quindi $k \to \infty$.

Se $P \equiv B$, allora $x = \frac{\pi}{4}$, perché anche $R \equiv Q \equiv C$ e il triangolo $APR \equiv ACB$; per cui $PR = AR = AQ = PQ = r\sqrt{2}$, e $k = 0$. L'intervallo di variazione sarà $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$

Calcoliamo ora la misura dei segmenti presenti nella relazione in funzione dell'angolo incognito x. Consideriamo il triangolo AQP, esso sarà la metà di un quadrato di lato $AQ = QP$, mentre $AP = AQ\sqrt{2}$ (ciò implica che il rapporto $\frac{AQ}{PQ} = 1$).

La corda AR sottende un angolo alla circonferenza uguale a $\frac{\pi}{2} - x$, per cui

$$AR = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2r\cos x$$

Possiamo ora ricavare PR applicando il teorema dei seni al triangolo ARP

$$\frac{PR}{\sin x} = \frac{AR}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

da cui

$$PR = 2\sqrt{2}r\sin x\cos x$$

La relazione cercata sarà pertanto

$$\frac{2\sqrt{2}r\sin x\cos x}{2r\cos x} + k\frac{2r\cos x}{r\sqrt{2}} = 1$$

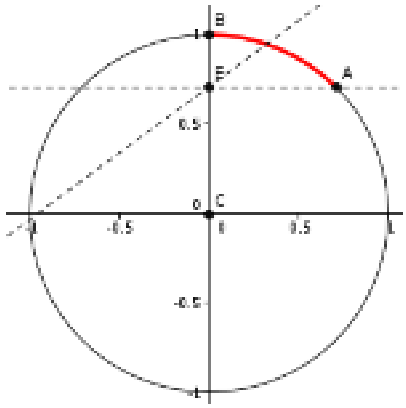
cioè, riducendo,

$$\sqrt{2}\sin x + k\sqrt{2}\cos x = 1$$

Questa è una equazione lineare nelle incognite $\cos x = X$ $\sin x = Y$ e possiamo risolvere graficamente mediante il sistema

$$\begin{cases} k\sqrt{2}X + \sqrt{2}Y - 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

la prima equazione rappresenta un fascio proprio di rette avente sostegno nel punto $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Per la retta passante per il sostegno e il punto $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, si ha $k=0$

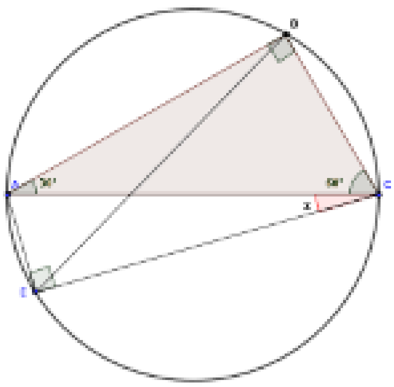
La retta passante per il sostegno non è compresa nel fascio, avendo coefficiente angolare non definito, e avremo $k=-\infty$

Avremo pertanto

$$1\,soluz\quad per\quad -\infty<k\leq 0$$

Problema 7. Sia ABC un triangolo rettangolo in B, in cui $\widehat{C}=\frac{\pi}{3}$ e $\overline{AC}=2r$. sulla semicirconferenza di diametro AC non circoscritta al triangolo considerare un punto E in modo che risulti

$$\overline{AE}^2+\overline{EC}^2+\overline{EB}^2=kr^2$$



Soluzione. Entrambi i triangoli ABC e AEC sono triangoli rettangoli; in particolare, il triangolo ABC, avendo un angolo di $\frac{\pi}{3}$, sarà la metà di un triangolo equilatero di lato AC. Da ciò deriva che $AC=r$, semilato, e $AB=r\sqrt{3}$. Pongo $A\widehat{C}E=x$.

Se $E\equiv A$, $x=0$ e $AE=0$, $EC=2r$, $AB=EB=r\sqrt{3}$; pertanto $0+4r^2+3r^2=kr^2$, cioè $k=7$
Se $E\equiv C$, $x=\frac{\pi}{2}$, $EC=0$, $AE=2r$, $EB=BC=r$; pertanto $4r^2+r^2=kr^2$, cioè $k=5$.
L'intervallo di variazione dell'incognita sarà $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

Troviamo ora la lunghezza dei segmenti indicati nella relazione, applicando il teorema della corda

$$AE=2r\sin x\qquad EC=2r\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2r\cos x$$

$$EB=2r\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=r\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)$$

Avremo quindi

$$4r^2\sin^2 x+4r^2\cos^2 x+r^2\left(\sqrt{3}\cos x+\sin x\right)^2$$

svolgendo e applicando la proprietà fondamentale della goniometria

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 4 - k = 0$$

l'equazione è riconducibile a una equazione omogenea di secondo grado

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + (4-k)\sin^2 x + (4-k)\cos^2 x = 0$$

dividendo per $\cos^2 x$, si ha

$$(5-k)\tan^2 x + 2\sqrt{3}\tan x + 7 - k = 0$$

Poniamo $\tan x = t$, con $0 \le t < \infty$, e $y = \tan^2 x$. L'equazione si riduce al sistema

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}t + (5-k)y + (7-k) = 0 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Il sistema descrive l'intersezione tra un ramo di parabola e un fascio proprio di rette.

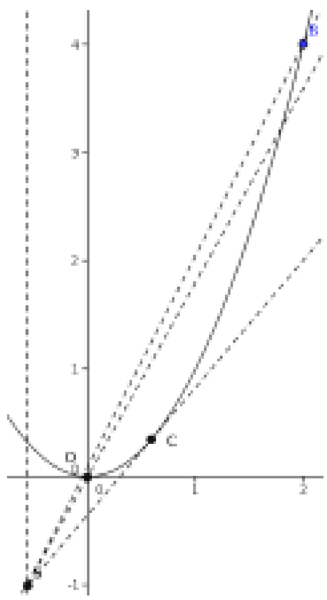
Troviamo il punto di sostegno del fascio

$$\left(2\sqrt{3}t + 5y + 7\right) + k(-y-1) = 0$$

da cui

$$\begin{cases} t = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -1 \end{cases}$$

Rappresentiamo graficamente il sistema



La retta parallela all'asse y non è presente nel fascio di rette, avendo coefficiente angolare non definito; ciò si ha quando $5-k=0$, cioè $k=5$.

La retta passante per $O(0;0)$ dà $k=7$ e interseca la parabola in due punti

Troviamo la retta tangente in C, applicando la condizione di tangenza alla equazione $(5-k)t^2 + 2\sqrt{3}t + 7 - k = 0$, $\Delta = 0$

$$\Delta = 3 - \left(35 - 12k + k^2\right) = 0$$

risolvendo si hanno le due soluzioni

$$k_{1,2} = 6 \pm 2$$

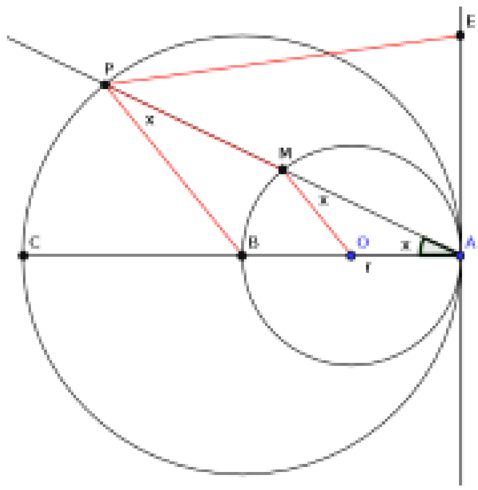
prendiamo in considerazione solo il valore $k=8$, che rende il coefficiente angolare della retta tangente positivo.

Riassumendo, avremo quindi le seguenti soluzioni

$$1\,soluz \quad per \quad 5 \le k < 7$$
$$2\,soluz \quad per \quad 7 \le k \le 8$$

PROBLEMA 8. Due circonferenze di raggi r e $2r$ sono tangenti internamente nel punto A. Siano O il centro della circonferenza di raggio minore e AB il suo diametro. Detto E il punto sulla tangente in A tale che $\overline{AE} = 2r$, condurre dal punto A una semiretta che incontri la circonferenza minore nel punto M e la maggiore in P, con M e P posti dalla stessa parte di E rispetto alla retta AB, in modo che risulti

$$\overline{PM}^2 + \overline{PE}^2 = k\left(\overline{OM}^2 + \overline{PB}^2\right)$$



SOLUZIONE. I segmenti PB e OM sono tra loro paralleli, perché i triangoli ABP eAOM sono simili, essendo entrambi isosceli e avendo l'angolo alla base $BAM = BAP$ in comune. Poniamo l'angolo $O\widehat{A}M = x$. Il punto E può stare in un solo semipiano delimitato dal diametro AC e quindi, l'intervallo di variazione dell'incognita sarà $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Se $x = 0$, allora $M \equiv B$, $P \equiv C$, $PM = PB = 2r$, $PE = \sqrt{16r^2 + 4r^2} = 2r\sqrt{5}$, $OM = r$, quindi $4r^2 + 20r^2 = k\left(r^2 + 4r^2\right)$, da cui $k = \frac{24}{5}$

Se $x = \frac{\pi}{2}$, allora $P \equiv M \equiv A$, $PM = 0$, $PB = 2r$, $OM = r$, $PE = 2r$, quindi $4r^2 = k\left(r^2 + 4r^2\right)$, da cui $k = \frac{4}{5}$.

Ricaviamo ora la misura dei segmenti indicati. Applicando il teorema della corda, ricaviamo AM

$$PM = AM = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2r\cos x$$

(essendo $AB = 2OA$, per la similitudine dei triangoli ABP eAOM, anche $AP = 2PM$ e quindi $PM = AM$). Calcoliamo PE applicando il teorema di Carnot al triangolo PEA.

$$PE^2 = 16r^2\cos^2 x + 4r^2 - 16r^2 \sin x \cos x$$

La relazione cercata sarà

$$4r^2\cos^2 x + 16r^2\cos^2 x + 4r^2 - 16r^2 \sin x \cos x = k\left(r^2 + 4r^2\right)$$

svolgendo e sommando i termini simili, si ha

$$20\cos^2 x + -16\sin x \cos x + (4 - 5k) = 0$$

applicando le formule goniometriche si ha

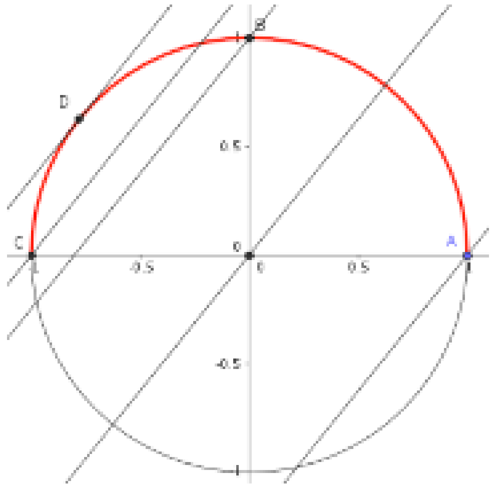
$$20\frac{\cos 2x + 1}{2} - 8\sin 2x + 4 - 5k = 0$$

$$10\cos 2x - 8\sin 2x + 14 - 5k = 0$$

Questa è una equazione lineare nelle incognite $\cos 2x = X \ \sin 2x = Y$ e possiamo risolvere graficamente mediante il sistema

$$\begin{cases} 10X - 8Y + 14 - 5k = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

la prima equazione rappresenta un fascio improprio di rette di coefficiente angolare $m = -1$ e quindi parallele alla bisettrice del II e IV quadrante.



Per la retta passante per $C(-1;0)$ si ha $-10+14 = 5k$, da cui $k = \frac{4}{5}$
Per la retta passante per $A(1;0)$ si ha $10+14 = 5k$, da cui $k = \frac{24}{5}$
Determiniamo la retta tangente attraverso la distanza della retta dal centro

$$1 = \frac{|14-5k|}{\sqrt{100+64}}$$

da cui $\sqrt{164} = |14-5k|$, elevando al quadrato si ha $25k^2 - 140k + 32 = 0$ e considerando solo la retta tangente nel 2° quadrante

$$k = \frac{70 - 10\sqrt{41}}{25} = \frac{14 - 2\sqrt{41}}{5}$$

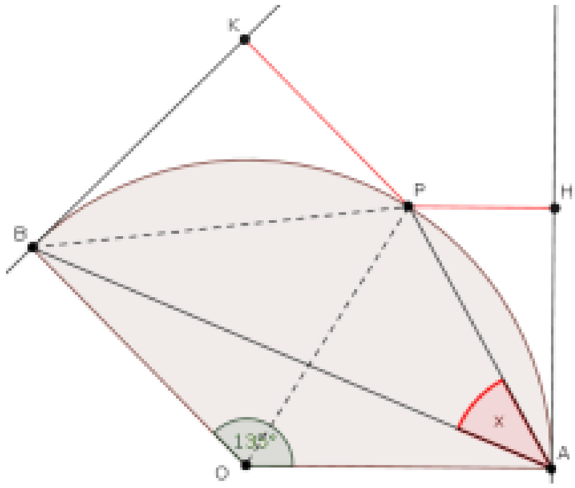
Le soluzioni saranno quindi

$$\begin{array}{ll} 1\,soluz \quad per & \frac{4}{5} < k \le \frac{16}{5} \\ 2\,soluz \quad per & \frac{14-2\sqrt{41}}{5} \le k \le \frac{4}{5} \end{array}$$

Problema 9. Sia $AOB = \frac{3}{4}\pi$ un settore circolare di raggio $\overline{OA} = r$. sull'arco AB considerare un punto P in modo che risulti

$$\overline{PH} + \overline{PK} = kr$$

con $k \in \mathbb{R}_0^+$, essendo PH e PK le distanze di P dalle tangenti in A e B sull'arco AB.



Soluzione. Il triangolo AOB è un triangolo isoscele con angoli alla base di $\frac{\pi}{8}$.
Poniamo $P\widehat{A}B = x$. Il punto P deve stare sull'arco AB e quindi
Se $P \equiv B$, allora $K \equiv B$ e $PK = 0$ e $x = 0$
Se $P \equiv A$, allora $H \equiv A$ e $PH = 0$ con $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3}{8}\pi$.
La variazione dell'incognita sarà nell'intervallo $0 \le x \le \frac{3}{8}\pi$.

L'angolo $P\widehat{A}O = \frac{\pi}{8} + x$; la corda AP sottende l'angolo al centro $A\widehat{O}P = \pi - 2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{3}{4}\pi - 2x$. Per il teorema della corda avremo

$$AP = 2r\sin\left(\frac{3}{8}\pi - x\right)$$

Essendo il triangolo AHP rettangolo, possiamo ricavare

$$PH = AP\sin\left(P\widehat{A}H\right) = 2r\sin^2\left(\frac{3}{8}\pi - x\right)$$

L'angolo $P\widehat{O}B = \frac{3}{4}\pi - \left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 2x$; la corda AP. L'angolo $O\widehat{B}P = \frac{\pi - 2x}{2} = \frac{\pi}{2} - x$; l'angolo $P\widehat{B}K = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + x = x$. Per il teorema della corda avremo

$$PB = 2r\sin x$$

Essendo il triangolo BKP rettangolo, possiamo ricavare

$$PK = BP\sin\left(P\widehat{B}K\right) = 2r\sin^2 x$$

La relazione cercata è

$$2\sin^2\left(\frac{3}{8}\pi - x\right) + 2\sin^2 x - k = 0$$

svolgendo e ricordando che $\sin^2\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ e $\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, si ottiene

$$2\left[\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)\cos^2 x + \left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)\sin^2 x - \left(2\cdot\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}{4}\right)\sin x\cos x\right] + 2\sin^2 x - k = 0$$

raccogliendo i termini simili e sostituendo $k = k\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)$, si ha

$$\left(6 - \sqrt{2} - 2k\right)\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x + \left(2 + \sqrt{2} - 2k\right)\cos^2 x = 0$$

dividiamo per $\cos^2 x$, ottenendo

$$\left(6 - \sqrt{2} - 2k\right)\tan^2 x - 2\sqrt{2}\tan x + \left(2 + \sqrt{2} - 2k\right) = 0$$

applichiamo la sostituzione di variabile $\tan x = t$, dove $0 \leq t \leq \left(\sqrt{2}+1\right)$

$$\left(6-\sqrt{2}-2k\right)t^2 - 2\sqrt{2}t + \left(2+\sqrt{2}-2k\right) = 0$$

per studiare tale equazione parametrica, poniamo $y = t^2$, ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} y = t^2 \\ \left(6-\sqrt{2}-2k\right)y - 2\sqrt{2}t + \left(2+\sqrt{2}-2k\right) = 0 \end{cases}$$

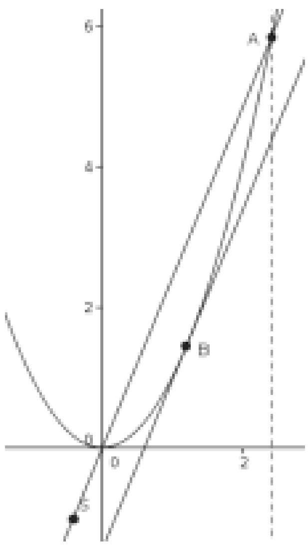
che studiamo graficamente come l'intersezione tra una parabola e un fascio proprio di rette.

Determiniamo il punto di sostegno di tale fascio, individuando la seguente combinazione lineare

$$\left[\left(6-\sqrt{2}\right)y - 2\sqrt{2}t + \left(2+\sqrt{2}\right)\right] + k(-2y-2) = 0$$

per cui, eguagliando a zero i due polinomi, si ottiene $S\left(1-\sqrt{2};-1\right)$.

Consideriamo il ramo di parabola tale che $0 \leq t \leq \left(\sqrt{2}+1\right)$. Gli estremi di tale arco di parabola saranno $O(0;0)$ e $A\left(\sqrt{2}+1;3+2\sqrt{2}\right)$. La retta AO ha coefficiente angolare $m = \sqrt{2}+1$ e $q = 0$ ed equazione $y = \left(\sqrt{2}+1\right)x$. Il punto S, sostegno del fascio appartiene a tale retta; infatti $-1 = \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = -1$.



Per la retta passante per A e O, avremo $0-0+2+\sqrt{2} = 2k$, da cui $k = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Determiniamo il valore di k per la retta tangente, imponendo la condizione di tangenza, $\Delta = 0$, alla retta $\left[\left(6-\sqrt{2}\right)y - 2\sqrt{2}t + \left(2+\sqrt{2}\right)\right] + k(-2y-2) = 0$. Avremo

$$\frac{\Delta}{4} = 2 - \left(6-\sqrt{2}-2k\right)\left(2+\sqrt{2}-2k\right) = 0$$

risolvendo

$$k^2 - 4k + 2 + \sqrt{2} = 0$$

da cui

$$k = 2 \pm \sqrt{4-2-\sqrt{2}}$$

e considerando soltanto la retta con coefficiente angolare positivo

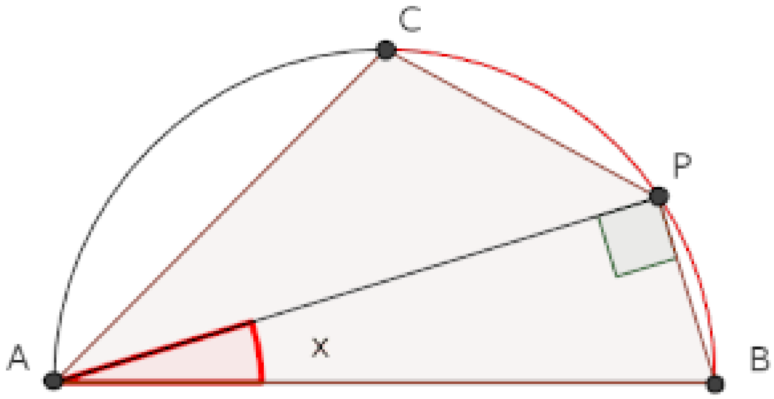
$$k = 2 - \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Le soluzioni saranno sempre:

$$2\,soluz \quad per \quad 2-\sqrt{2-\sqrt{2}} \le k \le \frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

Problema 10. Data la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2r$, indicare con C il punto medio dell'arco AB e considerare sull'arco BC un punto P. Posto $B\widehat{A}P=x$, calcolare l'area del quadrilatero $ABPC$ e tracciare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{AB\cdot AP}{Area\,(ABPC)}$$



Soluzione. Variazione dell'angolo di ampiezza x: $0\le x\le\frac{\pi}{4}$, dovendo P muoversi solo sull'arco BC.

Se $x=0$, allora $P\equiv B$ e $A_{ABPC}\equiv A_{ABC}=2r^2$

Se $x=\frac{\pi}{4}$, allora $P\equiv C$ e $A_{ABPC}\equiv A_{ABC}=2r^2$

La corda $AP=2r\cos x$ (il triangolo APB è, infatti, rettangolo, essendo inscritto in una semicirconferenza); calcoliamo l'area del triangolo APB

$$A_{APB}=\frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cos x\cdot\sin x=2r^2\sin x\cos x$$

Essendo C il punto medio della semicirconferenza, la corda AC è il lato del quadrato inscritto $AC=r\sqrt{2}$. Calcoliamo quindi l'area del triangolo ACP:

$$A_{ACP}=\frac{1}{2}\cdot r\sqrt{2}\cdot 2r\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=r^2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

L'area del quadrilatero sarà allora la somma delle aree dei due triangoli

$$A_{ABPC}=2r^2\sin x\cos x+r^2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

La funzione sarà allora espressa da

$$f(x)=\frac{AB\cdot AP}{Area\,(ABPC)}=\frac{2r\cdot 2r\cos x}{2r^2\sin x\cos x+r^2\sqrt{2}\cos x\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}=\frac{4\cos x}{\cos x\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+2\sin x\right)}$$

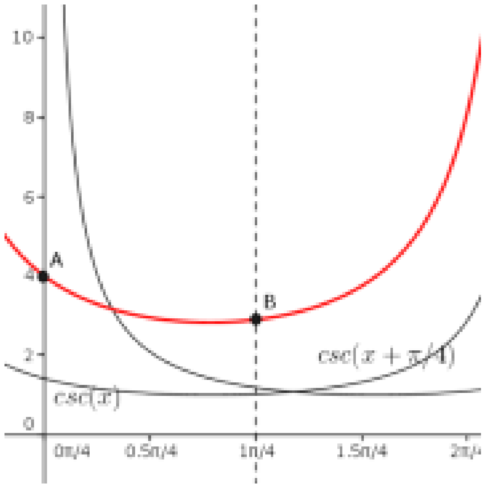
$$f(x)=\left(\frac{4}{\sqrt{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\sqrt{2}\sin x\right)}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

Ricordando che $\csc x=\frac{1}{\sin x}$, si tratta di rappresentare graficamente la funzione

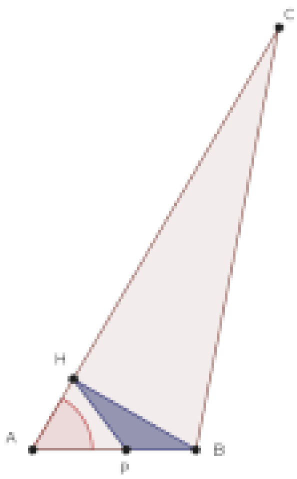
$$f(x)=2\sqrt{2}\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

L'angolo $x+\frac{\pi}{4}$ descrive una traslazione verso sinistra della funzione di base $\csc x$ e il fattore moltiplicativo una dilatazione verticale.

Il grafico mostra la funzione nell'intervallo di variazione dell'incognita.



PROBLEMA 11. Nel triangolo ABC si ha $\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=3a$, $\overline{BC}=a\sqrt{7}$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}C$. Determinare, infine, sul lato AB un punto P tale che, detta H la proiezione di B su AC risulti uguale a $ka\sqrt{3}$ $(k\in\mathbb{R}_0^+)$ il perimetro del triangolo PBH.



SOLUZIONE. Troviamo prima l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}C$ mediante il teorema di Carnot; da $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos B\widehat{A}C$, si ha

$$B\widehat{A}C=\arccos\left(\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}\right)=\arccos\left(\frac{a^2+9a^2-7a^2}{6a^2}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$

Il triangolo ABH è allora la metà di un triangolo equilatero di lato $AB=a$. Poniamo $B\widehat{H}P=x$; il segmento BH non varia in quanto altezza relativa al lato AC e quindi l'angolo incognito varierà tra $0\le x\le\frac{\pi}{2}$.

Se $x=0$, allora il perimetro del triangolo BHP è uguale alla lunghezza del segmento BH, cioè $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Se $x=\frac{\pi}{2}$, allora il triangolo BPH coincide con il triangolo BAH e il suo perimetro è $a+\frac{1}{2}a+\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}a+\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Calcoliamo l'ampiezza degli angoli del triangolo PAM; $A\widehat{H}P = \frac{\pi}{2} - x$; $A\widehat{P}H = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + x$; di conseguenza $B\widehat{P}H = \frac{5\pi}{6} - x$; $P\widehat{B}H = \frac{\pi}{6}$.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo BPH, avremo

$$\frac{BP}{\sin x} = \frac{BH}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)}$$

da cui

$$BP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{\sin x}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)}$$

Analogamente

$$\frac{PH}{\frac{1}{2}} = \frac{BH}{\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)}$$

da cui

$$PH = \frac{a\sqrt{3}}{4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)}$$

Il perimetro sarà

$$2p_{BPH} = \frac{a\sqrt{3}\sin x}{2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)} + \frac{a\sqrt{3}}{4\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)} + \frac{a\sqrt{3}}{2} = ak\sqrt{3}$$

La relazione sarà

$$\begin{aligned} 2\sin x + 1 + 2\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) - 4k\sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right) &= 0 \\ 2\sin x + 1 + 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) - 4k\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) &= 0 \end{aligned}$$

svolgendo

$$(1-2k)\cos x + \left(\sqrt{3} + 2 - 2k\sqrt{3}\right)\sin x + 1 = 0$$

Questa è una equazione lineare nelle incognite $\cos x = X$ $\sin x = Y$ e possiamo risolvere graficamente mediante il sistema con $0 \le X \le 1$

$$\begin{cases} (1-2k)X + \left(\sqrt{3} + 2 - 2k\sqrt{3}\right)Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

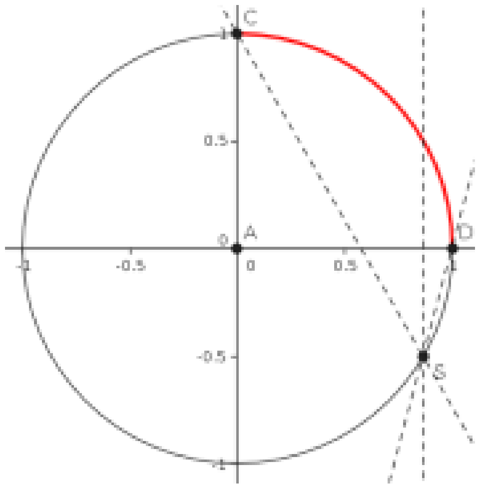
troviamo il punto di sostegno del fascio

$$\left[X + \left(\sqrt{3} + 2\right)Y + 1\right] + k\left(-2X - 2\sqrt{3}Y\right) = 0$$

Avremo

$$\begin{cases} X = -\sqrt{3}Y \\ -\sqrt{3}Y + \sqrt{3}Y + 2Y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Il punto $S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ appartiene alla circonferenza. Rappresentiamo graficamente la circonferenza goniometrica e il fascio di rette

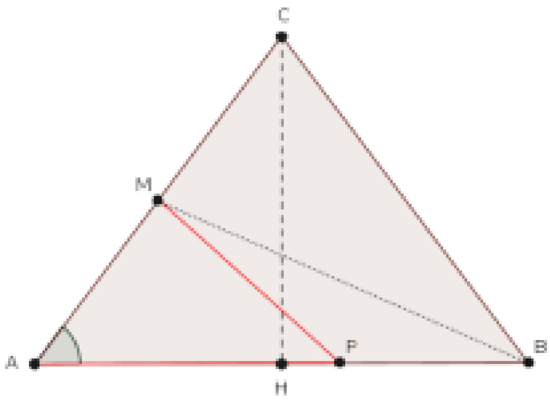


Avremo sempre una soluzione.
Per la retta passante per $C(0;1)$, si ha $\sqrt{3}+2-2k\sqrt{3}+1=0$, da cui $k=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
Per la retta passante per $D(1;0)$, si ha $1-2k+1=0$, da cui $k=1$.
Pertanto avremo

$$1\,soluz \quad per \quad 1\leq k\leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Problema 12. È dato il triangolo isoscele ABC in cui l'altezza relativa alla base $AB=4a$ e $\sin B\widehat{A}C=\frac{4}{5}$. Calcolare il perimetro del triangolo. Determinare, quindi, sulla base AB un punto P tale che, indicato con M il punto medio di AC risulti

$$\overline{AP}^2-\overline{PM}^2=k\overline{AM}^2 \qquad (k\in\mathbb{R})$$



Soluzione. Il perimetro si calcola applicando i teoremi dei triangoli rettangoli al triangolo AHC. Per cui

$$AC=\frac{AH}{\cos\widehat{A}}=\frac{2a}{\frac{4}{5}}=\frac{10}{3}a$$

il perimetro sarà quindi $2p=2AC+AB=\frac{20}{3}a+4a=\frac{32}{3}a$.

Per risolvere ora il problema, poniamo $A\widehat{M}P=x$. L'intervallo di variazione sarà $0\leq x\leq\gamma$, dove γ è l'angolo $A\widehat{M}B$. Per stabilire l'estremo superiore di tale intervallo, calcoliamo prima la mediana MB, applicando il teorema di Carnot al triangolo AMB

$$MB^2=16a^2+\frac{25}{9}a^2-2\times 4a\times\frac{5}{3}a\times\left(\frac{3}{5}\right)=16a^2+\frac{25}{9}a^2-8a^2=\frac{97}{9}a^2$$

$(\cos\widehat{A} = \sqrt{1-\sin^2\widehat{A}} = \frac{3}{5})$.

Applichiamo ora il teorema dei seni allo stesso triangolo per ricavare l'angolo $A\widehat{M}B$.

$$\frac{MB}{\sin\widehat{A}} = \frac{AB}{\sin A\widehat{M}B}$$

da cui

$$\sin A\widehat{M}B = \sin\gamma = \frac{AB\sin\widehat{A}}{MB} = \frac{4a\times\frac{4}{5}}{\frac{a\sqrt{97}}{3}} = \frac{48}{5\sqrt{97}}$$

Esprimiamo ora la relazione indicata in funzione dell'incognita x. Calcoliamo le lunghezze dei segmenti AP e PM, applicando ancora il teorema dei seni

$$\frac{AP}{\sin x} = \frac{AM}{\sin A\widehat{P}M} \qquad AP = \frac{\frac{5}{3}a\sin x}{\sin\left[\pi-\left(x+\widehat{A}\right)\right]} = \frac{5a\sin x}{3\sin\left(x+\widehat{A}\right)}$$

$$\frac{PM}{\sin\widehat{A}} = \frac{AM}{\sin A\widehat{P}M} \qquad PM = \frac{\frac{5}{3}a\times\frac{4}{5}}{\sin\left[\pi-\left(x+\widehat{A}\right)\right]} = \frac{4a}{3\sin\left(x+\widehat{A}\right)}$$

La relazione richiesta è pertanto, essendo $\sin\left(x+\widehat{A}\right) = \left(\sin x\cos\widehat{A}+\cos x\sin\widehat{A}\right) = \frac{1}{5}(3\sin x+4\cos x)$

$$\frac{25\sin^2 x}{\sin^2\left(x+\widehat{A}\right)} - \frac{16}{\sin^2\left(x+\widehat{A}\right)} = \frac{25}{9}ka^2$$

da cui,

$$\frac{25\sin^2 x}{\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)^2}^2 - \frac{16}{\frac{1}{25}(3\sin x+4\cos x)^2} = 25k$$

e svolgendo,

$$25\sin^2 x-16 = k\left(9\sin^2 x+16\cos^2 x+24\sin x\cos x\right)$$
$$(9k-25)\sin^2 x+16k\cos^2 x+24k\sin x\cos x+16 = 0$$

questa equazione è riconducibili ad una omogenea di 2° grado

$$(9k-25)\sin^2 x+16k\cos^2 x+24k\sin x\cos x+16\sin^2 x+16\cos^2 x = 0$$

da cui, sommando i termini simili, si ottiene

$$9(k-1)\sin^2 x+24k\sin x\cos x+16(k+1)\cos^2 x = 0$$

Dividiamo per $\cos^2 x$; otterremo

$$9(k-1)\tan^2 x+24k\tan x+16(k+1) = 0$$

poniamo $t = \tan x$, avremo

$$9(k-1)t^2+24kt+16(k+1) = 0$$

l'equazione parametrica può essere studiata, ponendo ulteriormente $y = t^2$, mediante il sistema

$$\begin{cases} y = t^2 \\ 9(k-1)y+24kt+16(k+1) = 0 \\ 0 \le t \le \frac{48}{11} \end{cases}$$

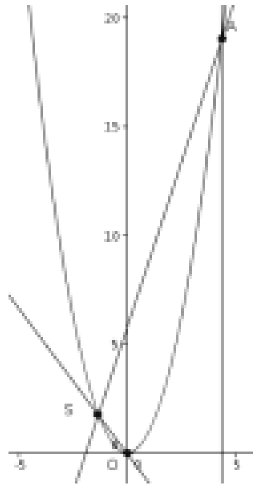
la prima è l'equazione di una parabola con vertice nell'origine, la seconda un fascio proprio di rette: Cerchiamo il punto di sostegno, riscrivendola sotto forma di combinazione lineare

$$(-9y+16)+k(9y+24t+16) = 0$$

da cui si ottiene

$$S\begin{cases} t = -\frac{4}{3} \\ y = \frac{16}{9} \end{cases}$$

rappresentiamo graficamente

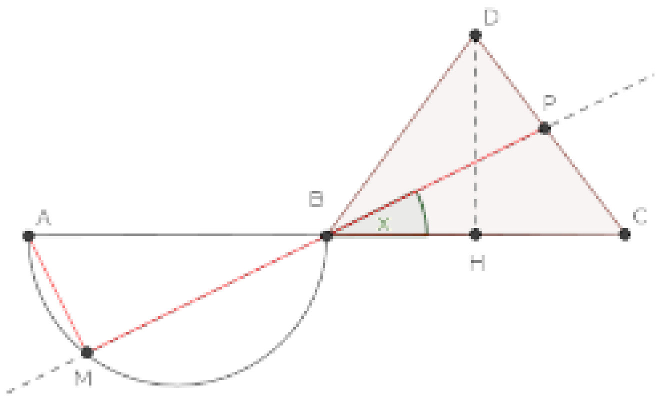


Per la retta passante per $O(0;0)$ si ha $k=-1$

Per la retta passante per $A\left(\frac{48}{11};\frac{2304}{121}\right)$ si ha $9(k-1)\times\frac{2304}{121}+24k\times\frac{48}{11}+16(k+1)=0$, cioè $\frac{20736}{121}k-\frac{20736}{121}+\frac{1152}{11}k+16k+16=0$da cui $k=\frac{25}{47}$. Avremo pertanto 1 soluzione per $0\leq k\leq\frac{25}{47}$.

PROBLEMA 13. Sia B il punto medio del segmento $\overline{AC}=4l$. Costruire la semicirconferenza di diametro AB e il triangolo BCD, isoscele sulla base BC e avente altezza $\widehat{DH}=\frac{4}{3}l$ in semipiani opposti rispetto alla retta AC. Determinare poi una retta s passante per B che incontri la semicirconferenza in M e il lato DC in P in modo che risulti

$$\overline{AM}+\overline{BM}=k\overline{BP} \qquad \left(k\in\mathbb{R}_0^+\right)$$



SOLUZIONE. Posto l'angolo $C\widehat{B}P=x$, l'intervallo di variazione sarà $0\leq x\leq\gamma$, dove $\gamma=C\widehat{B}D$. Quando $x=0$, $M\equiv A$ e $P\equiv B$; quando $x=\gamma$, allora $P\equiv D$. Non è ammissibile un angolo superiore in quanto la retta non incontrerà più il triangolo isoscele. L'angolo γ può essere specificato attraverso il valore della sua tangente; infatti, per il secondo teorema dei triangoli rettangoli $\frac{DH}{BH}=\tan\gamma$, cioè $\tan\gamma=\frac{4}{3}$.

Dalla figura è immediato ricavare che $A\widehat{B}M=x$, perché angoli opposti al vertice. Possiamo quindi calcolare la lunghezza della corda $AM=2l\sin x$ e della corda $BM=2l\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2l\cos x$ (il triangolo AMB è rettangolo, essendo inscritto in una semicirconferenza). Ora, l'angolo $B\widehat{P}C=\pi-\left(x+\widehat{C}\right)$ e l'angolo $\widehat{C}=\widehat{B}=C\widehat{B}D=\gamma$. Se $\tan\gamma=\frac{4}{3}$, allora $\sin\gamma=\frac{4}{5}$ e $\cos\gamma=\frac{3}{5}$ (applicando le formule goniometriche). Applichiamo ora il teorema dei seni al triangolo BPC, avremo

$$\frac{BC}{\sin B\widehat{P}C}=\frac{BP}{\sin\gamma}$$

sostituendo

$$BP = \frac{2l \times \frac{4}{5}}{\sin\left[\pi - (x+\gamma)\right]} = \frac{8l}{5\sin(x+\gamma)} = \frac{8l}{3\sin x + 4\cos x}$$

La relazione richiesta sarà, dividendo per $2l$,

$$\sin x + \cos x = \frac{4k}{3\sin x + 4\cos x}$$

svolgendo, si ottiene

$$3\sin^2 x + 7\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 4k = 0$$

equazione riconducibile a omogenea

$$3\sin^2 x + 7\sin x\cos x + 4\cos^2 x - 4k\sin^2 x - 4k\cos^2 x = 0$$

sommando i termini simili

$$(3-4k)\sin^2 x + 7\sin x\cos x + 4(1-k)\cos^2 x = 0$$

da cui, dividendo

$$(3-4k)\tan^2 x + 7\tan x + 4(1-k) = 0$$

Poniamo $\tan x = t$ con $0 \le t \le \frac{4}{3}$

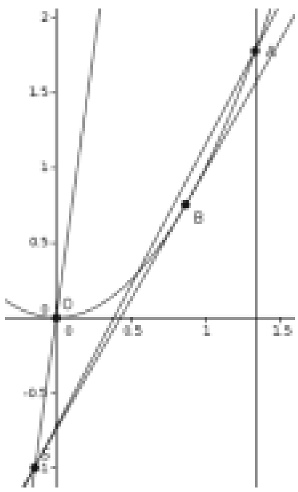
$$(3-4k)t^2 + 7t + 4(1-k) = 0$$

Si può discutere questa equazione parametrica, ponendo $y = t^2$ e studiando le intersezioni tra un ramo di parabola e un fascio di rette proprio.

$$\begin{cases} y = t^2 \\ (3-4k)y + 7t + 4(1-k) = 0 \\ 0 \le t \le \frac{4}{3} \end{cases}$$

Calcoliamo il punto di sostegno del fascio, riscrivendo $3y - 4ky + 7t + 4 - 4k = 0$ e raggruppando $(3y + 7t + 4) + k(-4y - 4) = 0$ da cui

$$\begin{cases} t = -\frac{1}{7} \\ y = -1 \end{cases}$$



Per la retta passante per $O(0;0)$ si ha $k = 1$

Per la retta passante per $B\left(\frac{4}{3}; \frac{16}{9}\right)$ si ha $(3-4k)\frac{16}{9} + 7 \cdot \frac{4}{3} + 4(1-k) = 0$ da cui $k = \frac{42}{25}$

Determiniamo le condizioni per la retta tangente

$$\Delta = 49 - 16(3-4k)(1-k) = 0$$

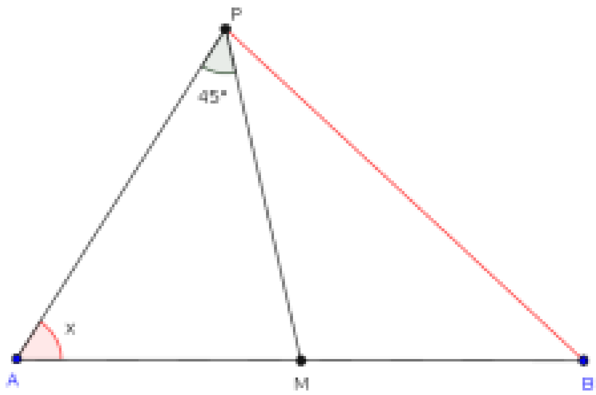
da cui

$$64k^2 - 112k - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono $k=\frac{7\pm5\sqrt{2}}{8}$. Nel nostro caso dovremo tenere conto solo della tangente per $k=\frac{7+5\sqrt{2}}{8}$ e le soluzioni saranno

$$\begin{aligned} 1\,soluz \quad per \quad & 1\le k<\frac{42}{25} \\ 2\,soluz \quad per \quad & \frac{42}{25}\le k\le\frac{7+5\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Problema 14. Siano $\overline{AB}=4l$ la lunghezza del segmento AB e M il suo punto medio. Considerare su uno dei due semipiani individuati dalla retta AB un punto P in modo che $A\widehat{P}M=\frac{\pi}{4}$ e in modo che risulti $\overline{PB}^2=4hl^2$ $(k\in\mathbb{R}^+)$.



Soluzione. Poniamo $P\widehat{A}M=x$; allora l'angolo $A\widehat{M}P=\frac{3}{4}\pi-x$; e avremo come condizioni $0<x<\frac{3}{4}\pi$.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo APM, avremo

$$\frac{AP}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)}=\frac{AM}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

da cui

$$AP=\frac{2l\sin\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2\sqrt{2}l\sin\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)=2\sqrt{2}l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=2l\left(\cos x+\sin x\right)$$

Applichiamo il teorema di Carnot al triangolo BAP, avremo

$$PB^2=AP^2+AB^2-2\cdot AP\cdot AB\cdot\cos x=4l^2\left(\cos x+\sin x\right)^2+16l^2-2\cdot 2l\left(\cos x+\sin x\right)\cdot 4l\cdot\cos x$$

da cui si ricava

$$PB^2=4l^2\left(1+2\sin x\cos x\right)+16l^2-16l^2\cos^2 x-16l^2\sin x\cos x=20l^2-8l^2\sin x\cos x-16l^2\cos^2 x$$

La relazione richiesta diviene

$$20l^2-8l^2\sin x\cos x-16l^2\cos^2 x=4kl$$

cioè

$$5-2\sin x\cos x-4\cos^2 x-k=0$$

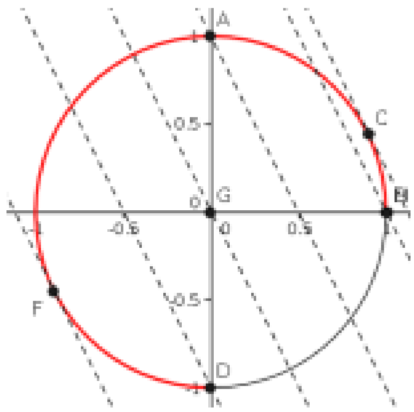
applichiamo le formule goniometriche per ottenere

$$5-\sin 2x-2\left(1+\cos 2x\right)-k=0$$

Poniamo $\sin 2x = Y$ e $\cos 2x = X$ con $0 < 2x < \frac{3}{2}\pi$. Possiamo risolvere impostando il sistema

$$\begin{cases} 2X + Y + k - 3 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \\ 0 < 2x < \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

Risolviamo graficamente



Con la retta passante per $A(0;1)$ si ha $k = 2$; con la retta passante per $B(1:0)$ si ha $k = 1$.

Con la retta passante per $D(0;-1)$ si ha $k = k = 4$. Determiniamo le due tangenti che distano dal centro la lunghezza del raggio

$$1 = \frac{|k-3|}{\sqrt{5}}$$

da cui

$$k^2 - 6k + 4 = 0$$

le cui soluzioni sono $k = 3 \pm \sqrt{5}$.

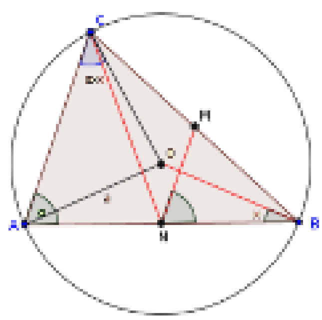
Avremo quindi

$$\begin{aligned} &1\,soluz \quad per \quad 1 < k < 4 \\ &2\,soluz \quad per \quad k \in \left[3 - \sqrt{5}; 1\right] \cup \left[4; 3 + \sqrt{5}\right] \end{aligned}$$

Problema 15. Sia O il circocentro di un triangolo acutangolo ABC di cui si conoscono $B\hat{A}C = \alpha$ e $\overline{OA} = a$. Sapendo che $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, determinare le ampiezze degli angoli del triangolo in modo che sia

$$\overline{MN}^2 + \overline{NC}^2 = k\overline{OB}^2$$

con $k \in \mathbb{R}_0^+$, essendo M e N i punti medi dei lati AC e AB rispettivamente.



Soluzione. Il segmento MN è parallelo al lato AC, per il th che afferma che se in un triangolo si congiungono i punti medi dei due lati, tale congiungente è parallela al terzo lato. Inoltre, per il th. del fascio di rette parallele tagliate da trasversali, si avrà che $\overline{AC} = 2\overline{MN}$. Il triangolo $A\hat{O}B$ è isoscele (OA e OB, sono infatti raggi della crf); poniamo, pertanto, $O\hat{B}A = O\hat{A}B = x$ con $0 < x < \alpha$.

Applicando il th. delle corde, si ottiene $\overline{BC} = 2a\sin\alpha$ e il th dei triangoli rettangoli al triangolo ONB, si ha $\overline{NB} = a\cos x$, per cui $\overline{AB} = 2a\cos x$.

Anche il triangolo AOC è isoscele, per cui, avendo gli angoli alla base uguali, possiamo scrivere $\overline{AC} = 2a\cos(\alpha - x) = 2a(\cos x\cos\alpha + \sin x\sin\alpha) = 2a\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right)$.

Per il teorema prima ricordato MN sarà la metà di AC, cioè $\overline{MN} = a\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x\right)$. Esprimiamo ora la mediana NC in funzione d x, utilizzando il teorema di Carnot (o dei coseni) al triangolo ANC, cioè $\overline{NC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AN}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{AN}\cos\alpha$

$$\overline{NC}^2 = \frac{4a^2}{5}(2\cos x + \sin x)^2 + a^2\cos^2 x - \frac{4a}{\sqrt{5}}(2\cos x + \sin x)\cdot a\cos x \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Impostiamo ora l'equazione risolvente $\overline{MN}^2 + \overline{NC}^2 = k\overline{OB}^2$

$$\frac{a^2}{5}(2\cos x + \sin x)^2 + \frac{4a^2}{5}(2\cos x + \sin x)^2 + a^2\cos^2 x - \frac{8a^2}{5}(2\cos x + \sin x)\cdot\cos x = ka^2$$

dividiamo per a^2 che è sicuramente diverso da zero e moltiplichiamo per 5.

$$5(2\cos x + \sin x)^2 + 5\cos^2 x - 8(2\cos x + \sin x)\cdot\cos x = 5k$$

Svolgendo, si ottiene

$$20\cos^2 x + 5\sin^2 x + 20\sin x\cos x + 5\cos^2 x - 16\cos^2 x - 8\sin x\cos x = 5k$$

$$9\cos^2 x + 5\sin^2 x + 12\sin x\cos x - 5k = 0$$

Questa è un'equazione goniometrica riconducibile ad una equazione omogenea

$$9\cos^2 x + 5\sin^2 x + 12\sin x\cos x - 5k\cos^2 x - 5k\sin^2 x = 0$$

e raccogliendo

$$(9-5k)\cos^2 + 5(1-k)\sin^2 x + 12\sin x\cos x = 0$$

Dividiamo ora per $\cos^2 x$, posto diverso da zero e poniamo $\tan x = t$, con $0 < t < \frac{1}{2}$

$$5(1-k)t^2 + 12t + (9-5k) = 0$$

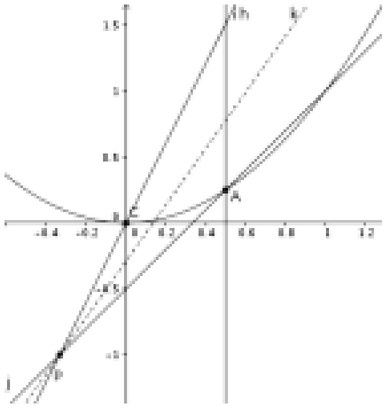
Consideriamo ora tale equazione parametrica come equazione risolvente del sistema

$$\begin{cases} y = t^2 \\ 5(1-k)y + 12t + (9-5k) = 0 \end{cases}$$

Possiamo risolvere tale sistema graficamente studiando l'intersezione tra una parabola e un fascio di rette. La parabola ha equazione $y = t^2$; il fascio ha equazione $5y - 5ky + 12t + 9 - 5k = 0$. Per determinare il punto di sostegno del fascio, riscriviamo l'equazione parametrica come

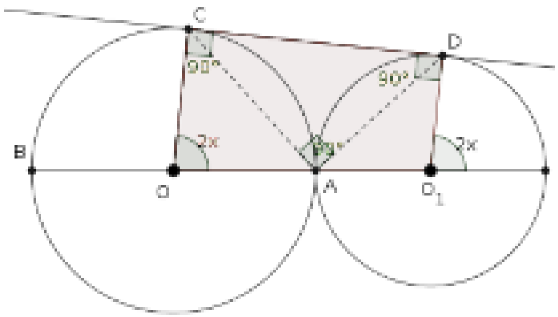
$$k(-5y-5) + (12t + 5y + 9) = 0$$

dalla quale si ricava $P\left(-\frac{1}{3}; -1\right)$. Considereremo, pertanto, le rette che da P intersecano la parabola nell'origine $(t = 0)$ e nel punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ (per $t = \frac{1}{2}$). La figura rappresenta graficamente la soluzione del problema



Quando la retta passa per l'origine $O(0,0)$ si ha $k=\frac{9}{5}$; quando la retta passa per il punto $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$ si ha $k=\frac{13}{5}$. Si avrà, pertanto una soluzione nell'intervallo $\frac{9}{5}<k<\frac{13}{5}$.

PROBLEMA 16. Data la circonferenza $\mathscr{C}$ di diametro $\overline{AB}=2r$ e centro O, condurre una circonferenza $\mathscr{C}_1$ di centro O_1 e tangente esternamente in A a $\mathscr{C}$. Condurre una delle due tangenti comuni alle due circonferenze, non passante A, e siano C e D i punti di tangenza rispettivamente con $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}_1$. Determinare l'angolo $C\hat{O}O_1=2x$ in modo che il perimetro del quadrilatero OO_1DC sia uguale a kr ($k\in\mathbb{R}_0^+$).



SOLUZIONE. L'angolo incognito è già indicato nel testo, per cui $C\hat{O}O_1=x$ con $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$. Proprietà geometriche della figura: I raggi OC e O_1D sono perpendicolari alla tangente comune CD. L'angolo $A\hat{C}D=x$, in quanto angolo alla crf sotteso dalla corda AB, essendo la metà del corrispondente angolo al centro $A\hat{O}C=2x$. Di conseguenza $A\hat{D}C=\frac{\pi}{2}-x$ e $ADO_1=x$. Il triangolo AO_1D è isoscele (AO_1 e DO_1 sono raggi), per cui $D\hat{A}O_1=x$.

Applicando il teorema della corda, ricaviamo $\overline{AC}=2r\sin x$ e applicando il teorema dei th. rettangoli al triangolo CAD, si ottiene $CD=\frac{AC}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{2r\sin x}{\cos x}=2r\tan x$. Il rapporto $\frac{AD}{AC}=\tan x$, da cui $AD=2r\sin x\tan x$.

Ora AD si può calcolare anche come $AD=2AO_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2AO_1\cos x$ e ciò consente di ottenere $AO_1=r\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=r\tan^2 x$

Possiamo ora calcolare il perimetro del trapezio rettangolo OO_1DC

$$2p=OA+AO_1++O_1D+CD+OC=r+r\tan^2 x+r\tan^2 x+2r\tan x+r=kr$$

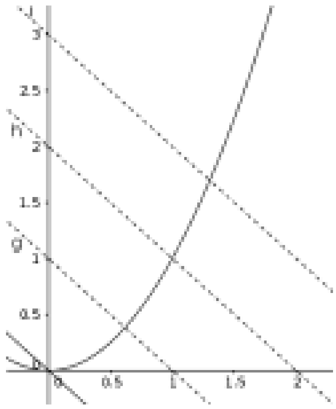
Svolgendo

$$2\tan^2 x+2\tan x+2-k=0$$

Poniamo $\tan x=t$ con $0\leq t<+\infty$. L'equazione parametrica può essere risolta graficamente, ponendo

$$\begin{cases} y=t^2 \\ 2y+2t+2-k=0 \end{cases}$$

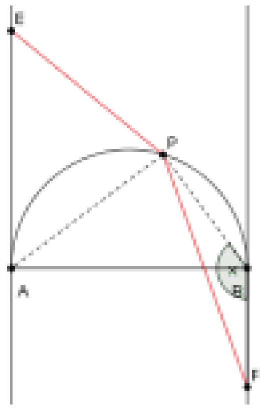
La prima equazione è rappresentata da una



Dal grafico risulta sempre una intersezione tra la parabola e il fascio di rette nell'intervallo indicato.

Quando la retta passa per l'origine $O(0,0)$, si ha $k=2$, per cui si avrà una soluzione per $k \geq 2$.

PROBLEMA 17. Considerata la semicirconferenza di diametro $\overline{AB}=2$ e le tangenti in A e B, prendere su di esse, da parte opposta rispetto alla retta AB, due punti E ed F (F dalla stessa parte della semicirconferenza) tali che $\overline{AE}=2$ e $\overline{BF}=1$. Determinare un punto P sulla semicirconferenza in modo che risulti massima la somma $\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$. Posto $P\hat{B}F=x$, si tracci la curva $y=\overline{PE}^2+\overline{PF}^2$.



SOLUZIONE. Posto $P\hat{B}F=x$, si osserva che quando il punto $P\equiv A$ l'angolo $P\hat{B}F=\frac{\pi}{2}$ e quando $P\equiv B$, l'angolo $P\hat{B}F=0$. Pertanto si avrà $0<x<\frac{\pi}{2}$. Sappiamo inoltre, dal testo, che $\overline{AE}=2$ e $\overline{BF}=1$.

Possiamo calcolare le corde PA e PB con il teorema delle corde: $PA=2\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-2\cos x$ e $PB=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin x$.

Calcoliamo ora i due segmenti PE e PF con il teorema di Carnot applicato rispettivamente ai triangoli APE e PBF. Osserviamo, inoltre, che $A\hat{B}P=x-\frac{\pi}{2}$, $P\hat{A}B=\frac{\pi}{2}-A\hat{B}P=\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{2}=\pi-x$ e $E\hat{A}P=\frac{\pi}{2}-\pi+x=x-\frac{\pi}{2}$. Avremo

$$PF^2=PB^2+BF^2-2PB\cdot BF\cdot\cos P\hat{B}F=4\sin^2 x+1-4\sin x\cos x$$

$$PE^2=AP^2+AE^2-2AP\cdot AE\cdot\cos E\hat{A}P=4\cos^2 x+4+8\cos x\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=4\cos^2 x+4+8\sin x\cos x$$

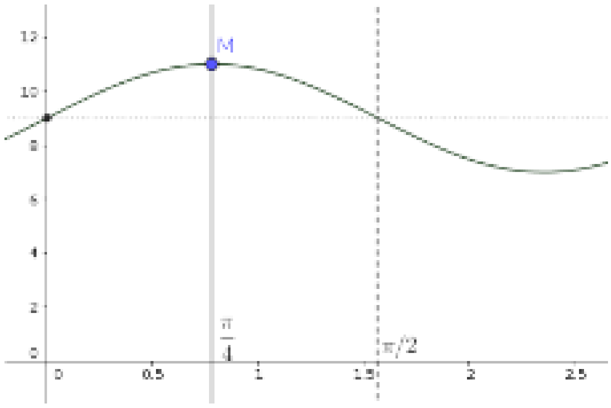
Scriviamo ora la funzione y:

$$y=4\sin^2 x+1-4\sin x\cos x+4\cos^2 x+4+8\sin x\cos x=4\sin^2 x+4\cos^2 x+4\sin x\cos x+5$$

Applicando la proprietà fondamentale della trigonometria, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, si ottiene

$$y = 4\sin x\cos x + 9 = 2\sin 2x + 9$$

Rappresentiamo ora la funzione y nell'intervallo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

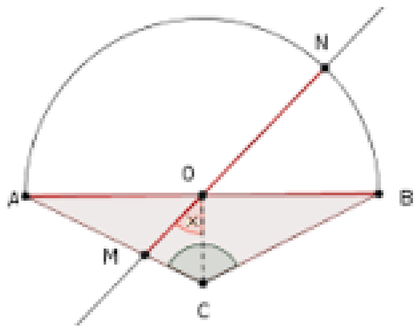


Il valore massimo della funzione si ha, nell'intervallo indicato, per $x = \frac{\pi}{4}$ e $f(x) = 11$.

Problema 18. Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, costruire il triangolo isoscele ABc di base AB, situato da parte opposta alla semicirconferenza rispetto alla retta AB e tale che $\cos A\hat{C}B = -\frac{3}{5}$. Dopo aver determinato gli elementi incogniti del triangolo, condurre per O una retta che incontri il lato AC in M e la semicirconferenza in N, in modo che risulti

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = k$$

con $k \in \mathbb{R}_0^+$



Soluzione: Applicando il teorema di Carnot al triangolo isoscele è possibile ricavare i due lati obliqui uguali.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos A\hat{C}B$$
$$4r^2 = 2AC^2 - 2AC \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$

da cui si ottiene $AC = BC = \frac{\sqrt{5}}{2}r$. Anche gli angoli alla base del triangolo isoscele sono uguali e la loro ampiezza è pari a

$$C\hat{A}B = C\hat{B}A = \frac{\pi - \hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

Per esprimere l'angolo $\hat{C}$, conoscendo il suo coseno, utilizziamo le formule goniometriche di bisezione

$$2\cos^2\frac{\hat{C}}{2} - 1 = -\frac{3}{5}$$

da cui si ricava che $\cos\frac{\hat{C}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\sin C\hat{A}B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cos\frac{\hat{C}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Possiamo ora esprimere anche gli angoli alla base attraverso le funzioni goniometriche.

$$\cos C\hat{A}B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \sin\frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Per esprimere il rapporto indicato, poniamo l'angolo $M\hat{O}C = x$ (vedi figura), con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. (Se $M \equiv C \Rightarrow x = 0$, se $M \equiv B \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$).

Pertanto, $OC = AC \cdot \sin C\hat{A}B = \frac{\sqrt{5}}{2} r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2} r$.

Per ottenere OM, esprimiamo l'angolo $O\hat{M}C = \pi - \left(\frac{\hat{C}}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\hat{C}}{2} + x\right)$. Applicando il teorema di Eulero, otteniamo

$$\frac{OC}{\sin O\hat{M}C} = \frac{OM}{\sin\frac{\hat{C}}{2}} \qquad \frac{\frac{r}{2}}{\sin\left(\frac{\hat{C}}{2} + x\right)} = \frac{OM}{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$OM = \frac{\frac{r}{\sqrt{5}}}{\sin\frac{\hat{C}}{2}\cos x + \cos\frac{\hat{C}}{2}\sin x} = \frac{\frac{r}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x} = \frac{r}{2\cos x + \sin x}$$

Ora, $MN = OM + ON = \frac{r}{2\cos x + \sin x} + r = \frac{r(1 + 2\cos x + \sin x)}{2\cos x + \sin x}$.

Il rapporto richiesto sarà, pertanto,

$$\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = k$$

$$\frac{r\,(1 + 2\cos x + \sin x)}{2\cos x + \sin x} \cdot \frac{1}{2r} = k$$

cioè

$$\frac{(1 + 2\cos x + \sin x)}{2\,(2\cos x + \sin x)} = k$$

Svolgendo, si ottiene

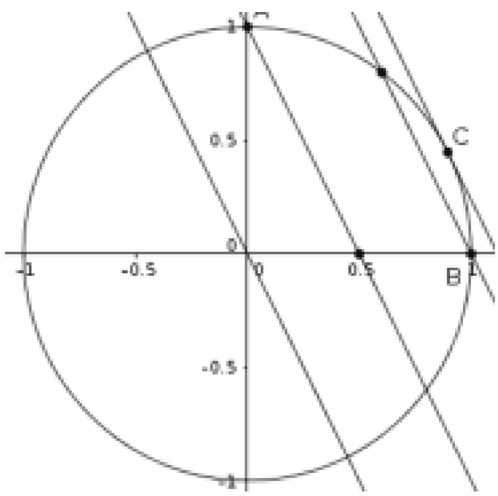
$$2\cos x\,(1 - 2k) + \sin x\,(1 - 2k) + 1 = 0$$

Ponendo $\cos x = X$ e $\sin x = X$ e studiando l'intersezione del fascio di rette con la circonferenza goniometrica, possiamo scrivere

$$\begin{cases} 2\,(1 - 2k)X + (1 - 2k)Y + 1 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

La prima equazione rappresenta un fascio di rette improprio $Y = -2x - \frac{1}{1-2k}$, cioè tutte le rette tra loro parallele con coefficiente angolare $m = -2$.

Lo studio delle soluzioni avviene attraverso l'intersezione della circonferenza con le rette nell'intervallo $0 \leq X \leq 1$ e $0 \leq Y \leq 1$.



Quando la retta passa per $A(0;1)$ si ha, sostituendo nel fascio, $k=1$; quando passa per $B(1;0)$ si ha $k=\frac{3}{4}$. Avremo pertanto $1\,soluzione$ nell'intervallo $\frac{3}{4}<k\leq 1$.

Determiniamo ora la condizione che caratterizza la retta tangente in C. Mediante sostituzione, ricaviamo l'equazione risolvente il sistema

$$X^2+4X^2+\frac{1}{1-2k}+\frac{4X}{1-2k}=1$$

Svolgendo i calcoli algebrici, si ottiene l'equazione di secondo grado (con $k\neq\frac{1}{2}$)

$$5(1-2k)^2X^2+4(1-2k)X-4k(k-1)=0$$

La condizione di tangenza $\Delta=0$, dà

$$(1-2k)^2\left(1+5k^2-5k\right)=0$$

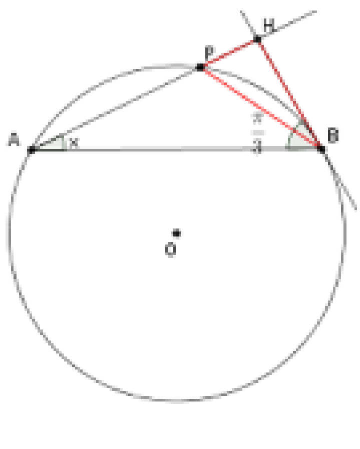
La soluzione $k=\frac{1}{2}$ non è accettabile, e avremo $k=\frac{5\pm\sqrt{5}}{10}$. La soluzione $k=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$ rappresenta una retta che non interseca la crf nell'intervallo indicato. Avremo, pertanto

$$2\,soluzioni per \qquad \frac{3}{4}\leq k\leq\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

Problema 19. Sia $\overline{AB}=r\sqrt{3}$ una corda della circonferenza di centro O e raggio r. Sull'arco minore AB considerare un punto P tale che la semiretta AP incontri in H la retta BH tangente alla circonferenza in B. Determinare P in modo che risulti:

$$a)\ \overline{PH}+\overline{HB}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\overline{PB}$$
$$b)\ \overline{PH}+\overline{HB}=h\overline{PB}$$

con $h\in\mathbb{R}_0^+$.



Soluzione. (a) La corda AB è il lato del triangolo equilatero inscritto, per cui l'angolo $ABH=\frac{\pi}{3}$, essendo l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda AB. Posto $P\hat{A}B=x$ con $0<x\leq\frac{\pi}{3}$, si ha $AHB=\pi-\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{2}{3}\pi-x$.

Calcoliamo ora i segmenti indicati applicando i teoremi della trigonometria. Applicando il th. di Eulero al triangolo AHB

$$\frac{AH}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} \qquad AH = \frac{r\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} = \frac{3r}{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}$$

$$\frac{HB}{\sin x} = \frac{AB}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} \qquad HB = \frac{r\sqrt{3}\sin x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}$$

Per il teorema della tangente e secante da un punto esterno, si ha la proporzione

$$PH : HB = HB : AH$$

da cui

$$PH = \frac{HB^2}{AH} = \frac{3r^2\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} \cdot \frac{2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}{3r} = \frac{2r\sin^2 x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)}$$

Per il teorema delle corde, si ha $PB = 2r\sin x$. Verifichiamo la condizione posta

$$\overline{PH} + \overline{HB} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\overline{PB}$$

sostituendo i valori calcolati

$$\frac{2r\sin^2 x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} + \frac{r\sqrt{3}\sin x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}\cdot 2r\sin x$$

Diviene

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - \left(\sqrt{3}+1\right)\sin x \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) = 0$$

$$\sin x\left(2\sin x - \left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) + \sqrt{3}\right) = 0$$

Applicando la formula di addizione si ha, dopo qualche calcolo algebrico

$$\sin x\left(\left(3+\sqrt{3}\right)\cos x - \left(3-\sqrt{3}\right)\sin x - 2\sqrt{3}\right) = 0$$

Ora, $\sin x = 0$ ha come soluzioni $x = k\pi$, che sono fuori dall'intervallo accettabile. Per risolvere l'equazione lineare poniamo $\sin x = Y$ e $\cos x = X$ e avremo

$$\left(3+\sqrt{3}\right)X - \left(3-\sqrt{3}\right)Y - 2\sqrt{3} = 0$$

Risolviamo mettendo a sistema tale equazione con quella della crf goniometrica

$$\begin{cases} \left(3+\sqrt{3}\right)X - \left(3-\sqrt{3}\right)Y - 2\sqrt{3} = 0 \\ X^2+Y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} Y = \left(2+\sqrt{3}\right)X - \left(\sqrt{3}+1\right) \\ X^2+Y^2 = 1 \end{cases}$$

Sostituendo (sottintendiamo la crf goniometrica per comodità di scrittura)

$$4\left(2+\sqrt{3}\right)X^2 - 2\left(5+3\sqrt{3}\right)X + 3 + 2\sqrt{3} = 0$$

Le soluzioni saranno

$$X_{1,2} = \frac{\left(5+3\sqrt{2}\right) \pm \sqrt{4+2\sqrt{3}}}{4\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

ma $4+2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$ per cui

$$X_{1,2} = \frac{\left(5+3\sqrt{2}\right) \pm \left(\sqrt{3}+1\right)}{4\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

le due soluzioni saranno

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} X_2 = \frac{1}{2} \\ Y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Le due soluzioni rispecchiano la simmetria del problema rispetto all'asse del segmento AB. Avremo pertanto $x = \frac{\pi}{6}$.

(b) Scriviamo ora la seconda relazione in funzione di x.

$$\frac{2r\sin^2 x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)} + \frac{r\sqrt{3}\sin x}{\sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)} = 2hr\sin x$$

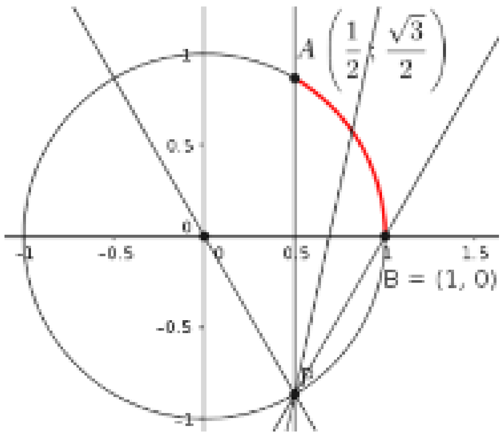
I calcoli sono molto simili ai precedenti e si avrà

$$(2-h)\sin x - h\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0$$

con $\sin x = 0$ che restituisce soluzioni non accettabili. Con le stesse sostituzioni $\cos x = X$ e $\sin x = Y$ e mettendo a sistema con l'eq. della crf goniometrica, si ha

$$\begin{cases} h\sqrt{3}X - (2-h)Y - \sqrt{3} = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

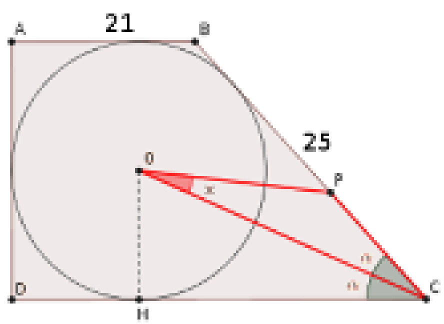
La prima equazione rappresenta un fascio di rette proprio con sostegno nel punto $P\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ottenibile moltiplicando e raggruppando i termini contenenti il valore h e quella senza



Quando la retta passa per il punto $B(1;0)$ si ha $h = 1$ e quando la retta passa per il punto $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ si ha $h = 2$. Avremo, pertanto, una soluzione nell'intervallo $1 < h \leq 2$.

Problema 20. Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo in cui $\hat{A} = \hat{D} = \frac{\pi}{2}$, $\overline{BC} = 25$, $\overline{AB} = 21$, $\hat{C} = 2\alpha$ con $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$. Determinare gli elementi incogniti del trapezio e verificare che tale trapezio è circoscritto a una circonferenza. Indicato poi con O il centro di essa, sia P un punto di BC tale che risulti:

$$\overline{OP} + \overline{PC} = k\overline{OC}$$



SOLUZIONE. Dobbiamo prima determinare la base maggiore DC, l'altezza AD e l'angolo $\hat{B}$ che si può esprimere come $\hat{B} = \pi - 2\alpha$. Calcoliamo la lunghezza della diagonale AC con il teorema di Carnot

$$\overline{AC} = \sqrt{21^2 + 25^2 - 2 \cdot 21 \cdot 25 \cos(\pi - 2\alpha)} = \sqrt{1066 + 1050 \cos 2\alpha} = \sqrt{1066 + 1050 \times \frac{7}{25}} = 4\sqrt{85}$$

Calcoliamo ora l'ampiezza dell'angolo $A\hat{C}B$ con il teorema di Eulero.

$$\frac{AB}{\sin A\hat{C}B} = \frac{AC}{\sin(\pi - 2\alpha)}$$

da cui

$$\sin A\hat{C}B = \frac{126}{25\sqrt{85}} \qquad \cos A\hat{C}B = \sqrt{1 - \left(\frac{126}{25\sqrt{85}}\right)^2} = \frac{193}{25\sqrt{85}}$$

Ora, $\sin D\hat{C}A = \sin\left(B\hat{C}D - A\hat{C}B\right) = \sin\left(2\alpha - A\hat{C}B\right) = \sin 2\alpha \cos A\hat{C}B - \cos 2\alpha \sin A\hat{C}B = \frac{24}{25} \times \frac{193}{25\sqrt{85}} - \frac{7}{25} \times \frac{126}{25\sqrt{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}$ e, pertanto, $\cos D\hat{C}A = \frac{7}{\sqrt{85}}$

Applicando i teoremi dei tr. rettangoli calcoliamo i due cateti

$$\overline{CD} = 4\sqrt{85} \times \frac{7}{\sqrt{85}} = 28$$

$$\overline{AD} = 4\sqrt{85} \times \frac{6}{\sqrt{85}} = 24$$

Verifichiamo ora che il trapezio è circoscritto alla crf, ricordando che la condizione implica che la somma dei lati opposti sia uguale. Pertanto, $28 + 21 = 25 + 24$, cioè $49 = 49$ e il trapezio è circoscritto alla crf.

Determiniamo ora la posizione di un punto P sul lato obliquo affinché valga la condizione $\overline{OP} + \overline{PC} = k\overline{OC}$ (i segmenti sono indicati in figura).

Poniamo l'angolo $P\hat{O}C = x$ con $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Dalle proprietà dei poligoni circoscritti si ha che il raggio $\overline{OH} = r = \frac{Area}{semiperimetro} = \frac{49 \times 12}{49} = 12$.

Calcoliamo preliminarmente $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Considerando il triangolo rettangolo OHC, otteniamo $\overline{OC} = \frac{OH}{\sin\alpha} = 12 \times \frac{5}{3} = 20$.

Calcoliamo l'angolo $O\hat{P}C = \pi - (\alpha - x)$ per ottenere il segmento PC dal teorema di Eulero.

$$\frac{OC}{\sin(\pi - (\alpha - x))} = \frac{PC}{\sin x} \qquad PC = \frac{OC \sin x}{\sin(\alpha - x)} = \frac{20 \sin x}{\sin\alpha \cos x + \sin x \cos\alpha} = \frac{100 \sin x}{3\cos x + 4\sin x}$$

In modo analogo calcoliamo anche il terzo segmento OP,

$$OP = \frac{60}{3\cos x + 4\sin x}$$

La relazione che deve essere soddisfatta sarà

$$\frac{60}{3\cos x + 4\sin x} + \frac{100\sin x}{3\cos x + 4\sin x} = 20k$$

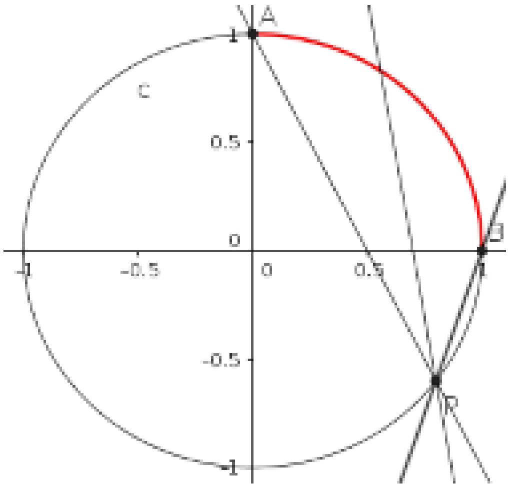
Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$5\sin x - 4k\sin x - 3k\cos x + 3 = 0 \qquad 3k\cos x + (4k - 5)\sin x - 3 = 0$$

Tale equazione lineare si può risolvere graficamente con il sistema, dopo aver posto $\cos x = X$ e $\sin x = Y$

$$\begin{cases} 3kX + (4k - 5)Y - 3 = 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$$

la prima equazione è quella di un fascio proprio di rette con sostegno $P\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$, riscrivendo l'eq. del fascio come combinazione lineare $(5Y + 3) + k(-3X - 4Y) = 0$.



Per la retta passante per $A(0;1)$ si ha $4k-5-3=0$ con $k=2$; per la retta passante per $B(1;0)$ si ha $3k=3$ con $k=1$.

Si avrà, pertanto, sempre una soluzione nell'intervallo $1 \leq k \leq 2$.