ELETTROMAGNETISMO
PARTE II - POTENZIALE ELETTRICO

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

1. Calcolo del potenziale dato il campo elettrico

Exercise 1. La differenza di potenziale elettrico tra il terreno e una nuvola durante un temporale è di $1.2 \cdot 10^9\,V$. Trovare la variazione in modulo dell'energia potenziale elettrica (in multipli dell'elettronvolt) di un elettrone che si muove tra questi due punti.

Soluzione: La forza elettrostatica è una forza conservativa, ed è quindi possibile assegnare ad un sistema di cariche una energia potenziale elettrica U, la cui variazione $\Delta U = -W$. Assumiamo che il sistema di riferimento quello in cui le cariche sono infinitamente distanti tra loro e assegniamo a tale configurazione $U = 0$. Quindi, W sarà il lavoro delle forze elettrostatiche per avvicinare le cariche. Nel caso di una singola carica, generatrice del campo elettrico, essendo, per definizione, $W = F\Delta s$, possiamo scrivere $\Delta U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{r}$. Il potenziale elettrico è il rapporto tra l'energia potenziale e la quantità di carica, cioè $V = \frac{U}{q}$ e $\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$, per cui, considerando un solo elettrone, avremo

$$\Delta U = e\Delta V = 1 \times 1.2 \cdot 10^9\,V = 1.2\,GeV$$

Exercise 2. Una data batteria per auto da $12\,V$ può far fluire una carica totale di $84\,Ah$ attraverso un circuito, da un polo all'altro. Trovare la carica, in coulomb, corrispondente e, se tutta la carica subisce una differenza di potenziale di $12\,V$, l'energia che viene utilizzata.

Soluzione: Dalla definizione di intensità di corrente abbiamo

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad \Delta q = i\Delta t$$

ne segue che $1\,C = 1\,A \times s$ e quindi

$$84\,\frac{C \cdot h}{s} \times \frac{3600\,s}{h} = 302400\,C$$

l'energia utilizzata è pari a

$$\Delta U = \Delta V \cdot \Delta q = 12\,V \times 302400\,C = 3.63 \cdot 10^6\,J$$

Exercise 3. Si supponga che in un lampo la differenza di potenziale tra nuvole e terreno sia si $1.0 \cdot 10^9\,V$ e la quantità di carica trasferita sia $30\,C$. Trovare l'energia trasferita con quella carica. Se tutta l'energia rilasciata venisse utilizzata per accelerare un'automobile di $1000\,kg$ inizialmente a riposo, trovare la sua velocità finale. Se tale energia venisse impiegata per fondere ghiaccio, quanto ne fonderebbe a $0^\circ\,C$? (Il calore latente di fusione del ghiaccio è $3.3 \cdot 10^5\,J/kg$.

Soluzione: L'energia potenziale elettrica è data da

$$U = Vq = 1.0 \cdot 10^9\,V \times 30\,C = 3.0 \cdot 10^{10}\,J$$

Se tale energia potenziale si trasforma interamente in energia cinetica ($\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right)$) per l'automobile, la sua velocità finale sarà, essendo $v_i = 0$

$$v_f = \sqrt{\frac{2\Delta K}{m}} = \sqrt{\frac{6.0 \cdot 10^{10}\,J}{10^3\,kg}} = 7.7 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

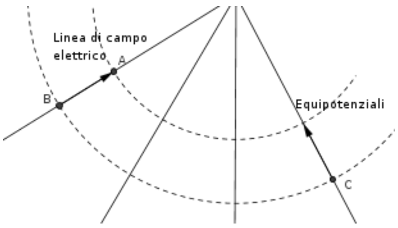
La quantità di ghiaccio che passa allo stato liquido a $0^\circ\,C$ è data da

$$Q = Lm$$

dove L è il calore latente in questo caso

$$m = \frac{3.0 \cdot 10^{10}\,J}{3.3 \cdot 10^5\,\frac{J}{kg}} = 9.1 \cdot 10^4\,kg$$

Exercise 4. Un elettrone si sposta dal punto A al punto B, come mostrato in figura. Il campo elettrico svolge un lavoro di $3.94 \cdot 10^{-19}\,J$ su di esso. Trovare le differenze di potenziale elettrico $V_B - V_A$, $V_C - V_A$, $V_C - V_B$.



Soluzione: Il potenziale elettrostatico è definito come il rapporto tra l'energia potenziale e la carica (non generatrice del campo). Tra i punti A e B la differenza di potenziale sarà pari al lavoro fatto dal campo sulla carica, cioè

$$\Delta V_{B-A} = \frac{3.94 \cdot 10^{-19}\,J}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = -2.46\,V$$

il segno negativo è perché si passa da un potenziale minore a uno maggiore (come indicato dalla freccia). Il punto C appartiene alla stessa superficie equipotenziale del punto B, per cui $\Delta_{C-A} = 2.46\,V$, mentre i punti C e B stanno sulla stessa superficie equipotenziale, per cui, essendo la forza elettrostatica conservativa, $\Delta_{C-B} = 0\,V$.

Exercise 5. Nell'esperimento di Millikan con le goccioline d'olio, un campo elettrico di $1.92 \cdot 10^5\,N/C$ viene instaurato tra due piani a una distanza di $1.50\,cm$. Trovare la differenza di potenziale tra i due piani.

Soluzione: La differenza di potenziale può essere espressa in funzione del campo elettrico come

$$\Delta V = Er = 1.92 \cdot 10^5\,\frac{N}{C} \times 1.50 \cdot 10^{-2}\,m = 2.88 \cdot 10^3\,V$$

Exercise 6. Due grandi piatti paralleli conduttori vengono posti a una distanza di $12\,cm$ l'uno dall'altro e sulle loro superfici sono presenti cariche uguale e opposte. Un elettrone posto a metà strada tra i due piatti è soggetto a una forza di $3.9 \cdot 10^{-15}\,N$. (Si trascuri l'effetto ai bordi). Trovare il campo elettrico nella posizione dell'elettrone e la differenza di potenziale tra i due piatti.

Soluzione: L'elettrone è sottoposto all'azione delle cariche sul piatto negativo che lo attraggono e a quelle sul piatto positivo che lo attraggono. Avremo quindi una forza diretta verso le cariche positive di intensità doppia rispetto al caso della presenza di un solo tipo di carica. L'intensità del campo elettrico è data da

$$E = \frac{F}{e} = \frac{3.9 \cdot 10^{-15}\,N}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 2.4 \cdot 10^4\,\frac{N}{C}$$

la differenza di potenziale sarà

$$\Delta V = Er = 2.43 \cdot 10^4\,\frac{N}{C} \times 1.2 \cdot 10^{-1}\,m = 2.9 \cdot 10^3\,V$$

Exercise 7. Un piano carico infinito ha una densità di carica $\sigma = 0.10\,\mu C/m^2$ su una faccia. Trovare la distanza alla quale si trovano le superfici equipotenziali il cui potenziale differisce di $50\,V$.

Soluzione: Il campo elettrico prodotto da un piano carico infinito è dato da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il campo è diretto perpendicolarmente al piano ed è uniforme. Fissiamo l'origine del sistema di coordinate sul piano e assumiamo l'asse x parallelo al campo e positivo nella direzione del campo. Il potenziale elettrico sarà

$$V = V_0 - Ex$$

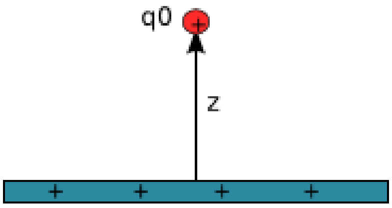
Le superfici equipotenziali sono superfici che stanno tutte alla stessa distanza dal piano e i cui punti hanno lo stesso potenziale. Se due superfici sono separata da una distanza Δx allora la differenza di potenziale tra di esse sarà

$$\Delta V = E\Delta x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \Delta x$$

Risolvendo rispetto a Δx, si ottiene

$$\Delta x = \frac{2 \times 50\,V \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}{0.10 \cdot 10^{-6}\,C} = 8.8 \cdot 10^{-3}\,m = 8.8\,mm$$

Exercise 8. La figura mostra un foglio infinito non conducente con densità di carica superficiale positiva σ su un lato. Trovare il lavoro fatto dal campo elettrico del foglio mentre una piccola carica di prova q_0 viene spostata da una posizione iniziale sul foglio a una posizione finale posta a una distanza z dal foglio.



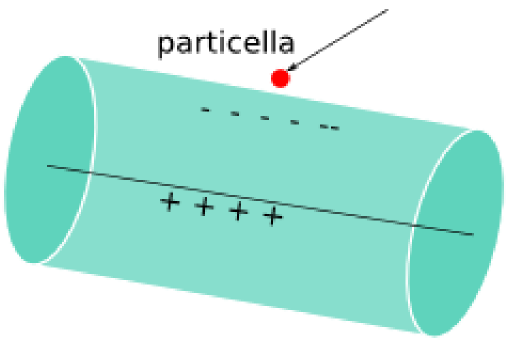
Soluzione: Il campo elettrico dovuto ad un foglio infinito è dato da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Il lavoro può essere espresso come il prodotto scalare della forza per lo spostamento; in questo caso la forza è $F = Eq_0$ e lo spostamento è z. Pertanto,

$$L = F \cdot \Delta s = \frac{q_0 \sigma z}{2\varepsilon_0}$$

Exercise 9. Un contatore Geiger è costituito da un cilindro metallico avente diametro di $2.00\,cm$, lungo il cui asse viene teso un filo avente diametro $1.30 \cdot 10^{-4}\,cm$. Si assuma che tra il cilindro e il filo venga applicata una tensione di $850\,V$. Trovare il campo elettrico sulla superficie del filo e del cilindro.



Soluzione: Applicando il teorema di Gauss su una superficie cilindrica coincidente con il cilindro metallico del Geiger (si vedano gli esercizi nel file campo elettrico) si ottiene che il campo elettrico è dato da

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

sapendo che $\Delta V = -\int_i^f E dr$, si ottiene

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_f^i \frac{dr}{r} = Er \left(\ln r\right)_f^i = Er \ln \frac{r_i}{r_f}$$

Se ora vogliamo calcolare il campo elettrico sulla superficie del Geiger, $r = r_f = 0.01\,m$ e si avrà

$$E_{cil} = \frac{850\,V}{0.01\,m \cdot \ln \frac{6.5 \cdot 10^{-7}}{0.01}} = 8.83 \cdot 10^3\,\frac{V}{m}$$

se invece calcoliamo il campo elettrico sul filo, $r = r_i = 6.5 \cdot 10^{-7}\,m$ e si avrà

$$E_{cil} = \frac{850\,V}{6.5 \cdot 10^{-7}\,m \cdot \ln \frac{6.5 \cdot 10^{-7}}{0.01}} = 1.36 \cdot 10^8\,\frac{V}{m}$$

Exercise 10. Il campo elettrico in una sfera isolante di raggio R, all'interno della quale vi sia una carica distribuita uniformemente, è diretto radialmente e ha un'intensità

$$E(r)=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Qui q (positiva o negativa) è la carica totale nella sfera ed r è la distanza dal centro della sfera. Trovare il potenziale $V(r)$ all'interno della sfera, assumendo $V=0$. Trovare poi la differenza di potenziale elettrico tra un punto della superficie e il centro della sfera. Se q è positiva determinare quale dei punti si trova al potenziale maggiore.

Soluzione: Nel primo caso si ha

$$V(r)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int rdr=-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

e la differenza di potenziale tra un punto della superficie e il centro sarà

$$\Delta V=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left[r^2\right]_0^R=\frac{qR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

e la carica è negativa, il potenziale avrà il valore massimo nel centro della sfera stessa.

Exercise 11. La carica q è distribuita uniformemente nel volume di una sfera avente raggio R. Se il potenziale è nullo all'infinito, dimostrare che il potenziale a una distanza r dal centro, dove $r<R$, è dato da

$$V=\frac{q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

Soluzione: Usiamo il teorema di Gauss per trovare il campo elettrico dentro e fuori la distribuzione di carica sferica. Poiché il campo è diretto radialmente il potenziale elettrico sarà l'integrale del campo lungo il raggio della sfera esteso all'infinito. L'integrale dovrà essere diviso in due parti per tenere conto delle diverse regioni, una dall'infinito alla superficie e l'altra dalla superficie a un punto interno. All'esterno il campo è dato da $E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ e il potenziale è $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$, dove r è la distanza dal centro della sfera (la carica è vista come puntiforme). Per trovare il campo elettrico all'interno della sfera, scegliamo una superficie gaussiana sferica di raggio r, concentrica alla distribuzione. Il campo è perpendicolare alla superficie ed è uniforme e il flusso attraverso la superficie è $\Phi(E)=4\pi\varepsilon r_o^2 E$. La carica distribuita dipende dal volume della sfera e sarà qr^3/R^3 . Applicando il teorema di Gauss si ha

$$4\pi\varepsilon_0 r^2 E=\frac{qr^3}{R^3}\qquad E=\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

Se V_s è il potenziale sulla superficie della distribuzione ($r=R$) allora il pontenziale in un punto interno sarà

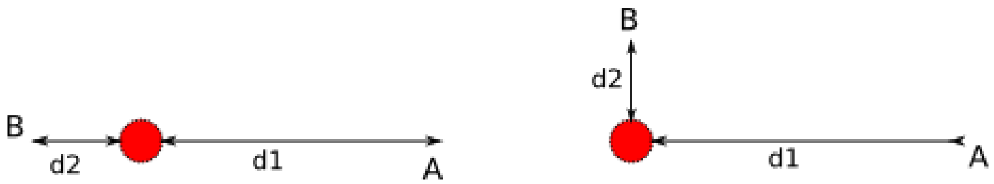
$$V=V_s-\int_R^r Edr=V_s-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_R^r rdr=V_s-\left(r^2\right)_R^r=V_s-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

Calcoliamo V_s dalla relazione $V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$; ponendo $r=R$, si ha $V_s=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ e sostituendo

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}-\frac{qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}+\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}=\frac{2qR^2-qr^2+qR^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{3qR^2-qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}=\frac{q\left(3R^2-r^2\right)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

2. Potenziale dovuto a cariche puntiformi

Exercise 12. Una carica puntiforme q vale $+1.0\,\mu C$. Si consideri il punto A, posto a una distanza di $2.0\,m$ e il punto B, posto a una distanza di $1.0\,m$. Se i due punti si trovano in direzione diametralmente opposta, come nella figura di sinistra, trovare la differenza di potenziale V_A-V_B. Determinare la differenza di potenziale quando i punti A e B sono disposti come nella figura a destra.



Soluzione: Il potenziale elettrico attorno ad una carica positiva puntiforme, rispetto al potenziale nulla a distanza infinita, è dato da
$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$
Essendo la carica positiva, il campo elettrico è diretto radialmente dalla carica verso l'esterno. Consideriamo il caso mostrato nella figura di sinistra. Il potenziale V_A e V_B è uguale a
$$V_A=\frac{1.0\cdot10^{-6}\,C}{4\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot2.0\,m}=4496\,V \qquad V_B=\frac{1.0\cdot10^{-6}\,C}{4\pi\cdot8.85\cdot10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}\cdot1.0\,m}=8992$$
Il potenziale in qualsiasi punto vicino a una carica positiva è positivo, rispetto al potenziale all'infinito. Pertanto
$$V_A-V_B=4496-8992=-4496\,V$$
Nel caso illustrato dalla figura di destra, la differenza di potenziale è la stessa, perché i punti A e B stanno sulle stesse superfici equipotenziali attorno alla carica $+q$.

Exercise 13. Si consideri una carica puntiforme $q=1.5\cdot10^{-8}\,C$, e $V=0$ all'infinito. Indicare la forma e la dimensione di una superficie equipotenziale avente un potenziale di $30\,V$ dovuto soltanto a q. Le superfici i cui potenziali differiscono per una costante sono distanziate in modo disparato?

Soluzione: Calcoliamo il raggio della superficie sferica equipotenziale attorno alla sola carica puntiforme. Da $V=k_0\frac{q}{r}$, otteniamo
$$r=\frac{k_0 q}{V}=\frac{8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot1.5\cdot10^{-8}\,C}{30\,\frac{Nm}{C}}=4.50\,m$$
La dipendenza tra V e r è di proporzionalità inversa, per cui le superfici risulteranno sempre più spaziate al crescere di r.

Exercise 14. Trovare il potenziale che raggiunge una sfera conduttrice isolata di raggio $16.0\,cm$ con una carica di $1.50\cdot10^{-8}\,C$ con $V=0$ all'infinito.

Soluzione: Il potenziale di una sfera conduttrice isolata è espresso da
$$V=k_0\frac{q}{r}=\frac{8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\cdot1.50\cdot10^{-8}\,C}{0.16\,m}=843\,V$$

Exercise 15. Quando una navicella spaziale si muove nel gas ionizzato rarefatto della ionosfera terrestre, il suo potenziale varia tipicamente di $-1.0\,V$ per ogni rivoluzione. Assumendo che la navicella sia una sfera di raggio $10\,m$, stimare la quantità di carica che raccoglie.

Soluzione: Sostituiamo i dati indicati nella relazione che esprime il potenziale sulla superficie di una sfera:
$$q=\frac{Vr}{k_0}=\frac{-1.0\,V\times10\,m}{8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}=-1.1\cdot10^{-9}\,C$$

Exercise 16. Molti dei materiali che costituiscono gli anelli si Saturno hanno la forma di minuscole particelle di polvere di raggio $10^{-6}\,m$. Questi granelli si trovano in una regione che contiene un gas ionizzato rarefatto e raccolgono elettroni in eccesso. Si supponga, in via approssimativa, che un granello sia sferico, con raggio $R=1.0\cdot10^{-6}\,m$. Se il potenziale elettrico sulla superficie di un granello è di $-400\,V$, trovare il numero di elettroni in eccesso raccolti (considerando $V=0$ all'infinito).

Soluzione: Troviamo prima la carica che viene raccolta
$$q=\frac{Vr}{k_0}=\frac{-400\,V\times1.0\cdot10^{-6}\,m}{8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}=-4.4\cdot10^{-14}\,C$$
e ricordando il valore della carica di un elettrone, otteniamo il numero di tali particelle
$$n=\frac{-4.4\cdot10^{-14}\,C}{-1.6\cdot10^{-19}\,C}=2.8\cdot10^5$$

Exercise 17. Trovare la carica e la densità di carica sulla superficie di un contenitore sferico di raggio $0.15\,m$ il cui potenziale è $200\,V$ (con $V = 0$ all'infinito).

Soluzione: Troviamo la quantità di carica sulla superficie

$$q = \frac{Vr}{k_0} = \frac{200\,V \times 0.15\,m}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 3.34 \cdot 10^{-9}\,C$$

La superficie di una sfera è $4\pi r^2$ e supponendo la carica uniformemente distribuita avremo

$$\sigma = \frac{q}{A} = \frac{2.34 \cdot 10^{-9}\,C}{4\pi \times 0.15^2\,m^2} = 1.18 \cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m^2}$$

Exercise 18. Una goccia d'acqua sferica su cui è presente una carica di $30\,pC$ ha un potenziale di $500\,V$ sulla superficie (con $V = 0$ all'infinito). Trovare il raggio della goccia. Se due gocce simili, aventi stessa carica e stesso raggio, si combinano per formare un'unica goccia sferica, trovare il potenziale sulla superficie della nuova goccia così formata.

Soluzione: Calcoliamo il raggio della goccia singola:

$$r = \frac{qk_0}{V} = \frac{30 \cdot 10^{-12}\,C \times 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}{500\,V} = 5.4 \cdot 10^{-4}\,m$$

Se uniamo le due gocce per formarne una sola, questa avrà un volume doppio di raggio r' tale che $r'^3 = 2r^3$ e una carica doppia, $q' = 2q$, per cui $r' = r\sqrt[3]{2}$e il potenziale diverrà $(V' = k_0\frac{q'}{r'} = k_0\frac{2q}{r\sqrt[3]{2}} = \frac{2V}{\sqrt[3]{2}})$

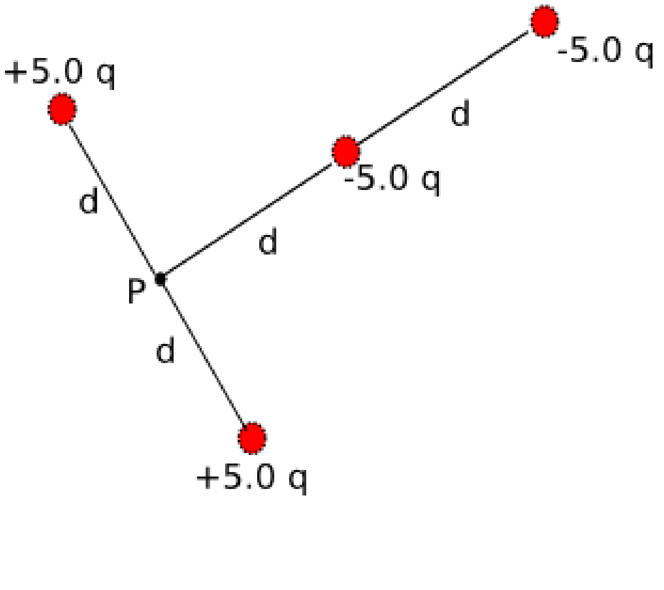
$$V' = \frac{2V}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1000\,V}{\sqrt[3]{2}} = 793\,V$$

Exercise 19. Un campo elettrico di circa $100\,V/m$ viene spesso osservato sulla superficie della Terra. Se questo campo fosse costante sull'intera superficie, trovare il potenziale elettrico in un punto di essa. (Su supponga $V = 0$ all'infinito).

Soluzione: Considerando la superficie della Terra con una distribuzione di carica uniforme, possiamo applicare la relazione che lega il campo elettrico al potenziale, assumendo come distanza dal centro il raggio terrestre.

$$V = Er = 6.37 \cdot 10^6\,m \times 100\,\frac{V}{m} = 6.37 \cdot 10^8\,V$$

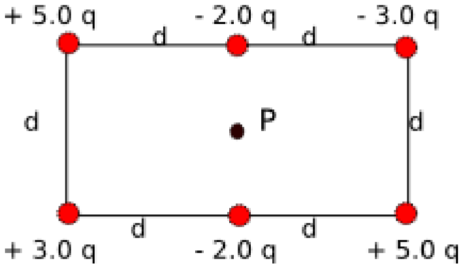
Exercise 20. Determinare il potenziale netto nel punto P, in figura, dovuto alle quattro cariche puntiformi se $V = 0$ è all'infinito.



Soluzione: Il potenziale nel punto P è determinato mediante il principio di sovrapposizione, secondo il quale il potenziale netto è la somma dei potenziali, tenendo conte del segno, dovuti alla presenza di ogni carica considerata come sola. Pertanto

$$V=-k_0\sum_{i=1}^{3}\frac{q_i}{r_i}=-k_0\left(\frac{+5.0q}{d}+\frac{+5.0q}{d}+\frac{-5.0q}{d}+\frac{-5.0q}{2d}\right)=k_0\frac{-5q}{2d}$$

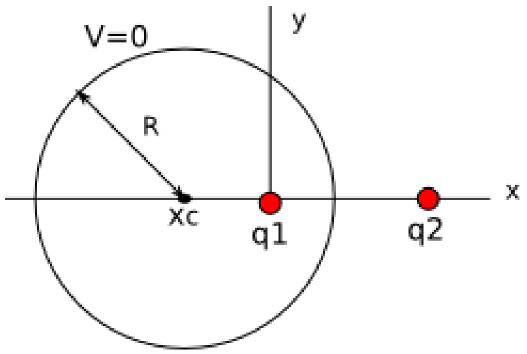
Exercise 21. Nella figura il punto P è al centro del rettangolo. Con $V=0$ all'infinito, trovare il potenziale generato dalle sei cariche puntiformi nel punto P.



Soluzione: Il potenziale nel punto P è determinato mediante il principio di sovrapposizione, secondo il quale il potenziale netto è la somma dei potenziali, tenendo conte del segno, dovuti alla presenza di ogni carica considerata come sola. Pertanto, calcolando la distanza dei vertici del rettangolo dal punto P mediante il teorema di Pitagora, $\sqrt{d^2+\frac{d^2}{4}}=\frac{d}{2}\sqrt{5}$, si ha

$$V=-qk_0\left(\frac{+5.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}}+\frac{+3.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}}+\frac{-3.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}}+\frac{+5.0}{\frac{d}{2}\sqrt{5}}+\frac{-2.0}{\frac{d}{2}}+\frac{-2.0}{\frac{d}{2}}\right)=-qk_0\left(\frac{20}{d\sqrt{5}}-\frac{8}{d}\right)=-qk_0\left(\frac{4\sqrt{5}}{d}-\frac{8}{d}\right)=-k_0\frac{0.94q}{d}$$

Exercise 22. Una carica puntiforme $q_1=+6.0e$ viene tenuta fissa nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane. Una seconda carica $q_2=-10e$ viene fissata in $x=8.6\,nm$, $y=0$. Il luogo dei punti del piano xy nei quali $V=0$ (che non siano all'infinito) è una circonferenza centrata sull'asse x, come in figura. Trovare la posizione di x_c del centro della circonferenza e il raggio R di tale circonferenza.



Soluzione: L'esercizio chiede di determinare due quantità incognite. Per ottenere tale risultato, calcoliamo il potenziale in due punti distinti appartenenti all'asse x e alla circonferenza i cui punti si trovano tutti a potenziale $V=0$. Per comodità, indichiamo la distanza di q_2 dall'origine con d e indichiamo le intersezioni della circonferenza con l'asse x con A $(x>0)$ e B $(x<0)$. Il potenziale dovuto ad entrambe le cariche nel punto B sarà

$$V_B=-k_0e\left(\frac{6.0}{R+x_C}+\frac{-10}{R+x_C+d}\right)=0$$

da cui

$$6.0\,(R+x_C+d)=10\,(R+x_C)\qquad 4\,(R+x_C)=6d$$

Calcoliamo ora il potenziale nel punto A

$$V_B=-k_0e\left(\frac{6.0}{R-x_C}+\frac{-10}{d-(R-x_C)}\right)=0$$

da cui

$$6.0\,[d-(R-x_C)]=10\,(R-x_C)\qquad 6d=16\,(R-x_C)$$

Mettiamo ora a sistema le due equazioni nelle incognite x_C e R

$$\begin{cases} 2R+2x_C=3d \\ 8R-8x_C=3d \end{cases} \qquad \begin{cases} 16R=15d \\ 2x_C=3d-\frac{15}{8}d=\frac{9}{8}d \end{cases}$$

$$\begin{cases} R=\frac{15}{16}d \\ x_C=\frac{9}{16}d \end{cases}$$

Sostituendo ora il valori di d e, osservando dalla figura che $x_C<0$, si ha

$$x_C=-4.8\,nm \qquad R=8.1\,nm$$

Exercise 23. Una sfera di rame di raggio $1.0\,cm$. è ricoperta da uno strato sottile di nichel. Alcuni atomi di nichel sono radioattivi, ed emettono un elettrone quando decadono. Metà di questi elettroni entrano nella sfera, depositando ciascuno $100\,keV$ di energia. L'altra metà di elettroni se ne va, trasportando ciascuno una carica $-e$. Lo strato di nichel ha un'attività di $3.70\cdot10^8\,Bq$. La sfera è appesa a un lungo filo conduttore e isolata da tutto ciò che la circonda. Trovare il tempo necessario affinché il potenziale della sfera aumenti fino a $1000\,V$ e il tempo affinché la temperatura della sfera aumenti di $5.0\,^\circ C$, sapendo che la capacità termica della sfera è $14.3\,J/K$.

Soluzione: L'attività degli atomi del nucleo indica che ogni secondo sulla sfera vengono depositati $1.85\cdot10^8$ elettroni. Affinché il potenziale assuma il valore di $1000\,V$ la carica necessaria è

$$q=\frac{Vr}{k_0}=\frac{1000\,V\times0.01\,m}{8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}=1.11\cdot10^{-9}\,C$$

pari a n_e elettroni di carica $1.60\cdot10^{-19}\,C$

$$n_e=\frac{1.11\cdot10^{-9}\,C}{1.60\cdot10^{-19}\,\frac{C}{s}}=6.94\cdot10^9$$

il tempo necessario sarà quindi

$$\Delta t=\frac{6.94\cdot10^9}{1.85\cdot10^8\,s^{-1}}=38\,s$$

Per determinare la quantità di energia necessario all'aumento della temperatura di $5.0\,^\circ C$, utilizziamo la relazione della calorimetria $\Delta E=C\Delta T$, dove, in questo caso, C esprime la capacità del corpo. Pertanto, se $\Delta T=5.0\,^\circ C\,(=K)$ si avrà

$$\Delta E=14.3\,\frac{J}{K}\times5.0\,K=71.5\,J=71.5\times6.242\cdot10^{18}\,eV=4.46\cdot10^{20}\,eV=4.46\cdot10^{17}\,keV$$

Per depositare una tale quantità di energia servono $4.46\cdot10^{15}$ elettroni e il tempo necessario sarà

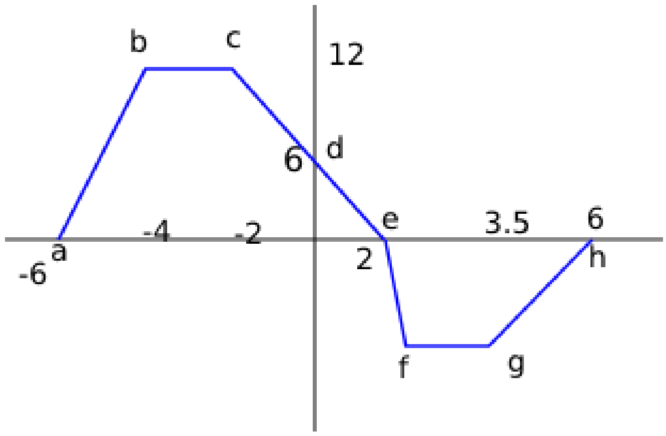
$$\Delta t=\frac{4.46\cdot10^{15}}{1.85\cdot10^8\,s^{-1}}=2.41\cdot10^7\,s$$

Exercise 24. La molecola di ammoniaca NH_3 ha un momento di dipolo elettrico permanente, p, pari a $1.47D$, dove D è l'unità debye del valore di $3.34\cdot10^{-30}\,C\cdot m$. Calcolare il potenziale elettrico associato a una molecola di ammoniaca in un punto che si trova a una distanza di $52.0\,nm$ dall'asse del dipolo. (Si ponga $V=0$ all'infinito).

Soluzione: Il potenziale elettrico del dipolo in questione è dato da

$$V=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^2}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{1.47\times3.34\cdot10^{-30}\,C\cdot m}{\left(52\cdot10^{-9}\right)^2\,m^2}=1.63\cdot10^{-5}\,V$$

Exercise 25. Si supponga che il potenziale elettrico lungo l'asse x segua l'andamento mostrato in figura. Per i tratti illustrati $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh$, si determini la componente x del campo elettrico. (Si ignori il comportamento nei punti estremi dei segmenti).



Soluzione: Indichiamo, per chiarezza, le coordinate dei diversi punti. $a\,(-6;0)$, $b\,(-4,12)$, $c\,(-2,12)$, $d\,(0,6)$, $e\,(2,0)$, $f\,(2.5,-7.5)$, $g\,(3.5,-7.5)$, $h\,(6,0)$. Il campo elettrico lungo la direzione x è la derivata, cambiata di segno, del potenziale rispetto alla distanza lungo x. Pertanto, dall'analisi, sappiamo che nel caso di rette o di segmenti di retta, la derivata è il coefficiente angolare di tale retta

$$E_{a,b}=-\frac{12-0}{-4+6}=-6\,\frac{V}{m}\qquad E_{b,c}=-\tfrac{12-12}{-2+4}=0\,\tfrac{V}{m}\qquad E_{c,d}=-\frac{0-12}{2+2}=3\,\frac{V}{m}$$

$$E_{d,e}=-\frac{0-6}{2-0}=3\,\frac{V}{m}\quad E_{e,f}=-\tfrac{-7.5-0}{2.5-2}=-15\,\tfrac{V}{m}\quad E_{f,g}=-\frac{-7.5+7.5}{-4.5+2.5}=0\,\frac{V}{m}$$

$$E_{g,h}=-\frac{0+7.5}{6-3.5}=-3\,\frac{V}{m}$$

Exercise 26. Rutherford calcolò il potenziale elettrico in funzione della distanza r dal centro di un atomo ottenendo

$$V=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)$$

Si dimostri che la relazione che esprime il campo elettrico, $E=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{R^3}\right)$ discenda correttamente da questa espressione di V. Perché questa espressione di V non va a zero quando $r\to\infty$?

Soluzione: La dimostrazione è puramente matematica, ricordando il legame che intercorre tra campo elettrico e potenziale, cioè

$$E=-\frac{dV}{dr}$$

cioè il campo elettrico è la derivata rispetto a r del potenziale. Calcoliamo, pertanto, la derivata della funzione $V\,(r)$ assegnata, con R costante.

$$E=-\frac{dV}{dr}=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)=-\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}+\frac{2r}{2R^3}\right)=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{2r}{2R^3}\right)$$

per valutare il comportamento del potenziale per $r\to\infty$, calcoliamo il limite della $V\,(r)$:

$$\lim_{r\to\infty}V=\frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{3}{2R}+\frac{r^2}{2R^3}\right)=+\infty$$

3. Energia Potenziale Elettrica

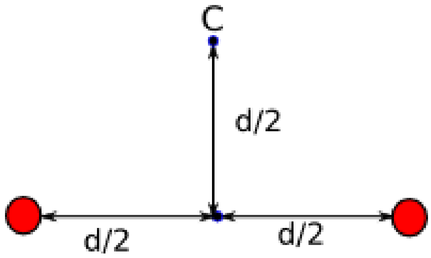
Exercise 27. Trovare l'energia potenziale elettrica di due elettroni separati da una distanza di $2.0\,nm$. Aumentando la distanza, l'energia potenziale aumenta o diminuisce?

Soluzione: Le due particelle cariche hanno lo stesso segno per cui si deve compiere lavoro positivo per mantenerle nella condizione indicata. L'energia potenziale sarà

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r}=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1.60\cdot10^{-19}\right)\,C^2}{2.0\cdot10^{-9}\,m}=1.15\cdot10^{-19}\,J$$

L'espressione che esprime l'energia potenziale in funzione della posizione mostra che al crescere di r, l'energia diminuisce.

Exercise 28. Due cariche $q = +.20\,\mu C$ sono fisse nello spazio a una distanza $d = 2.0\,cm$, come mostrato in figura. Con $V = 0$ all'infinito, trovare il potenziale elettrico nel punto C. Una terza carica identica alle precedenti viene portata lentamente dall'infinito nel punto C. Trovare il lavoro necessario. Trovare, infine, l'energia potenziale della configurazione quando anche la terza carica è al suo posto.



Soluzione: Il potenziale elettrico nel punto C si calcola applicando il principio di sovrapposizione, sommando cioè il potenziale in C relativo alle due cariche considerate sole. La distanza di ogni carica dal punto C può essere calcolata osservando che tale distanza è la diagonale di un quadrato di lato $d/2$, cioè $\frac{d}{2}\sqrt{2}$

$$V_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\frac{d}{2}\sqrt{2}} + \frac{q}{\frac{d}{2}\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q}{d\sqrt{2}} = \frac{2q\sqrt{2}}{4\pi\varepsilon_0 d} = 8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{2\sqrt{2}\times 2.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.02\,m} = 2.54\cdot 10^6\,V$$

Se una terza carica q_3, uguale alle precedenti, viene portata nel punto C contro le forze del campo elettrico si compirà un lavoro positivo

$$L = U = qV = 2.0\cdot 10^{-6}\,C\times 2.54\cdot 10^6\,V = 5.1\,J$$

Calcoliamo ora l'energia potenziale della configurazione con le tre cariche

$$U = U_{q_q q_2} + U_{q_1 q_3} + U_{q_2 q_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1 q_2}{d} + \frac{q_1 q_3}{\frac{d}{\sqrt{2}}} + \frac{q_2 q_3}{\frac{d}{\sqrt{2}}}\right)$$

le cariche sono tutte uguali, per cui

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q^2}{d} + \frac{2\sqrt{2}q^2}{d}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left(1+2\sqrt{2}\right) = 8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)\times\left(2.0\cdot 10^{-6}\,C\right)^2}{0.02\,m} = 6.9\,J$$

Exercise 29. Le cariche e le loro coordinate in un piano xy sono: $q_1 = +3.0\cdot 10^{-6}\,C$, $x = 3.5\,cm$, $y = +0.50\,cm$; e $q_2 = -4.0\cdot 10^{-6}\,C$, $x = -2.0\,cm$, $y = +1.5\,cm$. Trovare il lavoro che si deve compiere per collocare queste cariche nelle posizioni indicate, partendo dall'infinito.

Soluzione: Supponiamo che inizialmente lo spazio sia vuoto, per cui per spostare $q_1$nella posizione indicata non sarà richiesto alcun lavoro. Posizionata la carica q_1, per spostare la carica q_2 di segno opposto si dovrà compiere un lavoro contro le forze del campo (di tipo attrattivo). Il lavoro sarà quindi negativo. La distanza tra le due cariche è data da

$$r = \sqrt{(3.5+2.0)^2 + (0.50-1.50)^2} = 5.6\,cm$$

Il lavoro è espresso da

$$L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r} = 8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(-12\cdot 10^{-12}\right)C^2}{0.056\,m} = -1.9\,J$$

Exercise 30. Si valuti sommariamente la massa dell'elettrone nel modo seguente: si assuma che l'elettrone sia composto da tre parti identiche portate dall'infinito e poste ai vertici di un triangolo equilatero con lati uguali al raggio classico dell'elettrone, $2.82\cdot 10^{-15}\,m$. Trovare l'energia potenziale elettrica totale di questa disposizione. Si divida per c^2 e si confronti il risultato col valore della massa dell'elettrone, comunemente riconosciuto in $9.11\cdot 10^{-31}\,kg$.

Soluzione: L'energia potenziale della configurazione di cariche illustrata è

$$U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_1} + \frac{q_2q_3}{r_2} + \frac{q_2q_3}{r_3}\right)$$

ma $q_1 = q_2 = q_3$ e $r_1 = r_2 = r_3$, per cui

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{e^2}{9r} + \frac{e^2}{9r} + \frac{e^2}{9r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{3r} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{\left(-1.602 \cdot 10^{-19}\right)C^2}{3 \times 2.82 \cdot 10^{-15}\,m} = 2.72 \cdot 10^{-14}\,J$$

dividendo per c^2 si ottiene la massa (dalla relazione $E = mc^2$)

$$m = \frac{2.72 \cdot 10^{-14}\,J}{9.0 \cdot 10^{16}\,\frac{m^2}{s^2}} = 3.02 \cdot 10^{-31}\,kg$$

Il valore ha lo stesso ordine di grandezza della massa nota ed è migliorabile aumentando il numero delle cariche che ipoteticamente formano l'elettrone.

Exercise 31. Ricavare l'espressione per il lavoro necessario per disporre quattro cariche ai vertici di un quadrato di modo che agli estremi delle diagonali vi siano cariche di segno uguale anche se di valore uguale.

Soluzione: Siano $\pm q$ le intensità delle cariche e a il lato del quadrato, la cui diagonale sarà $d\sqrt{2}$. Il lavoro sarà

$$\begin{aligned} L &= U = U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + \frac{-q^2}{a} + \frac{-q^2}{a} + \frac{q^2}{a\sqrt{2}} + \frac{-q^2}{a}\right) \\ &= = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{4q^2}{a} + \frac{q^2\sqrt{2}}{a}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\sqrt{2} - 4\right) = -2.3 \cdot 10^{10}\,\frac{q^2}{a} \end{aligned}$$

Exercise 32. Nel modello a quark per le particelle elementari, un protone è composto da tre quark: due quark *up*, avente ciascuno carica $2e/3$, e un quark *down*, avente carica $-e/3$. Si supponga che i tre quark siano equidistanti l'uno dall'altro di $1.32 \cdot 10^{-15}\,m$. Si calcoli l'energia potenziale del subsitema dei due quark e l'energia potenziale elettrica totale del sistema delle tre particelle.

Soluzione: Supponiamo che sia inizialmente presente il quark down. L'energia potenziale del subsistema sarà

$$\begin{aligned} U &= U_{d,u} + U_{d,u} = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2e^2}{9r} + \frac{-2e^2}{9r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-4e^2}{9r} = \\ &= 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{-4\left(1.602 \cdot 10^{-19}\right)^2 C^2}{9 \times 1.32 \cdot 10^{-15}\,m} = -7.75 \cdot 10^{-14}\,J = -0.48\,MeV \end{aligned}$$

L'energia potenziale elettrica di una tale configurazione sarà

$$U = U_{1,2} + U_{1,3} + U_{2,3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4e^2}{9r} + \frac{-2e^2}{9r} + \frac{-2e^2}{9r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(0) = 0\,J$$

Exercise 33. Tre cariche di $0.12\,C$ formano un triangolo equilatero di lato $1.7\,m$. Se si fornisce energia con potenza $0.83\,kW$, trovare il numero di giorni necessari per spostare una delle cariche nel punto medio del lato del triangolo ad essa opposto.

Soluzione: Il lavoro compiuto per spostare una carica è dato dalla variazione dell'energia potenziale

$$L = \Delta U = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = 2 \times 0.12^2\,C^2 \times 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\left(\frac{1}{0.85\,m} - \frac{1}{1.7\,m}\right) = 1.5 \cdot 10^8\,J$$

La potenza è il rapporto tra il lavoro compiuto e l'intervallo di tempo, per cui

$$\Delta t = \frac{L}{P} = \frac{1.5 \cdot 10^8}{0.83 \cdot 10^3\,\frac{J}{s}} = 183495\,s = 2.1\,giorni$$

Exercise 34. Nel rettangolo in figura, i lati misurano $5.0\,cm$ e $,15\,cm$, $q_1 = -5.0\,\mu C$ e $q_2 = +2.0\,\mu C$. Con $V = 0$ all'infinito, trovare i potenziali elettrici nei punti indicati con A e B. Trovare poi il lavoro necessario per spostare una terza carica $q_3 = +3.0\,\mu C$ da B ad A lungo una diagonale del rettangolo. Indicare se tale lavoro fa aumentare o diminuire l'energia elettrica dell'insieme delle tre cariche. Infine, se q_3 si spostasse lungo un percorso all'interno del rettangolo ma non sulla diagonale o fuori del rettangolo, indicare se il lavoro richiesto sarebbe uguale, maggiore o minore.

Soluzione: Calcoliamo il potenziale nel punto A

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-5.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.15\,,m} + \frac{2.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.05\,m}\right) = 6.0\cdot 10^4\,V$$

Calcoliamo il potenziale nel punto B

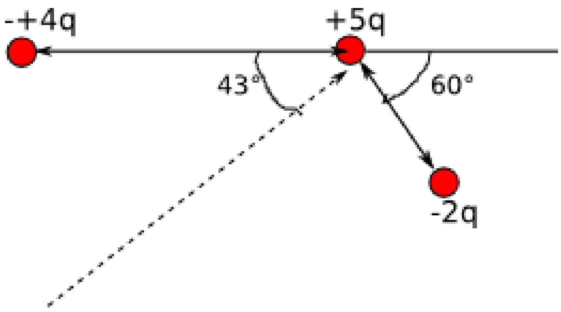
$$V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-5.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.05\,,m} + \frac{2.0\cdot 10^{-6}\,C}{0.15\,m}\right) = -7.8\cdot 10^5\,V$$

Il lavoro necessario per portare una carica q_3 da B ad A è dato da

$$L = \Delta V q = (V_A - V_B)\,q_3 = \left(6.0\cdot 10^4\,V + 7.8\cdot 10^4\,V\right)\times 3.0\cdot 10^{-6}\,C = +2.5\,J$$

Il lavoro è positivo e, pertanto, fa aumentare l'energia elettrica del sistema di cariche; infine, tale lavoro non cambia al variare della traiettoria seguita dalla carica, poiché il campo elettrico è conservativo.

Exercise 35. Trovare il lavoro richiesto per trasportare la carica $+5q$ dall'infinito lungo la linea tratteggiata in figura e per porla vicino alle due cariche fisse $+4q$ e $-2q$. Si ponga $d = 1.40\,cm$ e $q = 1.6\cdot 10^{-19}\,C$.



Soluzione: Per trovare il lavoro richiesto, supponiamo che, dapprima, il sistema sia composto dalle sole due cariche fisse. In tal caso, il potenziale nel punto in cui si dovrà trovare la terza carica è

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{6.4\cdot 10^{-19}\,C}{2.80\cdot 10^{-2}\,,m} + \frac{-3.2\cdot 10^{-19}\,C}{1.40\cdot 10^{-2}\,m}\right) = 0$$

Supponendo sempre $V(\infty) = 0$, osserviamo che la carica $+5q$ deve trovarsi in due punti che hanno lo stesso potenziale e pertanto $\Delta V = 0$ e, di conseguenza, si ha $L = 0$.

Exercise 36. Una particella con carica positiva$Q$ viene tenuta fissa in un punto P. Una seconda particella di massa m e carica negativa $-q$ si muove a una velocità costante su una circonferenza di raggio r_1. centrata sul punto P. Ricavare un'espressione per il lavoro L che deve essere svolto da un agente esterno sulla seconda particella per aumentare il raggio della sua orbita fino a divenire r_2.

Soluzione: La configurazione è quella tipica del modello atomico introdotto da Rutherford, detto a sistema planetario. Il sistema ha un'energia totale iniziale data dalla somma dell'energia potenziale e di quella cinetica della carica ruotante. Queste due grandezze cambiano compiendo lavoro dall'esterno, ma la loro somma rimane costante, poiché il campo elettrico è conservativo. Troviamo un'espressione dell'energia totale in funzione del raggio r. La carica fissa Q esercita una forza centripeta sulla carica $-q$ che si muove di moto circolare uniforme. Applicando la seconda legge di Newton, possiamo scrivere

$$F_c = m\frac{v^2}{r} = F_e = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Da questa relazione possiamo ricavare

$$mv^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

L'energia cinetica della carica $-q$ è data da $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r}$. La sua energia potenziale è $U = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$. L'energia totale sarà

$$E = K + U = \frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r} - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

Exercise 37. Calcolare il potenziale elettrico generato dal nucleo di atomo di idrogeno alla distanza media in cui si trova l'elettrone ($r = 5.29 \cdot 10^{-11}\, m$). Trovare l'energia potenziale elettrica dell'atomo quando l'elettrone si trova a tale distanza radiale, e l'energia cinetica dell'elettrone, assumendo che si muova su un'orbita circolare di questo raggio centrata sul nucleo. Trovare, infine, l'energia richiesta per ionizzare l'atomo di idrogeno, esprimendo tutte le energie in eV.

Soluzione: Calcoliamo il potenziale elettrico dell'elettrone dalla sua definizione, cioè

$$V = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \times 1.60 \cdot 10^{-19}\, C}{5.29 \cdot 10^{-11}\, m} = 27.2\, V$$

L'energia potenziale del sistema protone(nucleo)-elettrone è data da

$$U = Ve^+ = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8.99 \cdot 10^9 \times \left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)^2\, C^2}{5.29 \cdot 10^{-11}\, m} = -4.35 \cdot 10^{-18}\, J = 4.35 \cdot 10^{-18}\, J \times 6.242 \cdot 10^{18}\, \frac{eV}{J} = -27.2\, eV$$

Dall'esempio precedente, possiamo calcolare l'energia cinetica dell'elettrone

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = 13.6\, eV$$

La ionizzazione dell'atomo avviene fornendo a questo elettrone un'energia almeno pari a $13.6\, eV$.

Exercise 38. Una particella di carica $q = 3.1\, \mu C$ viene tenuta fissa in un punto P e una seconda particella di massa $m = 20\, mg$ e stessa carica q viene inizialmente tenuta a riposo a una distanza $r_1 = 0.90\, mm$ da P. La seconda particella viene poi rilasciata. Determinare la velocità quando si trova a una distanza $r_2 = 2.5\, mm$ da P.

Soluzione: Lo spostamento della carica dalla posizione iniziale a quella finale implica una variazione nell'energia potenziale del sistema. Tale variazione è data

$$\Delta U = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -8.99 \cdot 10^9 \times \left(3.1 \cdot 10^{-6}\right)^2\, C^2 \times \left(\frac{1}{2.5 \cdot 10^{-3}\, m} - \frac{1}{0.90 \cdot 10^{-3}\, m}\right) = 61.4\, J$$

Ma tale variazione dell'energia potenziale è uguale all'energia cinetica acquisita dalla carica mobile, il cui valore iniziale era zero. Pertanto,

$$\Delta U = \Delta K = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 61.4\, J}{20 \cdot 10^{-6}\, kg}} = 2.5 \cdot 10^3\, \frac{m}{s}$$

Exercise 39. Una carica $Q = -9.0\, nC$ è uniformemente distribuita intorno a un anello di raggio $1.5\, m$ che giace sul piano yz con il centro nell'origine. Una carica puntiforme $q = -6.0\, pC$ viene posta sull'asse x a $x = 3.0\, m$. Calcolare il lavoro svolto per spostare la carica puntiforme fino all'origine.

Soluzione: Il lavoro è pari alla variazione dell'energia potenziale. Nel caso di un disco carico, essa è data da

$$L=\Delta U=\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\sqrt{r^2+x^2}}\right)=8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times 9.0\cdot 10^{-9}\times 6.0\cdot 10^{-12}\,C^2\left(\frac{1}{1.5}-\frac{1}{\sqrt{2.25+9.0}}\right)m^{-1}=1.8\cdot 10^{-10}\,J$$

Exercise 40. Due sferette metalliche A e B di massa $m_A=5.00\,g$ e $m_B=10.0\,g$ portano cariche positive uguali $q=5.00\,\mu C$. Le sferette sono collegate con un filo privo di massa e di lunghezza $d=1.00\,m$, molto maggiore del raggio della sferetta. Trovare l'energia potenziale elettrica del sistema. Togliendo il filo, trovare l'accelerazione di ogni sfera in quell'istante e la velocità di ciascuna di esse molto tempo dopo il taglio del filo.

Soluzione: L'energia potenziale elettrica è data da

$$U=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d}=8.99\cdot 10^9\,\frac{N}{m^2C^2}\times 25.0\cdot 10^{-12}\,C^2=0.225\,J$$

Se il filo viene tagliato, le due sferette sono soggette ad una forza repulsiva di intensità uguale e contraria e l'accelerazione, applicando la seconda legge di Newton, sarà

$$ma=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2}=\frac{U}{d}$$

Le masse delle due sferette sono diverse, per cui, essendo $d=1.00\,m$,

$$\begin{aligned}a_A&=\frac{U}{d}\frac{1}{m_A}=\frac{0.225\,J}{5.00\cdot 10^{-3}\,kg}=45.0\,\frac{m}{s^2}\\ a_B&=\frac{U}{d}\frac{1}{m_B}=\frac{0.225\,J}{1.00\cdot 10^{-2}\,kg}=22.5\,\frac{m}{s^2}\end{aligned}$$

Dopo molto tempo dalla rottura del filo, possiamo supporre che l'effetto della forza sia trascurabile e che le sferette si muovano di moto rettilineo uniforme. Per calcolare la velocità osserviamo che l'intera energia potenziale si trasformerà in energia cinetica delle sferette, per cui

$$U=K_A+K_B=\frac{1}{2}\left(m_Av_A^2+m_Bv_B^2\right)$$

ma, $v_A=2v_B$,

$$0.450=5.00\cdot 10^{-3}\times v_A^2+1.00\cdot 10^{-2}\frac{v_A^2}{4}=7.50\cdot 10^{-3}v_A^2$$

$$v_A=\sqrt{\frac{0.450\,J}{7.50\cdot 10^{-3}\,kg}}=7.75\,\frac{m}{s}$$

e $v_B=-3.87\,\frac{m}{s}$. (Il segno meno rende conto del verso opposto di moto rispetto alla sferetta A).

Exercise 41. Due superfici conduttrici parallele, piane, distanziate di $d=1.00\,cm$ hanno una differenza di potenziale $\Delta V=625\,V$. Un elettrone viene proiettato da un piatto verso l'altro. Trovare la velocità iniziale dell'elettrone se esso si ferma proprio sulla superficie del secondo piatto.

Soluzione: Il secondo piatto avrà una carica negativa che si oppone al moto dell'elettrone tanto da ridurre la sua velocità a zero nello spazio di $1.00\,cm$. Il lavoro per fermare l'elettrone è pari all'energia potenziale $U=\Delta Ve=625\,V\times 1.60\cdot 10^{-19}\,C=1.00\cdot 10^{-16}\,J$. Tale lavoro è uguale alla variazione dell'energia cinetica dell'elettrone, per cui

$$\Delta K=K_f-K_i=K_f-0=\frac{1}{2}mV_i^2$$

da cui

$$v_i=\sqrt{\frac{2.00\cdot 10^{-16}}{9.11\cdot 10^{-31}}}=1.48\cdot 10^7\,\frac{m}{s}$$

Exercise 42. Un guscio sferico sottile non conducente, di raggio R viene montato su un supporto isolante e caricato a un potenziale $-V$. Un elettrone viene lanciato la un punto P a distanza r dal centro del guscio ($r\gg R$) con velocità iniziale v_0. diretto radialmente verso l'interno. Trovare il valore di v_0 affinché l'elettrone riesca a raggiungere esattamente l'involucro prima di tornare indietro.

Soluzione: La velocità iniziale viene azzerata a causa della forza repulsiva che agisce sull'elettrone, la cui energia cinetica si azzera. Il lavoro necessario è pari all'energia potenziale sull'involucro. Pertanto,

$$-Ve=\frac{1}{2}m\left(v_f^2-v_0^2\right)=-\frac{1}{2}mv_0^2$$

Possiamo, pertanto, ricavare la velocità

$$v_0=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Exercise 43. Due elettroni sono tenuti fissi a $2.0\,cm$ di distanza. Un altro elettrone viene lanciato dall'infinito e si arresta a metà strada tra i due. Trovare la sua velocità iniziale.

Soluzione: Possiamo utilizzare la relazione dell'esercizio precedente che esprime $v_0=f(V)$. Calcoliamo, dapprima, il potenziale nel punto medio del segmento che rappresenta la distanza tra le due cariche

$$V=\frac{2e}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{8.99\cdot10^9\,\frac{N}{m^2C^2}\times2\times1.60\cdot10^{-19}\,C}{1.0\cdot10^{-2}\,m}=2.9\cdot10^{-7}\,V$$

$$v_0=\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\sqrt{\frac{2\times1.60\cdot10^{-19}\,C\times2.9\cdot10^{-7}\,V}{9.11\cdot10^{-31}\,kg}}=319\,\frac{m}{s}$$

Exercise 44. Si consideri un elettrone sulla superficie di una sfera uniformemente carica di raggio $1.0\,cm$ e carica totale $1.6\cdot10^{-15}\,C$. Trovare la velocità iniziale che dovrà avere l'elettrone per raggiungere una distanza infinita dalla sfera con energia cinetica nulla.

Soluzione: L'elettrone deve possedere un'energia cinetica che gli consenta di vincere l'attrazione della sfera e quindi la velocità iniziale si può intendere come la velocità di fuga dalla sfera. Calcoliamo l'energia potenziale dell'elettrone

$$U=-\frac{qe^-}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{8.99\cdot10^9\,\frac{N}{m^2C^2}\times1.60\cdot10^{-19}\,C\times1.6\cdot10^{-15}\,C}{1.0\cdot10^{-2}\,m}=2.3\cdot10^{-22}\,J$$

L'energia totale si conserva e il campo elettrico è conservativo, pertanto

$$2.3\cdot10^{-22}\,J=\frac{1}{2}\times9.11\cdot10^{-31}\,kg\times v_0^2$$

da cui

$$v_0=\sqrt{\frac{2\times2.3\cdot10^{-22}\,J}{9.11\cdot10^{-31}\,kg}}=2.2\cdot10^4\,\frac{m}{s}$$

Exercise 45. Un elettrone viene lanciato con una velocità iniziale di $3.2\cdot10^5\,\frac{m}{s}$ direttamente verso un protone tenuto fisso in un punto. Se l'elettrone è inizialmente a una grande distanza dal protone, trovare la distanza dal protone alla quale la velocità istantanea dell'elettrone sarà uguale al doppio del sua valore iniziale.

Soluzione: Calcoliamo la variazione dell'energia cinetica dell'elettrone nelle due posizioni rispetto al protone fisso.

$$\Delta K=\frac{1}{2}m\left(v_f^2-v_0^2\right)$$

se $v_f=2v_0$, avremo

$$\Delta K=\frac{3}{2}mv_0^2$$

Uguagliamo sempre l'energia potenziale con la variazione dell'energia cinetica

$$U=\frac{3}{2}mv_0^2=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

da cui

$$r=\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 3mv_0^2}=\frac{8.99\cdot10^9\,\frac{N}{m^2C^2}\times2\times\left(1.60\cdot10^{-19}\right)\,C^2}{3\times9.11\cdot10^{-31}\,kg\times\left(3.2\cdot10^5\right)^2\,\frac{m^2}{s^2}}=1.6\cdot10^{-9}\,m$$

Exercise 46. Una sfera metallica cava è caricata con un potenziale di $+400\,V$ rispetto al terreno ($V = 0$) e ha una carica di $5.0 \cdot 10^{-9}\,C$. Trovare il potenziale elettrico al centro della sfera.

Soluzione: Una carica in eccesso contenuta in un conduttore in equilibrio si dispone sulla superficie esterna del conduttore stesso. La carica porta l'intero conduttore, compresi i punti sulla superficie e quelli interni, a un potenziale uniforme. Da ciò segue che $V_{centro} = +400$V.

Exercise 47. Trovare la carica di una sfera conduttrice di raggio $r = 0.15\,m$ se il potenziale della sfera è $1500\,V$ e $V(\infty) = 0$.

Soluzione: Esprimiamo il potenziale sulla superficie della sfera

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

da cui

$$q = 4\pi\varepsilon_0 rV = \left(8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\right)^{-1} \times 0.15\,m \times 1500\,V = 2.5 \cdot 10^{-8}\,C$$

Exercise 48. I centri di due sfere metalliche, ciascuna di raggio $3.0\,cm$, sono separati di $2.0\,m$. Una ha carica $q_1 = +1.0 \cdot 10^{-8}\,C$, l'altra $q_2 = -3.0 \cdot 10^{-8}\,C$. Si assuma che la loro distanza sia abbastanza grande, rispetto alla loro dimensione, da considerare la loro carica uniformemente distribuita, Assumendo $V(\infty) = 0$, calcolare il potenziale nel punto intermedio tra i loro centri e il potenziale elettrico di ciascuna sfera.

Soluzione: Nelle condizioni assegnate, il potenziale nel punto intermedio è calcolato mediante il principio di sovrapposizione:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r}\right) = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \left(\frac{+1.0 \cdot 10^{-8}\,C}{1.0\,m} + \frac{-3.0 \cdot 10^{-8}\,C}{1.0\,m}\right) = -180\,V$$

Il potenziale di ogni sfera è

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{+1.0 \cdot 10^{-8}\,C}{3.0 \cdot 10^{-2} m} = 2997\,V \\ V_2 &= \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{-3.0 \cdot 10^{-8}\,C}{3.0 \cdot 10^{-2} m} = -8990\,V \end{aligned}$$

Exercise 49. Una sfera metallica avente raggio di $15\,cm$ ha una carica netta di $3.0 \cdot 10^{-8}\,C$. Trovare il campo elettrico sulla superficie della sfera. Se $V(\infty) = 0$, trovare il potenziale elettrico sulla superficie della sfera e la distanza dalla superficie alla quale il potenziale elettrico diminuisce di $500\,V$.

Soluzione: Il campo elettrico è calcolato attraverso la legge di Gauss applicato ad una superficie gaussiano sferica:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{3.0 \cdot 10^{-8}\,C}{\left(15 \cdot 10^{-2}\right)^2 m^2} = 11987\,\frac{N}{C}\left(\frac{V}{m}\right)$$

il potenziale sulla superficie è

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{3.0 \cdot 10^{-8}\,C}{15 \cdot 10^{-2} m} = 1800\,V$$

Se il potenziale si riduce di $500\,V$, avrà un valore pari a $1300\,V$, pertanto, ricavando la distanza r, avremo

$$V_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\left(R + r\right)}$$

da cui si ricava

$$r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 V_r} - R = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{3.0 \cdot 10^{-8}\,C}{1300\,V} - 0.15\,m = 5.7\,cm$$