Problemi di Massimo e Minimo

svolti dal prof. Gianluigi Trivia

ad uso degli studenti della scuola superiore

Esercizio 1. Ridare a un filo di ferro di lunghezza l la forma di un rettangolo in modo tale che l'area di quest'ultimo sia massima.

Soluzione. Detti x e y la base e l'altezza del rettangolo, il suo perimetro sarà espresso da $2(x+y)=l$; da ciò si ricava che $y=\frac{l}{2}-x$ e l'area del rettangolo sarà

$$A=x\left(\frac{l}{2}-x\right)=\frac{l}{2}x-x^2$$

Troviamo quando tale funzione continua ammette un valore di max (l'esistenza è data dal th. di Weierstrass). Calcoliamo la derivata della funzione e studiamone il segno

$$A'=\tfrac{l}{2}-2x>0 \qquad x<\tfrac{l}{4}$$

La funzione risulta crescente per $x<\frac{l}{4}$ e decrescente nell'intervallo complementare; pertanto, per $x=\frac{l}{4}$ la funzione presenta un valore di massimo. Se $x=\frac{l}{4}$, allora $y=\frac{l}{4}$ e il rettangolo sarà un quadrato.

Esercizio 2. Fra i triangoli rettangoli di perimetro $2p$ dato, determinare quello di area maggiore.

Soluzione. Posti x e y i cateti del triangolo rettangolo, l'ipotenusa sarà data da $\sqrt{x^2+y^2}$. Il perimetro sarà pertanto $x+y+\sqrt{x^2-y^2}=2p$. Svolgiamo i calcoli, elevando al quadrato e ordinando

$$4p^2+2xy-4px-4py=0$$

Ricavando y si ha

$$y=\frac{2px-2p^2}{x-2p}$$

L'area del triangolo sarà

$$A=\frac{px-x^2}{x-2p}$$

Calcoliamo la derivata e studiamo il suo segno

$$A'=\frac{(2x-p)(x-2p)+px-x^2}{(x-2p)^2}=\frac{x^2-4px+2p^2}{(x-2p)^2}$$

Il denominatore è sempre positivo per $x\neq 2p$ (caso in cui un cateto è lungo come l'intero perimetro, vanificando la costruzione del triangolo); studiamo quindi il numeratore che si annulla per $x=2p\pm p\sqrt{2}$; la soluzione $2p+p\sqrt{2}$ non è accettabile, pertanto avremo un punto stazionario, max, per $x=p\left(2-\sqrt{2}\right)$. Il valore di y sarà $y=\frac{4p^2-2p^2\sqrt{2}-2p^2}{-p\sqrt{2}}=p\left(2-\sqrt{2}\right)$. I due cateti risultano quindi uguali e il triangolo è rettangolo isoscele.

Esercizio 3. Da un foglio quadrato di cartone di lato a si chiede di fare una scatola rettangolare, senza coperchio, di capacità massima tagliando sugli angoli del foglio quadrati e piegando in alto i bordi della figura a forma di croce così ottenuta.

Soluzione. Detto a il lato del quadrato, indichiamo con x il lato del quadrato da tagliare dagli angoli. Ripiegando queste parti si avrà una scatola di base $a-2x$, mentre le pareti laterali avranno larghezza $a-2x$ e altezza x. Il volume di questa scatola sarà $V=A_{base}h=(a-2x)^2x=4x^3-4ax^2+a^2x$. Troviamo il valore massimo

$$V'=12x^2-8ax+a^2$$

Studiando il segno, si ottiene che il polinomio è positivo per $x<\frac{a}{6}$ o $x>\frac{a}{2}$. Si avrà, quindi un massimo per $x=\frac{a}{6}$.

Esercizio 4. Un serbatoio aperto di base quadrata deve avere una capacità di V litri. Quali debbono essere le dimensioni del serbatoio perché la quantità di latta utilizzata per la sua fabbricazione sia minima?

Soluzione. La quantità di latta necessaria corrisponde alla superficie totale, escludendo il coperchio. Il volume è dato da $V = A_b h = x^2 y$, indicando con x il lato del quadrato e con y l'altezza del serbatoio. Pertanto, $y = \frac{V}{x^2}$. Ora la superficie totale è data dalla somma dell'area laterale e della base, per cui

$$A_{ST} = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{4V}{x}$$

Questa area deve essere minima, per cui

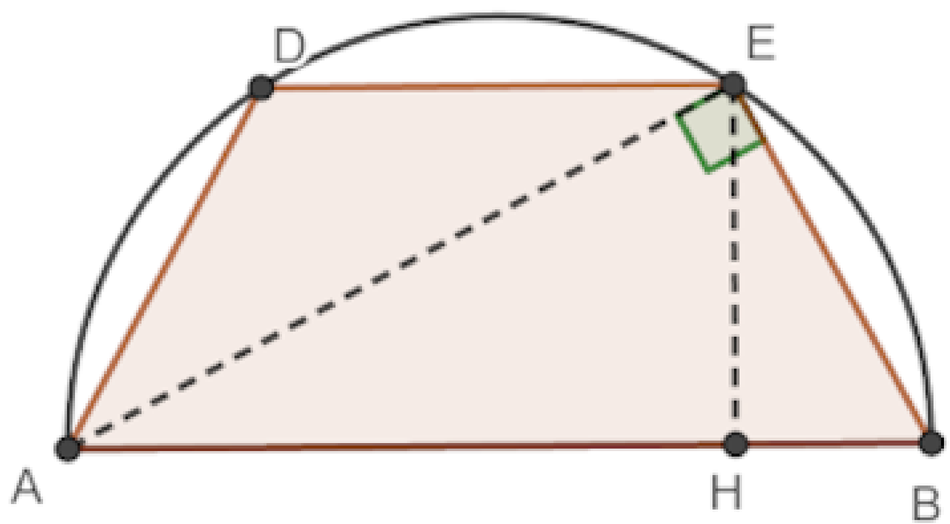
$$A'_{ST} = 2x - \frac{4V}{x^2} = \frac{2x^3 - 4V}{x^2}$$

Il valore di minimo sarà ottenibile uguagliando a zero il numeratore, per cui $x^3 = 2V$, ossia $x = \sqrt[3]{2V}$. L'altezza del serbatoio sarà $y = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$. Si può osservare che il rapporto tra le due dimensioni è dato da

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{\sqrt[3]{\frac{V}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{8V}{V}} = 2$$

per cui la base del serbatoio sarà doppia della sua altezza.

Esercizio 5. Si consideri un trapezio isoscele inscritto in una semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ ed avente per base maggiore il segmento AB.Trovare quando l'area di questo trapezio è massima.



Soluzione. L'area del trapezio è data da $A = \frac{(AB+ED)\times EH}{2}$. Indichiamo $HB = x$ che apparterrà all'intervallo $0 < x < r$. Essendo il trapezio isoscele, risulterà che $DE = AB - 2BH = 2r - 2x = 2(r - x)$. Osserviamo che i triangolo AEB è rettangolo perché inscritto in una semicirconferenza (l'angolo alla circonferenza sotteso dalla corda AB, il diametro, è la metà dell'angolo al centro sotteso dalla stessa corda, un angolo piatto). Possiamo ora ricavare l'altezza del trapezio, ricordando il secondo teorema di Euclide (l'altezza di un triangolo rettangolo relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa) applicato al triangolo rettangolo AEB. Avremo

$$AH : HE = HE : HB$$

cioè

$$2r - x : HE = HE : x$$

moltiplicando tra loro i medi e gli estremi si ha e considerando solo i valori di x appartenenti all'intervallo dato

$$HE = \sqrt{x(2r - x)}$$

L'area del trapezio sarà pertanto

$$A = y = \frac{(2r + 2r - 2x)\sqrt{x(2r - x)}}{2} = (2r - x)\sqrt{2rx - x^2}$$

Troviamo il valore di x affinché l'area sia massima calcolando la derivata prima

$$y' = -\sqrt{x(2r-x)} + (2r-x)\frac{2r-2x}{2\sqrt{x(2r-x)}} = \frac{-x(2r-x)+(2r-x)(r-x)}{\sqrt{x(2r-x)}}$$

La derivata prima si annulla per

$$-2rx + x^2 + 2r^2 - 2rx - rx + x^2 = 0$$

sommando i termini simili

$$2x^2 - 5rx + 2rr^2 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = 2r \quad x = \tfrac{r}{2}$$

L'unica soluzione accettabile è $x = \frac{r}{2}$, cioè la base minore deve essere la metà della base maggiore.

Esercizio 6. Quale cilindro di un dato volume ha la superficie totale minima?

Soluzione. L'esercizio è simile al precedente. Il volume del cilindro è $V = \pi r^2 h$; la superficie totale si esprime come

$$S_t = A_b + S_l = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h)$$

Possiamo esprimere l'altezza come $h = \frac{V}{\pi r^2}$ e sostituendo nella superficie totale si ha

$$S_t = 2\pi r\left(r + \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Per trovare il valore di minimo uguagliamo a zero la derivata prima di S_t,

$$S_t' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2} = 0$$

da cui $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Il valore dell'altezza sarà

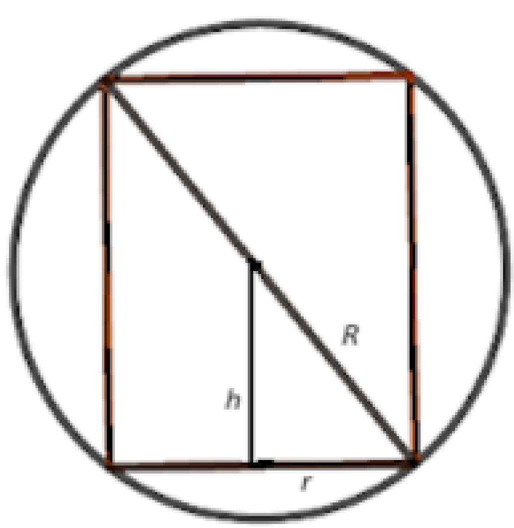
$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{\frac{V^2\pi^3}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{4\pi^2 V^3}{V^2\pi^3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Anche in questo caso calcoliamo il rapporto tra le due grandezze

$$\frac{h}{r} = \frac{\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}}{\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}} = \sqrt[3]{\frac{8\pi V}{\pi V}} = 2$$

pertanto, l'altezza del cilindro dovrà essere il doppio del raggio di base.

Esercizio 7. Inscrivere in una sfera data un cilindro di volume massimo.



Soluzione. Sia R il raggio della sfera e r quello della base del cilindro, h metà altezza del cilindro. Tra questi segmenti vale la relazione

$$h^2 + r^2 = R^2$$

da cui

$$r^2 = R^2 - h^2$$

Ora, il volume del cilindro è dato da $V = \pi r^2 (2h)$, cioè $V_{cil} = 2\pi h \left(R^2 - h^2\right) = 2\pi R^2 h - 2\pi h^3$. Uguagliamo a zero la sua derivata rispetto ad h, e avremo

$$V' = 2\pi R^2 - 6\pi h^2 = 0$$

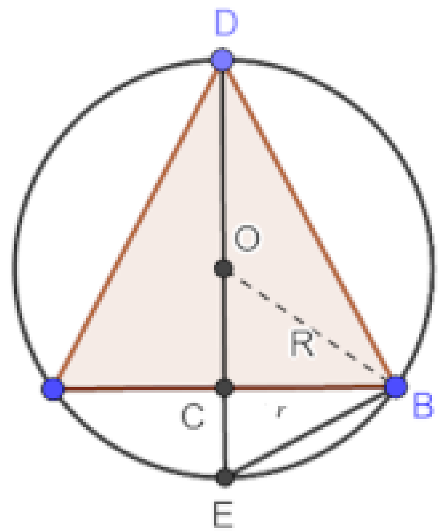
da cui $h = \sqrt{\frac{R^2}{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$; sostituiamo per ottenere il raggio del cilindro

$$r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$$

da cui $r = R\frac{\sqrt{6}}{3}$. Anche qui valutiamo il rapporto tra le due grandezze

$$\frac{h}{r} = \frac{\frac{R\sqrt{3}}{3}}{R\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esercizio 8. Inscrivere in una sfera data un cono di volume massimo.



Soluzione. Il volume di un cono è dato da $V = \frac{A_b h}{3}$. Applichiamo il 2° teorema di Euclide al triangolo DBE per il quale l'altezza di un triangolo rettangolo è media proporzionale tra le proiezioni dei lati sull'ipotenusa. Posto $OB = R$ (raggio sfera), $BC = r$ (raggio di base del cono retto) e $CD = h$, avremo

$$h : r = r : (2r - h)$$

da cui

$$r^2 = 2Rh - h^2$$

Calcoliamo il volume del cono, sostituendo il valore ottenuto di r^2

$$V = \frac{\pi}{3} h r^2 = \frac{\pi}{3} h \left(2Rh - h^2\right)$$

Cerchiamo il cono di volume massimo

$$V' = \tfrac{4\pi}{3} Rh - \pi h^2 = 0 \qquad h\left(\tfrac{4}{3}R - h\right) = 0$$

ossia

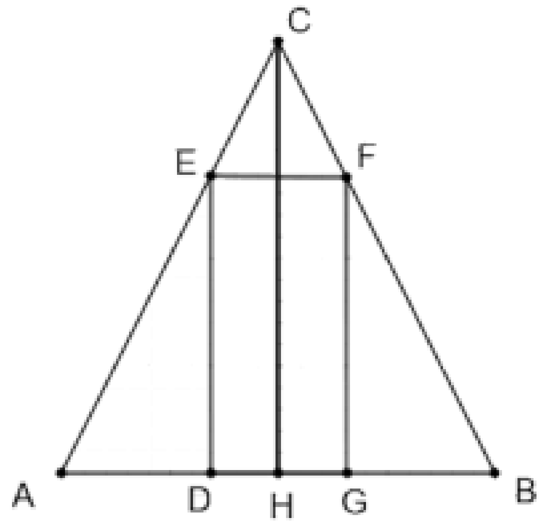
$$h = 0 \qquad h = \tfrac{4}{3}R$$

La soluzione $h = 0$ restituisce un caso limite nel quale il cono ha altezza nulla. Calcoliamo il raggio del cono

$$r^2 = 2R \cdot \frac{4}{3} R - \frac{16}{9} R^2 = \frac{8}{9} R^2$$

da cui $r = \frac{2}{3}R\sqrt{2}$.

Esercizio 9. Circoscrivere a un cilindro dato un cono retto di volume minimo (i piani ed i centri di loro basi circolari coincidono).



Soluzione. Siano assegnati il raggio di base e l'altezza del cilindro, che indichiamo come $GH = r$ e $ED = h$. Indichiamo con H e R rispettivamente l'altezza e il raggio di base del cono, considerati incogniti. Osserviamo che i triangoli ABC e ECF sono simili avendo gli stessi angoli, pertanto

$$AB : EF = GH : ED$$

sostituendo i valori assegnati, otteniamo

$$2R : 2r = H : (H - h)$$

da cui si ricava H in funzione di R (per avere una sola incognita)

$$H(R - r) = Rh \quad H = \frac{Rh}{R-r}$$

Il volume del cono è dato da $V_{cono} = \frac{\pi R^2 H}{3}$ e sostituendo il valore di H trovato, si ha

$$V_{cono} = \frac{\pi R^3 h}{3(R - r)}$$

Determiniamo ora il valore di R per il quale il volume è minimo

$$V' = \frac{9\pi h R^2 (R - r) - 3\pi h R^2}{9(R - r)^2} = \frac{2\pi h R^3 - 3\pi h r R^2}{3(R - r)^2}$$

Uguagliando a zero il numeratore abbiamo

$$2R^3 - 3rR^2 = 0$$

e si ottengono le soluzioni $R = 0$ e $R = \frac{3}{2}r$. L'altezza del cono sarà

$$H = \frac{\frac{3}{2}rh}{\frac{3}{2}r - r} = 3h$$

Esercizio 10. Un recipiente aperto è costituito di un cilindro che per base ha una semisfera; lo spessore delle pareti è costante. Quali debbono essere le dimensioni del recipiente di capacità data perché la quantità di materiale utilizzato per la sua fabbricazione sia minima?

Soluzione. Sia h l'altezza del cilindro e r il raggio di base comune del cilindro e della semisfera. La capacità, che corrisponde al volume interno del recipiente, è assegnata. Il volume totale è pertanto dato da

$$V = V_{cil} + V_{esf} = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$$

Possiamo esprimere h in funzione di r

$$h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$$

La superficie totale del solido composto è data da $S_T = S_{lat}^{cil} + \frac{1}{2}S_{sfera} = 2\pi rh + 2\pi r^2$. Sostituiamo in questa relazione il valore di h trovato per esprimerla in una sola incognita:

$$S_t = 2\pi r\left(\frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2 = \frac{2V + \frac{2}{3}\pi r^3}{r}$$

Questa superficie deve essere minima, pertanto

$$S_t' = \frac{2\pi r^3 - 2V - \frac{2}{3}\pi r^3}{r^2}$$

Eguagliamo a zero il numeratore per trovare il valore di minimo

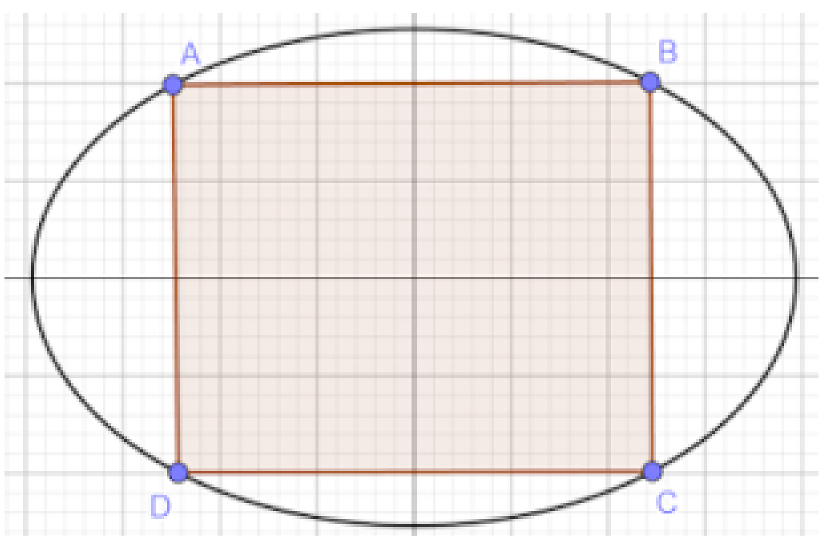
$$\frac{4}{3}\pi r^3 - 2V = 0$$

da cui $r^3 = \frac{3V}{2\pi}$. Sostituiamo questo valore nella relazione che esprime h in funzione di r

$$h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi \cdot \frac{3V}{2\pi}}{\pi r^2} = \frac{V - V}{\pi r^2} = 0$$

La condizione di minimo prevede pertanto che il solido sia composto dalla sola semisfera con raggio dato dal valore ottenuto.

Esercizio 11. Inscrivere in un'ellisse data un rettangolo di area massima i cui lati siano paralleli agli assi dell'ellisse.



Soluzione. L'equazione canonica dell'ellisse è $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, dove a, b sono rispettivamente i semiassi maggiore e minore. Ricaviamo le coordinate, per esempio, del punto B. Per simmetria si ricaveranno quelle di tutti gli altri punti A, C, D. Le coordinate, entrambe positive (vedi figura) sono $C\left(\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}; y\right)$. La base del rettangolo sarà pertanto $\frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$, mentre l'altezza sarà $2y$. Calcoliamo l'area del rettangolo

$$A = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2 - y^2} \cdot 2y = \frac{4ay}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

Calcoliamo la derivata prima per identificare le condizioni di massimo

$$A' = \frac{4a}{b}\sqrt{b^2-y^2} + \frac{4ay}{b}\frac{-2y}{2\sqrt{b^2-y^2}}$$

eguagliando la derivata a zero, moltiplicando per $2b\sqrt{b^2-y^2}$ e svolgendo i relativi calcoli si ha

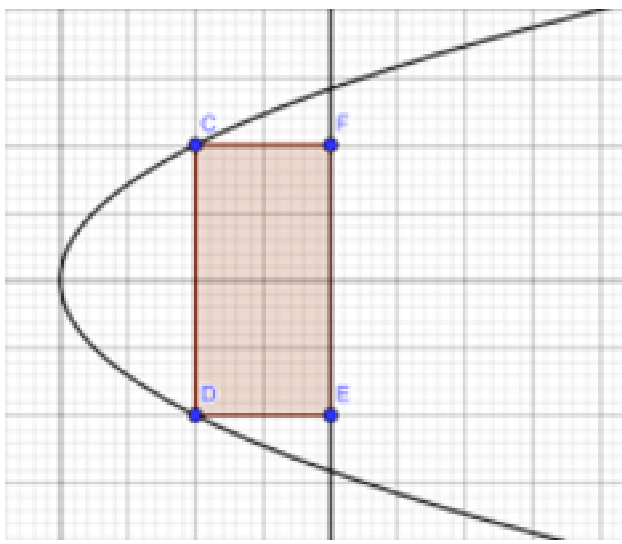
$$y^2 = \tfrac{b^2}{2} \quad y = \left|\tfrac{b\sqrt{2}}{2}\right|$$

L'altezza del rettangolo sarà quindi $BC = b\sqrt{2}$. Calcoliamo la base del rettangolo, sostituendo il valore trovato di y^2 nell'equazione dell'ellisse.

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - \frac{b^2}{2}\right)$$

da cui $x = \left|\frac{a\sqrt{2}}{2}\right|$. La base sarà quindi $AB = a\sqrt{2}$.

Problema. Inscrivere nel segmento di parabola $y^2 = 2px$ determinato dalla retta $x = 2a$, un rettangolo di area massima.



Soluzione. Indichiamo il punto C con le coordinate $C(x; y)$, ma appartenendo alla parabola, possiamo scrivere $(x, \sqrt{2px})$; il punto C avrà come coordinate $(x; \sqrt{2px})$. Pertanto il rettangolo avrà dimensioni $CF = 2a - x$ e $EF = 2\sqrt{2px}$. L'area del rettangolo sarà pertanto

$$A = 2(2a - x)\sqrt{2px}$$

Calcoliamo la sua derivata prima

$$A' = \frac{4p}{2\sqrt{2px}}(2a - x) - 2\sqrt{2px} = \frac{4ap - 6px}{\sqrt{2px}}$$

La derivata si annulla per $x = \frac{2}{3}a$; il valore di y sarà $y = \sqrt{2p \cdot \frac{2}{3}a} = 2\sqrt{\frac{ap}{3}}$.

Esercizio 12. Essendo date N pile elettriche le possiamo disporre in modi differenti per formare una batteria collegandole in serie di n pile, poi collegando in parallelo i gruppi così ottenuti (in numero di $\frac{N}{n}$). L'intensità di corrente prodotta da questa batteria è data dalla formula

$$I = \frac{Nn'\mathcal{E}}{NR + n^2 r}$$

dove $\mathcal{E}$ è la forza elettromotrice di una pila, r la sua resistenza interna, R la sua resistenza esterna. Determinare per quale valore di n la batteria fornisce una corrente massima.

Soluzione. Per trovare i valori che rendono massima la relazione indicata, calcoliamo la sua derivata prima rispetto a n

$$\frac{dI}{dn}=\frac{N\mathcal{E}\left(NR+n^2r\right)-2Nn^2r\mathcal{E}}{\left(NR+n^2r\right)^2}$$

Uguagliamo a zero tale derivata

$$N^2R\mathcal{E}+N\mathcal{E}rn^2-2Nn^2r\mathcal{E}=0$$

dividendo tutto per $N\mathcal{E}$ si ha

$$NR+rn^2-2rn^2=0$$

ossia

$$rn^2=NR \quad n=\sqrt{\frac{NR}{r}}$$

Esercizio 13. Determinare per quale diametro y di un'apertura circolare di una diga il consumo d'acqua Q al secondo è massimo, se $Q=cy\sqrt{h-y}$, dove h è la profondità del punto più basso dell'apertura (h ed il coefficiente empirico c sono costanti).

Soluzione. Calcoliamo ancora la derivata prima rispetto ad y di Q:

$$\frac{dQ}{dy}=c\sqrt{h-y}-\frac{cy}{2\sqrt{h-y}}=\frac{2c\left(h-y\right)-cy}{2\sqrt{h-y}}$$

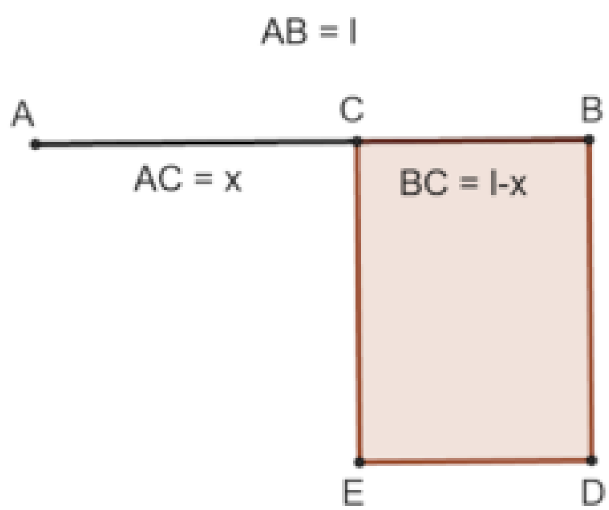
Uguagliando la derivata a zero, otteniamo

$$2ch-2cy-cy=0$$

ordinando e svolgendo i calcoli si ha la soluzione

$$y=\frac{2}{3}h$$

Esercizio 14. Sia dato un segmento di lunghezza l. si chiede di dividerlo in modo tale che l'area del rettangolo avente come dimensioni i due segmenti così ottenuti, sia massima.

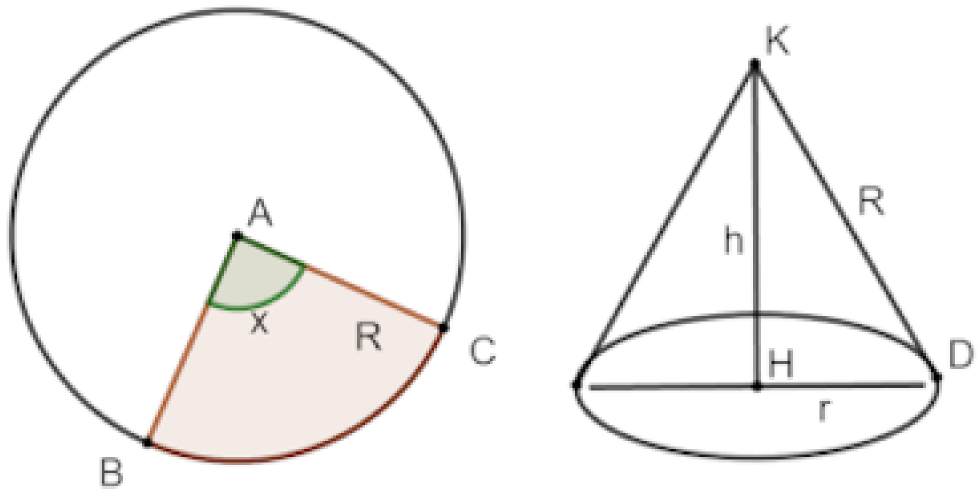


Soluzione. Sia $AB=x$; posto $AC=x$, con $0<x<l$; si ha $CB=l-x$ e l'area del rettangolo $A=x\left(l-x\right)$. Per trovare il massimo di questa funzione, calcoliamo la derivata prima

$$A'=l-2x$$

il massimo corrisponderà a $x=\frac{l}{2}$ (in questo caso la sua derivata seconda è sempre negativa essendo uguale a -2). Cioè il rettangolo di area massima è il quadrato avente per lato la metà del segmento dato.

Esempio 15. In un cerchio di raggio R si elimina un settore circolare e si forma con la parte rimanente un cono. Si chiede di determinare l'angolo del settore circolare eliminato affinché il volume del cono sia massimo.



Soluzione. Il volume di un cono è dato da $V_{cono} = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Posta l'ampiezza dell'angolo $B\hat{A}C = x$ (espresso in radianti), con $0 < x < 2\pi$,si ha, per la definizione di radiante, che l'arco rimanente dopo l'eliminazione del settore circolare è $\overset{\frown}{CB}= Rx = l$. l sarà la misura della circonferenza di base del cono, e avremo $Rx = 2\pi r$, da cui $r = \frac{Rx}{2\pi}$. Possiamo ricavare l'altezza del cono dal teorema di Pitagora applicato al triangolo HDK

$$KH = h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}}$$

Possiamo ora esprimere il volume del cono in funzione di x

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi R^2 x^2}{4\pi^2} \times \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3x^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Il volume potrà essere massimo se la sua derivata prima si annulla:

$$V'_{cono} = \frac{R^3x}{12\pi^2}\sqrt{4\pi^2 - x^2} + \frac{R^3x^2}{24\pi^2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = \frac{8\pi^2 R^3 x - 3R^3x^3}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}} = 0$$

risolvendo si ha

$$R^3x\left(8\pi^2 - 3x^2\right) =$$

le cui soluzioni sono

$$x = 0 \quad x = \pm 2\pi\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

le soluzioni $x = 0$ e $x = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ non appartengono all'intervallo $(0, 2\pi)$ e la soluzione accettabile sarà $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ che corrisponde ad un angolo di 294°.

Esercizio 16. Trovare due numeri, la cui somma è $2a$, tali che la somma delle loro radici quadrate sia massima.

Soluzione. Detto x un numero, il secondo sarà $2a - x$. L'intervallo di definizione sarà $0 \leq x \leq 2a$. I due numeri sono intesi come positivi, per dare significato alle loro radici quadrate. Indichiamo con y, la somma delle radici quadrate

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{2a - x}$$

Studiamo la condizione di massimo

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2a - x}}$$

studiamo il segno della derivata prima

$$y^{'} > 0 \qquad \frac{\sqrt{2a-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x\,(2a-x)}} > 0$$

$$N > 0 \qquad \sqrt{2a-x} > \sqrt{x}$$
$$D > 0 \qquad \sqrt{x\,(2a-x)} > 0$$

Il denominatore è sempre positivo nell'intervallo di definizione; il numeratore sarà positivo per

$$2a - 2x > 0 \qquad x < a$$

Riassumendo si avrà la condizione massima quando i due numeri sono uguali, cioè

$$x = a$$

Massimi e minimi relativi ai triangoli

Esercizio 17. Di tutti i triangoli rettangoli aventi costante la somma dei cateti, trovare quello in cui è massima l'altezza relativa all'ipotenusa.

Indichiamo con x un cateto, con $k - x$ l'altro e con y l'altezza relativa all'ipotenusa. Applicando il secondo teorema di Euclide (il quadrato sull'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo avente come dimensioni i due cateti), si ha

$$y = \sqrt{x\,(k-x)}$$

Calcoliamo la derivata di questa funzione

$$y^{'} = \frac{k-2x}{2\sqrt{kx-x^2}}$$

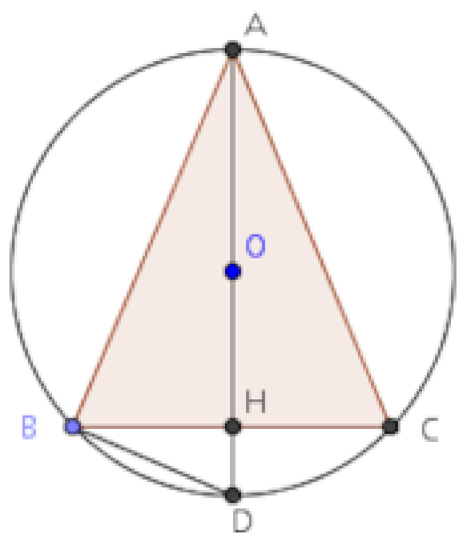
studiamo il segno della derivata

$$\frac{k-2x}{2\sqrt{kx-x^2}} > 0$$

$$N > 0 \quad per \quad x < \frac{k}{2}$$
$$D > 0 \quad per \quad 0 < x < k$$

La funzione risulta avere un massimo per $x = \frac{k}{2}$, cioè quando il triangolo rettangolo è isoscele.

Esercizio 18. Di tutti i triangoli isosceli inscritti nella stessa circonferenza di raggio R, trovare quello in cui è massima la somma della base e dell'altezza.



Soluzione. Indichiamo l'altezza $AH = x$. La base BC può essere ricavata applicando il secondo teorema di Euclide

$$BH^2 = AH \cdot HD$$

da cui, essendo $BC = 2BH$

$$BC = 2\sqrt{x\,(2R-x)}$$

con $0 < x < 2R$. La somma dei due segmenti, y, vale

$$y = x + 2\sqrt{x\,(2R-x)}$$

Calcoliamo la derivata prima

$$y^{'} = 1 + \frac{2R-2x}{\sqrt{x\,(2R-x)}} = \frac{\sqrt{x\,(2R-x)}+2R-2x}{\sqrt{x\,(2R-x)}}$$

Studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{lll} N>0 & per & \sqrt{x\,(2R-x)} > 2x-2R \\ D>0 & & \forall x \in (0;2R) \end{array}$$

Analizziamo quindi il solo numeratore, che si presenta come una disequazione irrazionale

$$\begin{cases} 2x-2R>0 \\ 2Rx-x^2 > 4x^2-8Rx+4R^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x<R \\ -x^2+2Rx>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>R \\ 5x^2-10Rx+4R^2>0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<R \\ 0<x<2R \end{cases}$$

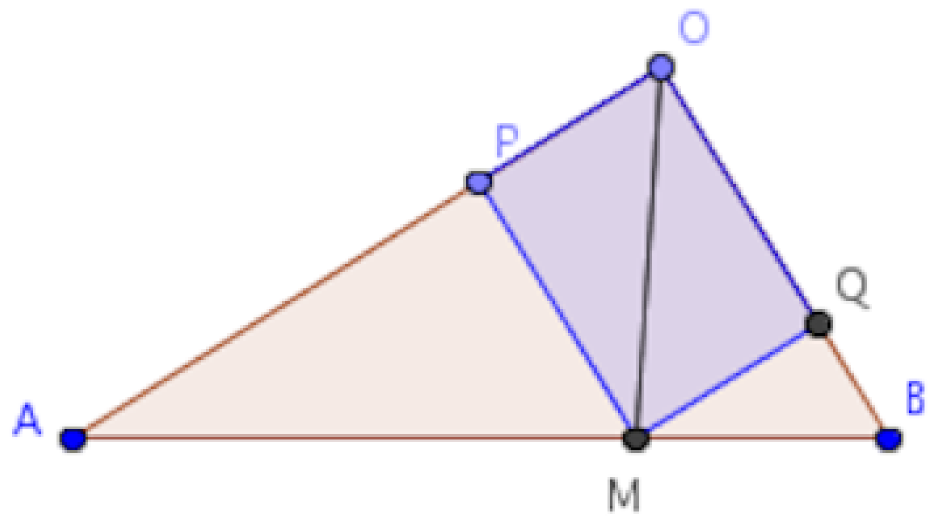
$$\begin{cases} x>R \\ x<R\left(1-\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \vee x>R\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \end{cases} \cup \quad 0<x<R$$

$$R<x<R\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \quad \cup \quad 0<x<R$$

da cui si ottiene il massimo per $x = R\left(1+\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e tale massimo vale

$$\begin{aligned} y &= R + \frac{R\sqrt{5}}{5} + 2\sqrt{\left(R+\frac{R\sqrt{5}}{5}\right)\left(2R-R-\frac{R\sqrt{5}}{5}\right)} \\ &= R + \frac{R\sqrt{5}}{5} + \frac{4R\sqrt{5}}{5} = R + R\sqrt{5} \end{aligned}$$

Esercizio 19. In un triangolo AOB rettangolo in O, inscrivere un rettangolo $OPMQ$ (che abbia un angolo retto in O) per cui risulti minima la diagonale OM. (Siano $\overline{OA} = a$ e $\overline{OB} = b$).



Soluzione. Il rettangolo è caratterizzato dalla scelta di uno dei suoi punti, ad esempio P. Poniamo, pertanto, $OP = x$. I triangoli APM e MQB sono simili fra loro e simili al triangolo AOB, per le proprietà delle rette parallele tagliate da trasversali. Pertanto

$$OB : QB = OA : MQ$$

ma $MQ = OP$, per cui

$$\overline{QB} = \frac{OB \cdot OP}{OA} = \frac{bx}{a}$$

Il lato $OQ = OB - QB = \frac{ab-bx}{a}$. La diagonale, $OM = y$, può essere ottenuta applicando il teorema di Pitagora:

$$y = \sqrt{x^2 + \frac{b^2\left(a-x\right)^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2x^2 + a^2b^2 + b^2x^2 - 2ab^2x}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2x^2 + a^2b^2 + b^2x^2 - 2ab^2x}$$

La condizione di minimo viene calcolata tramite lo studio del segno della derivata prima.

(1) Derivata prima

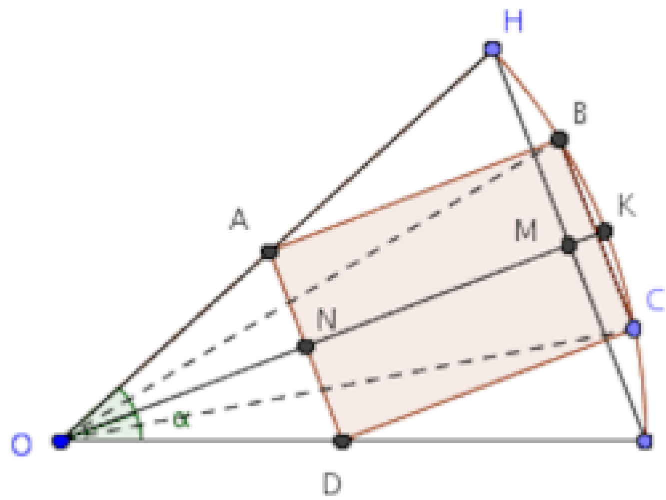
$$y^{'} = \frac{a^2x + b^2x - ab^2}{a\sqrt{a^2x^2 + a^2b^2 + b^2x^2 - 2ab^2x}}$$

segno della derivata: il denominatore, essendo la somma di due quadrati risulterà sempre positivo; il segno è dato quindi dal numeratore

$$N > 0 \qquad x > \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

La diagonale risulterà quindi minima per tale valore di x.

Esercizio 20. Inscrivere in un settore circolare di raggio r e ampiezza 2α il rettangolo, avente due vertici sull'arco che limita il settore, di area massima.



Soluzione. Il rettangolo inscritto deve avere i punti B, C, appartenenti all'arco del settore circolare, simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo al centro. Possiamo porre $B\hat{O}K = x$. Da cui per il teorema della corda

$$BC = 2r\sin x$$

Ora, applicando il teorema di Eulero al triangolo OAB, si ottiene

$$\frac{\overline{OB}}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha-x)}$$

da cui

$$AB = \frac{r}{\sin\alpha}\sin(\alpha-x)$$

L'area del rettangolo sarà

$$A = y = 2r\sin x\frac{r}{\sin\alpha}\sin(\alpha-x) = \frac{2r^2}{\sin\alpha}\sin(\alpha-x)\sin x$$

Per individuare il valore massimo, calcoliamo la derivata prima della funzione che rappresenta l'area al variare dell'angolo x

$$y' = \frac{2r^2}{\sin\alpha}\left[\cos x\sin(\alpha-x) - \cos x(\alpha-x)\right] = \frac{2r^2}{\sin\alpha}\sin\left[(\alpha-x)-x\right] = \frac{2r^2}{\sin\alpha}\sin(\alpha-2x)$$

Studiamo ora il segno della derivata prima

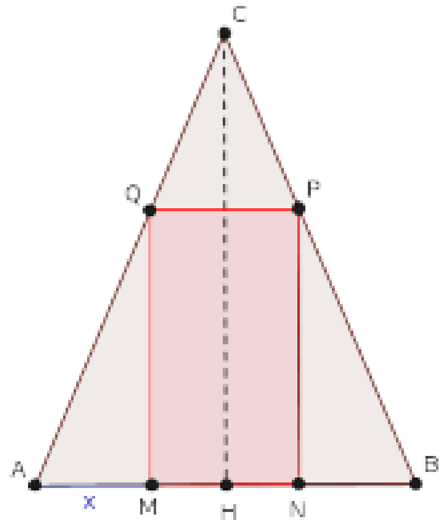
$$y' > 0 \qquad \sin(\alpha-2x) > 0$$

$$0 < (\alpha-2x) < \pi$$

Si avrà quindi un minimo per

$$x = \frac{\alpha}{2}$$

Esercizio 21. Inscrivere in un triangolo isoscele, avente i lati uguali lunghi l e la base di lunghezza $2kl$, un rettangolo di area massima e con due vertici sulla base. Studiare poi come varia l'area massima del rettangolo inscritto in funzione di k e determinare per quale valore di k assume il massimo valore.



Soluzione. Poniamo $\overline{AM} = x$, con $0 \le x \le kl$, avremo $\overline{NH} = kl - x$. Applicando il teorema di Pitagora, possiamo ricavare $\overline{CH} = \sqrt{l^2 - kl^2} = l\sqrt{1-k^2}$. Osserviamo ora che i triangoli AMQ e AHC sono simili e tra i loro lati vale, di conseguenza, la relazione

$$AM : MQ = AH : CH$$

da cui

$$MQ = \frac{lx\sqrt{1-k^2}}{kl} = \frac{x\sqrt{1-k^2}}{k}$$

L'area del rettangolo sarà quindi data dal prodotto delle lunghezze dei segmenti $MN = 2NH = 2kl - 2x$ e $MQ = \frac{x\sqrt{1-k^2}}{k}$

$$A = 2\left(kl - x\right) \cdot \frac{x\sqrt{1-k^2}}{k} = 2lx\sqrt{1-k^2} - \frac{2x^2}{k}\sqrt{1-k^2}$$

L'area massima si otterrà per i valori di x per i quali la derivata prima si annulla

$$A' = 2l\sqrt{1-k^2} - \frac{4x}{k}\sqrt{1-k^2} = 0$$

cioè per $x = \frac{kl}{2}$ e il valore dell'area sarà

$$A = kl^2\sqrt{1-k^2} - \frac{kl^2}{2}\sqrt{1-k^2} = \frac{1}{2}kl^2\sqrt{1-k^2}$$

Studiamo ora questa funzione $A = f\left(k\right)$ per determinare il massimo, sempre calcolando i valori di k per i quali la sua derivata prima si annulla. Innanzitutto, essendo una funzione irrazionale, è necessario studiare il suo campo di esistenza

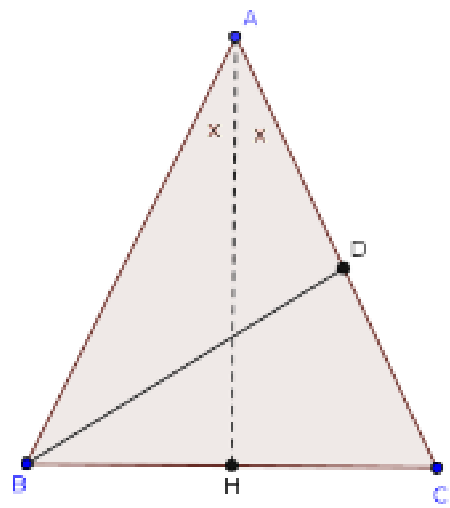
$$C.E \qquad -1 \le k \le 1$$

che, tenendo conto che k concorre a definire la lunghezza di un segmento, sarà $0 \le k \le 1$. La derivata prima è

$$f'\left(k\right) = \frac{1}{2}l^2\sqrt{1-k^2} + \frac{1}{2}kl^2 \cdot \frac{-2k}{2\sqrt{1-k^2}} = \frac{l^2\left(1-2k^2\right)}{2\sqrt{1-k^2}}$$

la derivata si annulla quando il numeratore della frazione si annulla, cioè per $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (considerando il solo valore compreso nel C:E.).

Nel triangolo isoscele ABC i lati uguali AB, AC sono lunghi l e la bisettrice dell'angolo $A\widehat{B}C$ interseca in D il lato AC. Determinare l'ampiezza dell'angolo $B\widehat{A}C$ per cui risulta minima la somma dei quadrati dei segmenti AD, DC.



In questo esercizio risulta evidente la necessità di porre come incognite l'ampiezza di un angolo e, in particolare, porremo $\widehat{A} = 2x$, onde avere $B\widehat{A}H = x$. L'esercizio richiederà pertanto di determinare il valore di x affinché la somma $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ sia minima. Applicando i teoremi sui triangoli rettangoli al triangolo BHA, otteniamo

$$BH = l \sin x \qquad BC = 2l \sin x$$

Calcoliamo le ampiezze degli angoli. $\widehat{B} = \frac{\pi}{2} - x$; $A\widehat{B}D = D\widetilde{B}C = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$. Di conseguenza avremo

$$B\widehat{D}A = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + 2x\right) = \frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2}x$$
$$C\widehat{D}B = \pi - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2}x\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x$$

Applichiamo ora il teorema dei seni al triangolo ADB

$$\frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{l}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi - \frac{3}{2}x\right)}$$

risolvendo si ottiene

$$AD = \frac{l\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{x}{2}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{3x}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3x}{2}} = \frac{l\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}}$$

In modo analogo calcoliamo la lunghezza del segmento DC

$$\frac{DC}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \frac{2l\sin x}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}x\right)}$$

da cui si ottiene

$$DC = \frac{2l\sin x\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}}$$

La relazione da minimizzare sarà

$$S(x) = \frac{l^2\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right)^2} + \frac{4l^2\sin^2 x\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right)^2}$$

ricordando le formule di duplicazione e la relazione fondamentale della goniometria, si ottiene

$$S = \frac{l^2\left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{3x}{2} + \sin\frac{3x}{2}\right)^2}\left(1 + 4\sin^2 x\right) = \frac{l^2(1 - \sin x)\left(1 + 4\sin^2 x\right)}{1 + \sin 3x} = \frac{l^2(1 - \sin x)\left(1 + 4\sin^2 x\right)}{1 + 3\sin x - 4\sin^3 x}$$

il polinomio al denominatore di può scomporre mediante la regola di Ruffini

$$S = \frac{l^2(1 - \sin x)\left(1 + 4\sin^2 x\right)}{(1 - \sin x)\left(4\sin^2 x + 4\sin x + 1\right)} = \frac{l^2\left(1 + 4\sin^2 x\right)}{(1 + 2\sin x)^2}$$

Calcoliamo ora la derivata prima di $S(x)$ e per cercare le condizioni di minimo la eguagliamo a zero

$$S' = \frac{8l^2\sin x\cos x\,(1 + 2\sin x)^2 - 4l^2(1 + 2\sin x)\cos x\left(1 + 4\sin^2 x\right)}{(1 + 2\sin x)^4} = 0$$

la derivata si annulla quando il numeratore è nullo, per cui

$$(1+2\sin x)\left[2\sin x\cos x\,(1+2\sin x)-\cos x\left(1+4\sin^2 x\right)\right]=0$$

Il primo fattore dà $\sin x=-\frac{1}{2}$, da cui si ottiene un angolo maggiore di π e di conseguenza non accettabile. Il secondo fattore si può riscrivere come

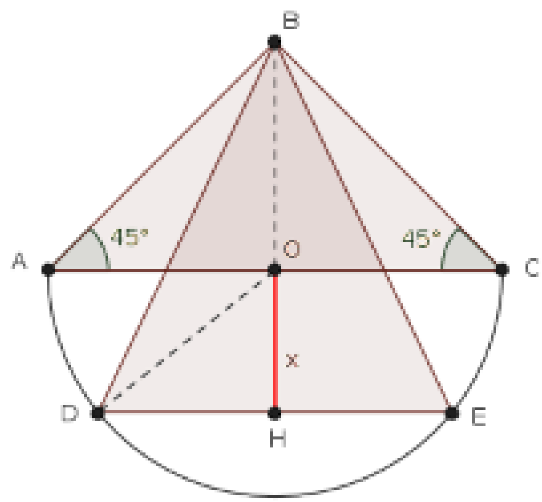
$$2\sin x\cos x-\cos x=0 \qquad \cos x\,(2\sin x-1)=0$$

e si hanno le soluzioni

$$\begin{array}{lll} \cos x=0 & x=\frac{\pi}{2} & 2x=\pi \\ \sin x=\dfrac{1}{2} & & x=\dfrac{\pi}{6} \end{array}$$

la soluzione cercata è quindi $x=\frac{\pi}{6}$.

Esercizio 22. Su di un segmento $\overline{AC}=2r$ si costruiscono, da una parte, il triangolo rettangolo isoscele ABC di ipotenusa AC e, dalla parte opposta rispetto ad AC, la semicirconferenza di diametro AC. Determinare a quale distanza da AC si deve tracciare la corda DE parallela ad AC affinché sia massimo il perimetro del triangolo DBE.



Soluzione: Il triangolo ABC, per costruzione rettangolo isoscele, è la metà di un quadrato di lato $AB=BC=r\sqrt{2}$ e l'altezza relativa all'ipotenusa $OB=r$. Poniamo $OH=x$, con $0\le x\le r$, avremo $DH=\sqrt{r^2-x^2}$ e $DE=2\sqrt{r^2-x^2}$. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo DHB, avremo

$$BD=BE=\sqrt{r^2-x^2+r^2+x^2+2rx}=\sqrt{2r^2+2rx}$$

Il perimetro del triangolo sarà quindi

$$2p_{DBE}=2\sqrt{2r^2+2rx}+2\sqrt{r^2-x^2}$$

Cerchiamo la condizione di massimo, calcolando la derivata prima

$$2p'=2\frac{2r}{2\sqrt{2r^2+2rx}}+2\frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

razionalizzando

$$2p'=\frac{2r\sqrt{2r^2+2rx}}{2r^2+2rx}-\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{r^2-x^2}$$

scomponendo i denominatori e semplificando si ha

$$2p'=\frac{\sqrt{2r^2+2rx}}{r+x}-\frac{2x\sqrt{r^2-x^2}}{(r-x)(r+x)}=\frac{\sqrt{r+x}\left[\sqrt{2r}\,(r-x)-2x\sqrt{r-x}\right]}{r^2-xì2}$$

uguagliando a zero e considerando che $\sqrt{r+x}\ge 0$ per ogni valore di x, si ha

$$\sqrt{2r}\,(r-x)-2x\sqrt{r-x}=0$$

separando le radici ed elevando al quadrato

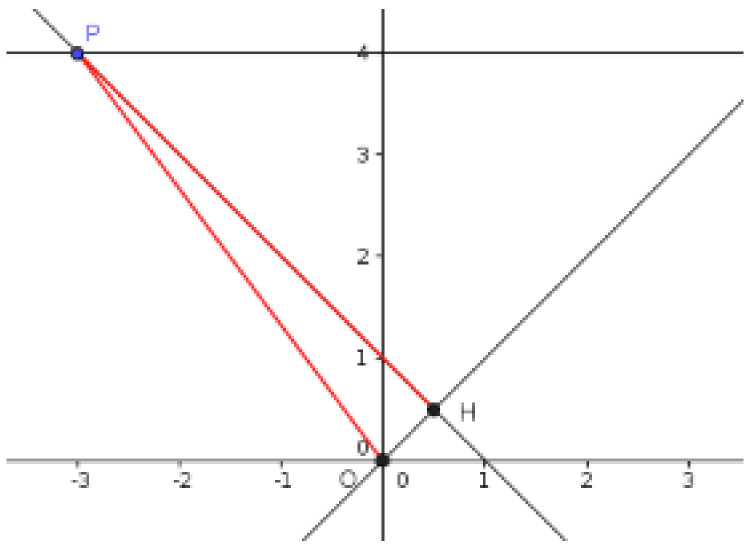
$$(r-x)\left[2r(r-x)-4x^2\right]=0$$

la soluzione $x=r$ caratterizza un triangolo degenere nel diametro perpendicolare ad AC, mentre il polinomio di secondo grado in x dà come soluzioni

$$x=\frac{-r\pm 3r}{r}$$

cioè $x=\frac{r}{2}$, considerando la sola soluzione presente nell'intervallo di variazione dell'incognita (o considerando che la misura di un segmento deve essere positiva).

Esercizio 23. Nel piano xOy sono date due rette, r e s, rispettivamente di equazioni $y=4$ e $y=x$. Sia P un punto di r ed H il piede della perpendicolare condotta da P alla retta s. Determinare il punto P per il quale è minima la somma $\overline{PD}^2+\overline{PH}^2$.



Soluzione. Il punto P, appartenendo alla retta di equazione $y=4$, avrà coordinate $P(x,4)$. Troviamo PO con la formula della distanza, $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, e PH con la formula della distanza di un punto da una retta: $d=\frac{|ax_p+bx_p+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, dove a,b,c sono i coefficienti dell'equazione della retta, rispetto alla quale si calcola la distanza, scritta nella forma implicita.

$$\overline{PO}^2 = \left(x^2+16\right)$$

$$\overline{PH}=\frac{|x-4|}{\sqrt{2}}$$

da cui

$$\overline{PH}^2=\frac{(x-4)^2}{2}$$

La relazione richiesta sarà

$$x^2+16+\frac{x^2-8x+16}{2}=\frac{3}{2}x^2-4x+24=f(x)$$

Per determinare l'eventuale punto di minimo, calcoliamo la derivata prima di tale funzione.

$$f'(x)=3x-4=0$$

la derivata si annulla per $x=\frac{4}{3}$. Pertanto, questo valore corrisponde ad un punto stazionario; sarà di minimo se

$$f'\left(\frac{4}{3}\right)<0 \quad per \quad \frac{4}{3}-\delta<x<\frac{4}{3}$$

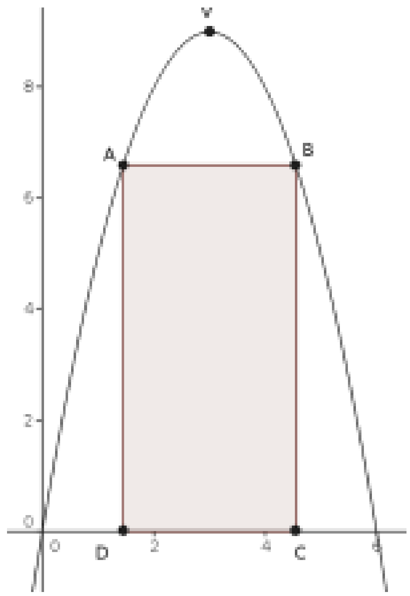
$$f'\left(\frac{4}{3}\right)>0 \quad per \quad \frac{4}{3}<x<\frac{4}{3}+\delta$$

Nel nostro caso le due condizioni sono rispettate. Infatti

$$3x-4>0 \quad per \quad x>\frac{4}{3}$$
$$3x-4<0 \quad per \quad x<\frac{4}{3}$$

e il valore minimo si avrà per $x=\frac{4}{3}$.

Esercizio 24. Disegnata la parabola $y=-x^2+6x$, determinare tra tutti i rettangoli inscritti nel segmento parabolico delimitato dall'asse delle x quello di area massima.



Soluzione. Per disegnare individuiamo il suo vertice e le intersezioni con l'asse delle x. $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)\equiv(3;9)$; le intersezioni si ottengono risolvendo l'equazione $-x^2+6x=0$; avremo $x_1=0$ e $x_2=6$. La parabola è mostrata in figura, dove il rettangolo è puramente rappresentativo. Indichiamo $OD=x$, avremo $OC=6-x$. Le coordinate dei vertici del rettangolo saranno espresse in funzione di x:

$$D\,(x;0) \qquad C\,(6-x;0)$$
$$A\left(x;-x^2+6x\right) \qquad B\left(6-x;-x^2+6x\right)$$

appartenendo A,B alla parabola assegnata. Calcoliamo la lunghezza dei segmenti CD e AD:

$$CD=|x-6+x|=|2x-6| \qquad AD=\left|-x^2+6\right|$$

L'area del rettangolo sarà

$$A=|2x-6|\cdot\left|-x^2+6\right|=-2x^3+18x^2-36x$$

dove i valori assoluti sono tolti per le condizioni del problema.
Per trovare il valore di x affinché il rettangolo abbia area massima, calcoliamo la derivata e uguagliamola a zero

$$A'=-x^2+6x-6=0$$

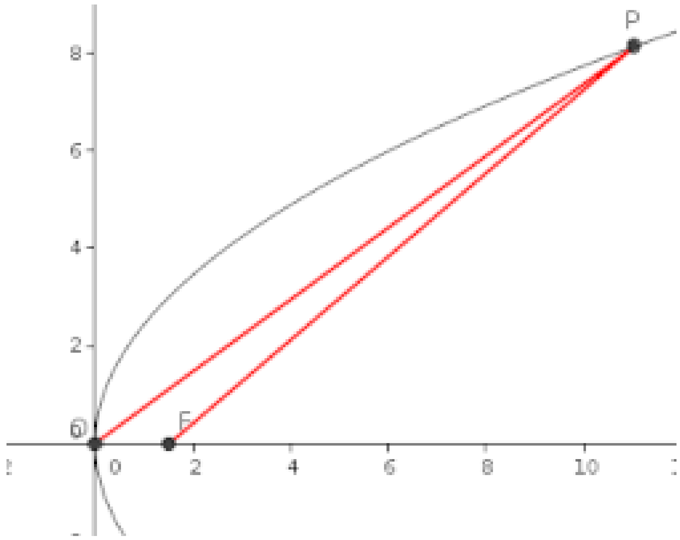
le soluzioni saranno $x_{1,2}=3\pm\sqrt{3}$. Studiamo ora il segno della derivata

$$-x^2+6x-6>0 \quad per \quad 3-\sqrt{3}<x<3+\sqrt{3}$$
$$-x^2+6x-6<0 \quad per \quad x<3-\sqrt{3}\vee x>3+\sqrt{3}$$

Avremo l'area massima per $x=3+\sqrt{3}$. L'area massima vale

$$A=-2\left(3+\sqrt{3}\right)^3+18\left(3+\sqrt{3}\right)^2-36\left(3+\sqrt{3}\right)=-2\left(3+\sqrt{3}\right)\left[9+3+6\sqrt{3}-27-9\sqrt{3}+18\right]=12\sqrt{3}$$

Esercizio 25. Determinare i punti P della parabola $y^2 = 6x$ per i quali è massimo il rapporto $\frac{\overline{PO}^2}{\overline{PF}^2}$, essendo F il fuoco e O il vertice della parabola data.



Soluzione. La parabola ha come asse di simmetria l'asse delle x, essendo l'equazione $x = \frac{1}{6}y^2$. Il vertice ha coordinate $O\,(0;0)$ e il fuoco $F\left(\frac{3}{2};0\right)$. L'ascissa del fuoco è infatti $x_F = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4\times\frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$. Un punto P qualsiasi avrà coordinate $P\left(\frac{1}{6}y^2;y\right)$. Calcoliamo le due distanze

$$\begin{aligned}\overline{PO}^2 &= \frac{1}{36}y^2 + y^2\\ \overline{PF}^2 &= \left(\frac{y^2}{6} - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{36}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

Il rapporto cercato sarà

$$R = \frac{\frac{1}{36}y^2 + y^2}{\frac{1}{36}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{4}}$$

Per trovare la condizione di massimo di tale rapporto, calcoliamo la derivata

$$R' = \frac{\left(\frac{1}{9}y^3 + 2y\right)\left(\frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}y\left(\frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{36}y^4 + y^2\right)}{\left(\frac{1}{36}y^4 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{9}{4}\right)^2}$$

la derivata si annulla se si annulla il numeratore

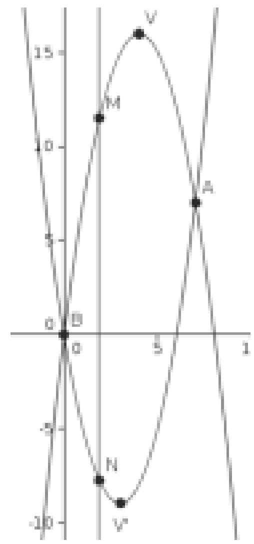
$$\left(\frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{9}y^3 + 2y\right)\left(\frac{1}{6}y^2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}y\left(\frac{1}{36}y^4 + y^2\right)\right] = 0$$

da cui, svolgendo

$$-\frac{1}{6}y^3 + 3y = 0$$

che ammette come soluzioni $y = 0$, $y = \pm 3\sqrt{2}$. Il caso $y = 0$ pone il punto $P \equiv O$ e il rapporto perde di significato; avremo le due soluzioni $y = \pm 3\sqrt{2}$ (il doppio segno rende conto della simmetria della curva rispetto all'asse delle x)

Esercizio 26. Siano A e B i punti comuni alle parabole $y = 8x - x^2$, $y = x^2 - 6x$; condurre una retta s parallela all'asse delle ordinate in modo che, dette M e N le intersezioni di s con l'arco AB rispettivamente della prima e della seconda parabola, sia massima la lunghezza del segmento MN.



Soluzione. Le due parabole si intersecano nei punti

$$\begin{cases} y = 8x - x^2 \\ y = x^2 - 6x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 6x = 8x - x^2 \\ y = x^2 - 6x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 7x = 0 \\ y = x^2 - 6x \end{cases} \qquad A \begin{cases} x = 7 \\ y = 7 \end{cases} \quad B \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Indichiamo l'equazione della retta parallela all'asse y con l'equazione $x = h$; si tratta di trovare h affinché la misura di MN sia massima. Troviamo le coordinate dei due punti:

$$M\left(h; 8h - h^2\right) \qquad N\left(h; h^2 - 6h\right)$$

La lunghezza del segmento sarà

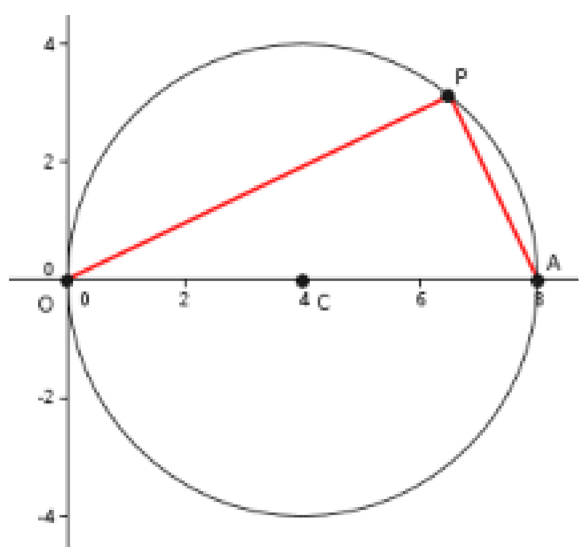
$$MN = \left|8h - h^2 - h^2 + 6h\right| = \left|-3h^2 + 14h\right| = f(h)$$

Per trovare la condizione di massimo, calcoliamo la derivata prima

$$f'(h) = |-4h + 14|$$

La derivata si annulla per $h = \frac{7}{2}$ considerando che le intersezioni M, N si trovano nei quadranti per i quali $h > 0$.

Esercizio 27. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per l'origine O e di centro $A(4; 0)$. Determinare il punto P della semicirconferenza per il quale il rapporto $\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PO}^2}$ è minimo, essendo A l'ulteriore intersezione della circonferenza con l'asse x.



Troviamo l'equazione della circonferenza conoscendo il centro e il raggio. Avremo, nel modo più semplice,

$$(x-4)^2+y^2=16$$

e l'equazione sarà $x^2+y^2-8x=0$. Il centro appartiene all'asse x, pertanto, tale asse sarà di simmetria rispetto alla circonferenza e il punto P potrà essere nel primo o quarto quadrante. Scegliamo come incognita l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{O}P$. Applicando il teorema della corda, avremo

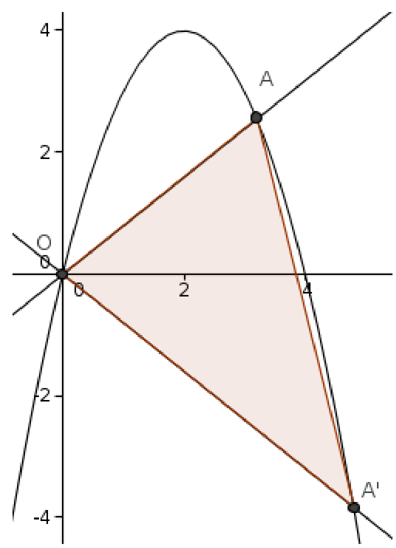
$$AP=8\sin x \qquad OP=8\cos x$$

Il triangolo AOP è, infatti, rettangolo, essendo inscritto in una semicirconferenza. Il rapporto sarà

$$R(x)=\frac{64\sin^2 x}{64\cos^2 x}=\tan^2 x$$

con $0\le x\le\frac{\pi}{2}$. La condizione di minimo nell'intervallo indicato si ha quando $x=0$, cioè quando $AP=0$ e $OP=8$

Esercizio 28. Nel piano xOy la retta $y=mx$ incontra la curva di equazione $y=-x^2+4x$, oltre che nell'origine degli assi, in un punto A, mentre la retta simmetrica rispetto all'asse delle x incontra la curva oltre che in O in un punto a'. Fra tutti i triangoli OAA' si determini quello di area massima.



Soluzione. La retta $y=mx$ è passante per l'origine, così come la sua simmetrica rispetto all'asse delle x, la cui equazione sarà $y=-mx$. Troviamo, pertanto, le coordinate dei loro punti di intersezione con la parabola diversi da O, punto che soddisfa l'equazione della parabola data.

$$\begin{cases} y=mx \\ y=-x^2+4x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-mx \\ y=-x^2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx \\ mx=-x^2+4x \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-mx \\ -mx=-x^2+4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=mx \\ x^2+x(m-4)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=mx \\ x^2-x(m+4)=0 \end{cases}$$

le soluzioni dei sistemi saranno

$$A(m-4;m(m-4)) \qquad A'(m+4;-m(m+4))$$

Troviamo la lunghezza del segmento AA'

$$AA'=\sqrt{(m-4-m-4)^2+(m^2-4m+m^2+4m)^2}=2\sqrt{m^4+16}$$

Troviamo ora l'equazione della retta AA' per determinare poi la sua distanza dal punto O, applicando la formula della retta passante per due punti

$$\frac{y-m(m-4)}{-m(m+4)-m(m-4)} = \frac{x-m+4}{m+4-m+4}$$

$$\frac{-y+m^2-4m}{2m^2} = \frac{x-m+4}{8}$$

l'equazione nella forma implicita sarà pertanto

$$m^2x+4y-m^3+16m=0$$

la distanza di tale punto da $O(0;0)$ sarà

$$h=\frac{\left|-m^3+16m\right|}{\sqrt{m^4+16}}$$

L'area del triangolo AOA' sarà allora

$$A=2\sqrt{m^4+16}\cdot\frac{\left|-m^3+16m\right|}{\sqrt{m^4+16}}\cdot\frac{1}{2}=\left|-m^3+16m\right|$$

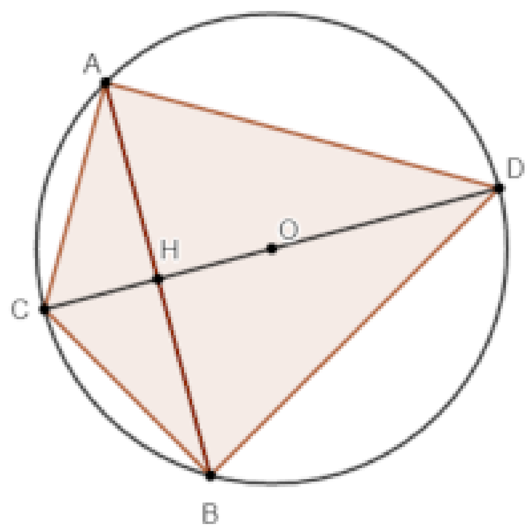
L'area del triangolo sarà massima per i valori di x per i quali si annulla la derivata prima, cioè

$$A'=-3m^2+16=0$$

da cui $m=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$. L'area di un tale triangolo (che deve risultare positiva) sarà

$$A=-\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^3+16\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{64}{3\sqrt{3}}+\frac{64}{\sqrt{3}}=\frac{128\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 29. In un cerchio di raggio r e centro O si conduca una corda AB perpendicolare a un diametro CD e si congiungano le estremità A e B della corda con le estremità C e D del diametro. Si chiede il massimo della differenza delle aree dei due triangoli aventi la corda come base comune.



Soluzione. Poniamo $OH=x$ i cui valori varieranno nell'intervallo $0<x<r$. I triangoli CAD, CBD sono uguali tra loro e rettangoli in A e B, perché inscritti in una semicirconferenza. Inoltre, per i teoremi sulle corde, il diametro CD divide la corda AB in due parti uguali, per cui $AH=HB$.

Abbiamo quindi, $DH=r+x$ e $CH=r-x$, che sono le altezze dei due triangoli richiesti. La base AB è in comune e la otteniamo applicando il 2° teorema di Euclide, per esempio, al triangolo rettangolo CAB (l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa). Avremo

$$CH:AH=AH:HD$$

da cui

$$AH^2 = (r-x)(r+x) = r^2 - x^2$$

Calcoliamo ora l'area dei due triangoli sapendo che $AB = 2\sqrt{r^2 - x^2}$

$$A_{ACB} = \sqrt{r^2 - x^2}\,(r-x) \quad A_{ADB} = \sqrt{r^2 - x^2}\,(r+x)$$

La differenza tra le aree sarà

$$\Delta A = \sqrt{r^2 - x^2}\,(r + x - r + x) = 2x\sqrt{r^2 - x^2}$$

Dobbiamo studiare quando questa differenza è massima. Calcoleremo pertanto la derivata prima

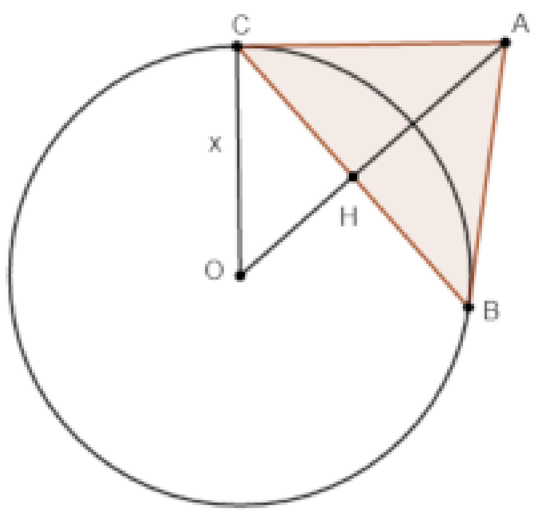
$$\Delta A' = 2\sqrt{r^2 - x^2} + 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 2x^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{2r^2 - 4x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

La derivata si annulla quando il numeratore della frazione si annulla, per cui

$$r^2 - 2x^2 = 0 \quad x^2 = \tfrac{r^2}{2} \quad x = r\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

considerando solo la radice positiva, trattandosi della lunghezza di un segmento.

Esercizio 30. Sono dati due punti A e O; dal punto O, preso come centro, si descrive una circonferenza di raggio variabile x, e dal punto A si conducono le due tangenti a questa circonferenza. Trovare tra i triangoli isosceli formati dalle due tangenti e dalla corda che congiunge i punti di contatto, quello di area massima.



Soluzione. Essendo dati i punti O e A poniamo $OA = a$. Da teorema delle tangenti tracciate da un punto esterno, sappiamo che $AC = AD$; $CD \perp AO$; $CH = HB$ e l'angolo $OCA = 90°$.

Applichiamo ora il 1° teorema di Euclide al triangolo OCA

$$OH : OC = OC : OA$$

da cui

$$OH = \frac{x^2}{a}$$

pertanto $AH = a - \frac{x^2}{a} = \frac{a^2 - x^2}{a}$. Per trovare la base BC del triangolo richiesto, applichiamo il 2° teorema di Euclide allo stesso triangolo, $OH : CH = CH : AH$

$$CH = \sqrt{\frac{x^2}{a} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a}} = \frac{x}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Calcoliamo ora l'area del triangolo CAB

$$A = \frac{2x}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a^2 - x^2}{a} \cdot \frac{1}{2} = \frac{x}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Per trovare quando tale area è massima al variare di x, calcoliamo la derivata prima

$$A' = \frac{1}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{x}{a^2}\frac{3}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}(-2x) = \frac{\left(a^2 - x^2\right)\sqrt{a^2 - x^2} - 3x^2\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}\left(a^2 - 4x^2\right)}{a^2}$$

Eguagliamo tale derivata a zero e otterremo, (il raggio x sarà sempre minore del segmento OA)

$$a^2 - 4x^2 = 0$$

da cui

$$x = \frac{a}{2}$$

Esercizio 31. Si divida un filo di ferro di lunghezza l in due parti e si costruisca con la prima parte una circonferenza, con la seconda un quadrato. Mostrare che la somma delle aree di queste due figure è minima quando le due parti del filo sono nel rapporto $\frac{\pi}{4}$.

Soluzione. Sia x la parte che forma il quadrato e $l - x$ quella che forma la circonferenza. Essendo il perimetro del quadrato uguale a x, il suo lato sarà $\frac{x}{4}$; ed essendo la circonferenza del cerchio uguale a $l - x$ il suo raggio sarà $r = \frac{l-x}{2\pi}$. Calcoliamo le aree

$$A_q = \frac{x^2}{16}$$
$$A_c = \pi r^2 = \pi\frac{(l-x)^2}{4\pi^2} = \frac{(l-x)^2}{4\pi}$$

l'area totale sarà quindi

$$A = \frac{x^2}{16} + \frac{(l-x)^2}{4\pi} = \frac{\pi x^2 + 4(l-x)^2}{16\pi}$$

La condizione di minimo impone di calcolare la derivata prima e di uguagliarla a zero.

$$A' = \frac{\pi x - 4(l-x)}{8\pi} = 0$$

cioè

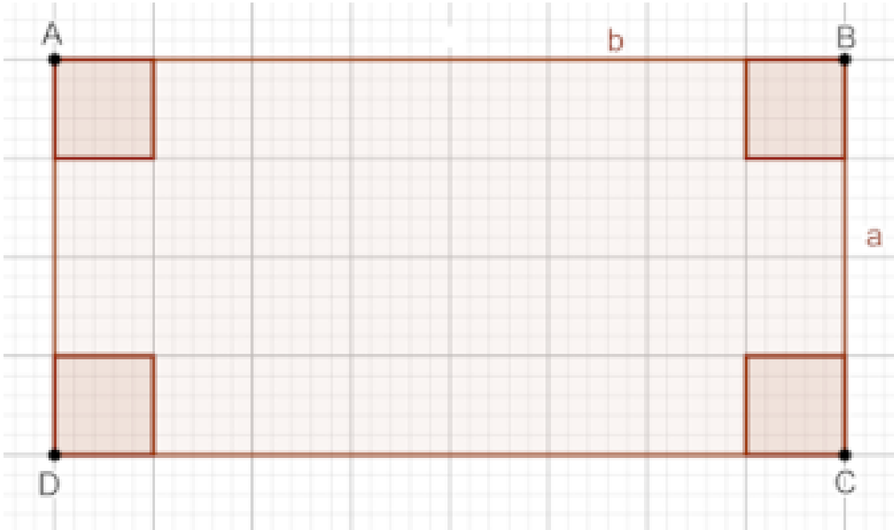
$$\pi x - 4l + 4x = 0 \quad x(\pi + 4) = 4l \quad x = \frac{4l}{\pi + 4}$$

Se ora poniamo che $\frac{l-x}{l} = \frac{\pi}{4}$, avremo

$$4l - 4x = \pi x \quad x(\pi + 4) = 4l \quad x = \frac{4l}{\pi + 4}$$

i due risultati coincidono e il valore di x ricavato sarà il minimo.

Esercizio 32. Dato un foglio rettangolare di dimensioni a e b ($a < b$), si chiede di ritagliare 4 quadrati eguali ai suoi vertici in modo da ottenere una scatola (senza coperchio) di capacità massima.



Soluzione. La scatola si ottiene piegando le parti associate ai quadrati verso l'alto, ottenendo in tal modo una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio. La capacità della scatola può essere considerata come il volume interno (anche se si può pensare che lo spessore del foglio sia trascurabile rispetto alle misure dei lati del rettangolo di partenza. Il volume è dato dal prodotto dell'area di base per l'altezza. Pertanto, detto x il lato dei quadrati ritagliati:

$$A_b = (b-2x)(a-2x) \quad V = (b-2x)(a-2x)x$$

Per trovare la condizione di max, calcoliamo la derivata.

$$V' = -2x(a-2x) - 2x(b-2x) + (b-2x)(a-2x) = 12x^2 - 4x(a+b) + ab$$

Eguagliamo questa derivata a zero

$$V' = 12x^2 - 4x(a+b) + ab = 0$$

risolvendo abbiamo

$$x_{1,2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

essendo la funzione crescente per $x < \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$ e $x > \frac{(a+b)+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$, il massimo corrisponderà al valore $x = \frac{(a+b)-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$

Esercizio 33. Il profitto totale $P(x)$ (in migliaia di dollari) dalla vendita di x unità di un determinato farmaco è data da $P(x) = ln\left(-x^3 + 3x^2 + 72x + 1\right)$ per $x \in [0, 10]$. (a) Trova il numero di unità che dovrebbero essere vendute per massimizzare il profitto totale. (b) Qual è il massimo profitto?

Soluzione. Calcoliamo la derivata cercando se esistono valori di x per i quali si annulla appartenenti all'intervallo indicato. In questo caso il massimo sarà assoluto per il dominio specificato.

$$P'(x) = \frac{-3x^2 + 6x + 72}{-x^3 + 3x^2 + 72x + 1} = 0$$

La frazione si annulla quando il numeratore è uguale a zero, per cui, dividendo per 3 e cambiando i segni, si ha

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

ricordando le proprietà delle soluzioni di una equazione di secondo grado abbiamo

$$x_1 = -4 \quad x_2 = 6$$

la soluzione accettabile è $x = 6 \in [0, 10]$. Sostituiamo ora questo valore nella funzione che determina il profitto

$$P(6) = ln(-216 + 108 + 216 + 1) = \ln 109 \simeq 4,7$$

Esercizio 34. Dopo molta sperimentazione, due istituti di fisica determinarono che quando una bottiglia di champagne francese viene scossa più volte, tenuta in posizione verticale e stappata, il suo sughero si muove secondo la legge

$$s(t) = -16t^2 + 40t + 3$$

dove s è la sua altezza (in piedi) dal suolo t secondi dopo essere rilasciato. (a) Quanto in alto andrà? (b) Quanto rimarrà in aria?

Soluzione. La legge oraria rappresenta sicuramente un moto uniformemente accelerato. L'altezza massima sarà raggiunta quando la velocità istantanea acquisita dal tappo nell'istante iniziale si annulla. Ricordando che la velocità può essere espressa dalla derivata della legge oraria rispetto al tempo, abbiamo

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -32t + 40$$

tale velocità si annulla per

$$t = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} = 1,25\,s$$

In questo intervallo di tempo il tappo percorre una distanza

$$s(1,25) = -16 \times \frac{25}{16} + 40 \times \frac{5}{4} + 3 = -25 + 50 + 3 = 28\,m$$

Il tappo rimarrà in aria per la fase di salita e di ricaduta. Supponiamo che in assenza di attrito i due percorsi siano identici e che quindi il tappo si muova in linea retta; avremo $t = 2,50\,s$.

Esercizio 35. Un proiettile viene lanciato verso l'alto con una velocità iniziale di 170 $\frac{m}{s}$. La sua altezza sopra il terreno dopo t secondi è data da $s(t) = 170t - 5,0t^2$. (a) Trova la velocità e l'accelerazione dopo t secondi. (b) Qual è l'altezza massima raggiunta? (c) Quando il proiettile colpisce il suolo e con quale velocità?

Soluzione. La velocità e l'accelerazione sono rappresentate dalle funzioni che si ottengono derivando rispettivamente una e due volte la legge oraria

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = 170 - 10t$$
$$a = \frac{d^2s(t)}{dt^2} = -10$$

L'altezza massima raggiunta si può calcolare sia analiticamente che osservando che la legge oraria descrive graficamente una parabola con la concavità verso il basso e quindi il suo massimo sarà dato dall'ascissa del vertice. Primo modo: $v = 0$ per $t = 17\,s$ e quindi $s(17) = 170 \times 17 - 5 \times 17^2 = 1445\,m$. Secondo modo $V_t = -\frac{b}{2a} = -\frac{170}{-10} = 17$. Supponendo che il moto avvenga in assenza di attrito, il moto di ricaduta sarà identico, ma con verso opposto, a quello di salita, per cui la velocità di impatto col suolo sarà 170 $\frac{m}{s}$ e il tempo trascorso sarà $t_{a-r} = 34\,s$.

Esercizio 36. Dalle informazioni fornite da una recente pubblicazione, abbiamo costruito il modello matematico

$$M(x) = -\frac{1}{45}x^2 + 2x - 20$$

,con $30 \leq x \leq 65$, per rappresentare i chilometri per litro utilizzate da una determinata auto a una velocità di x kmh. Trova i km massimi e minimi assoluti per litro e a quale velocità si verificano.

Soluzione. Studiamo la derivata e il suo segno nell'intervallo indicato. Tale intervallo è chiuso e limitato e quindi i max e min saranno quelli assoluti.

$$M'(x) = -\frac{2}{45}x + 2$$

studiamo il segno

$$-\tfrac{2}{45}x + 2 > 0 \qquad x < 45$$

pertanto $M > 0$ per $30 \leq x < 45$ e $M < 0$ per $45 < x \leq 65$; quando $x = 45\,\frac{km}{h}$ avremo un massimo e un minimo all'estremo dell'intervallo. Avremo $M(45) = 25\,\frac{km}{L}$, mentre $M(65) \simeq 16\,\frac{km}{L}$

Esercizio 37. Un pezzo di filo lungo $4,2\,m$ viene tagliato in due parti. Una parte viene trasformata in un cerchio e l'altra trasformato in un quadrato. Sia il pezzo di lunghezza x quella che forma un cerchio. Poniamo $0 \leq x \leq 4,2$, quindi è possibile utilizzare tutto il filo per il quadrato o per il cerchio. a) Dove dovrebbe essere effettuato il taglio per minimizzare la somma delle aree racchiuse da entrambe le figure? b) Dove dovrebbe essere effettuato il taglio per render la somma massima? c) Mostra che il lato del quadrato è uguale al diametro del cerchio, ovvero al cerchio che può essere inscritto nella piazza.

Soluzione. Sia $\overline{AB}$ la lunghezza del filo e C il punto in cui avviene il taglio. Sia pertanto $\overline{AC} = x$ e $\overline{BC} = 4,2-x$ con $0 \leq x \leq 4,2$. Allora AB viene utilizzato per ottenere un cerchio di area. Il filo AB formerà quindi la circonferenza del cerchio e il raggio sarà

$$crf = x = 2\pi r \quad da\,cui \quad r = \tfrac{x}{2\pi}$$

e l'area del cerchio sarà

$$A_c = \pi r^2 = \pi \frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{4\pi}$$

Il segmento BC forma il perimetro quadrato, e il suo lato sarà $l = \frac{2p}{4} = \frac{4,2-x}{4}$ e l'area del quadrato sarà

$$A_q = \left(\frac{4,2-x}{4}\right)^2$$

L'area totale sarà pertanto

$$A\left(x\right) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{4,2-x}{4}\right)^2$$

Troviamo i valori per i quali la funzione è max e/o minima.

$$A'\left(x\right) = \frac{x}{2\pi} + 2\left(\frac{4,2-x}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{x}{2\pi} - \frac{4,2-x}{8} = \frac{4x - 4,2\pi + \pi x}{8\pi} = \frac{x\left(4+\pi\right) - 4,2\pi}{8\pi}$$

la derivata prima si annulla per

$$x = \frac{4,2\pi}{4+\pi} = \frac{21\pi}{5\left(4+\pi\right)} \simeq 1,8\,m$$

Avremo un minimo in corrispondenza di questo valore e un massimo per $x = 4,2$, caso limite; nel caso del valore minimo, raggio del cerchio sarà

$$r = \frac{x}{\pi} = \frac{4,2}{4+\pi} = \frac{21}{5\left(4+\pi\right)} \simeq 0,60\,m$$

il perimetro del quadrato sarà $4,2 - 1,8 = 2,4$ e il suo lato $l = 0,60\,m$

Esercizio 38. Il proprietario di un campeggio ha una recinzione di $1400\,m$. Vuole per racchiudere un campo rettangolare al confine con un fiume, senza recinzioni necessarie lungo il fiume. x rappresenti la larghezza del campo. a) Scrivere un'espressione per la lunghezza del campo. (b) Trovare l'area del campo; (c) Trovare il valore di x che determina l'area massima. (d) Trovare l'area massima.

Soluzione. Sia l la lunghezza del rettangolo. Il campeggio è rettangolare con una recinzione solo su tre lati; allora il perimetro è $2p = 2x + l$, cioè $l = 1400 - 2x$. L'area del campo sarà pertanto

$$A = x\left(1400 - 2x\right)$$

L'area sarà massima se

$$A' = 1400 - 4x = 0$$

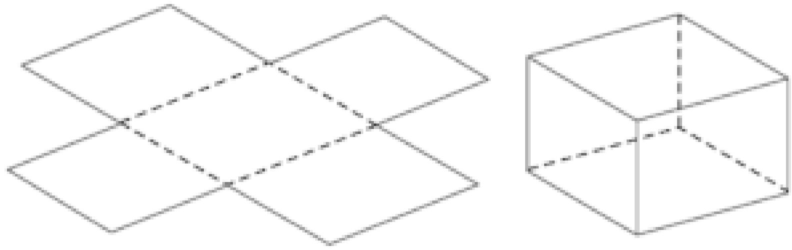
cioè

$$x = \frac{1400}{4} = 350\,m$$

in tal caso l'area sarà

$$A\left(350\right) = 1400 \times 350 - 2 \times 350^2 = 245000\,m^2$$

Esercizio 39. Una società di produzione televisiva deve progettare una scatola aperta con una base quadrata. La scatola deve contenere $550\,cm^3$. Trova le dimensioni della scatola che può essere costruita con la quantità minima di materiale.



SOLUZIONE. Il dato assegnato riguarda il volume della scatola di $550\,cm^3$. Il volume di un parallelepipedo è $V = A_b h$. Indichiamo con x il lato del quadrato della base. Pertanto l'altezza della scatola sarà

$$h = \frac{550}{x^2}$$

La quantità di materiale necessaria per la sua costruzione rappresenta l'area della superficie laterale più una base, per cui

$$A_{tot} = A_{sl} + A_b = 4x \cdot \frac{550}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{2200}{x}$$

Per trovare la condizione di minimo calcoliamo la derivata della funzione e uguagliamola a zero

$$A' = 2x - \frac{2200}{x^2} = \frac{2x^3 - 2200}{x^2} = 0$$

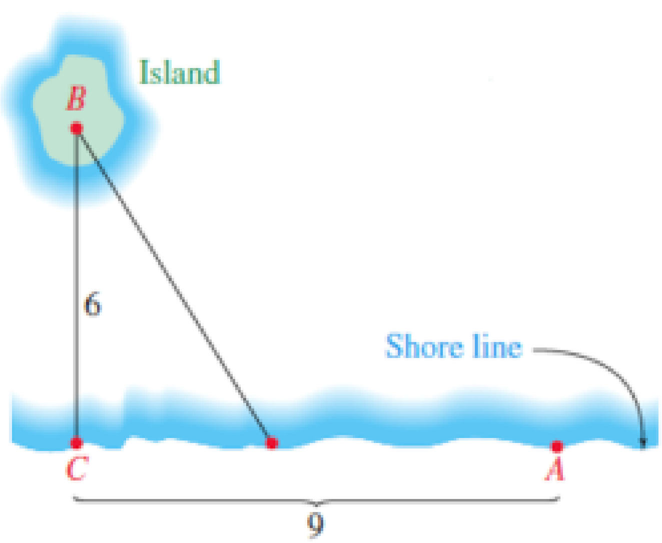
La funzione si annulla se

$$x^3 = 1100 \quad x = \sqrt[3]{1100} \simeq 10,3\,cm$$

da cui

$$h = \frac{550}{\sqrt[3]{1100^2}} \simeq 5,2\,cm$$

ESERCIZIO 40. Una società desidera far passare un cavo dal punto A sulla riva (vedere la figura seguente) verso un'installazione nel punto B sull'isola. L'isola si trova a $6\,km$ dalla riva. Il punto A è $9\,km$ dal punto C, il punto sulla riva più vicino al punto B. La posa del cavo a terra costa $400\,\frac{\$}{km}$ e $500\,\frac{\$}{km}$ sott'acqua. Supponiamo che il cavo inizi da A e passi lungo il litorale, quindi corra sott'acqua fino all'isola. Trova il punto in cui la linea dovrebbe iniziare ad inclinarsi al fine di produrre il costo totale minimo.



Soluzione. Sia $CD = x$, $0 \leq x \leq 9$, essendo D il punto in figura interno al segmento AC; pertanto $AD = 9 - x$. La distanza da percorrere sarà pertanto $AD + DB$. Calcoliamo DB con il th. di Pitagora.x

$$DB = \sqrt{x^2 + 36}$$

quindi

$$AD + DB = 9 - x + \sqrt{x^2 + 36}$$

Se il cavo seguisse il percorso $AC + BC = 15\,km$ avremmo un costo di $C = 9 \times 400 + 6 \times 500 = 6600\,\$$ Calcoliamo il costo per il percorso $AD + DB$.

$$Costo = y = 400\,(9 - x) + 500\sqrt{x^2 + 36} = 3600 - 400x + 500\sqrt{x^2 + 36}$$

Calcoliamo quando tale costo è minimo

$$y' = -400 + \frac{1000x}{2\sqrt{x^2 + 36}} = \frac{-400\sqrt{x^2 + 36} + 500x}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

la derivata si annulla se

$$\sqrt{x^2 + 36} = \frac{5}{4}x$$

cioè

$$x^2 + 36 = \tfrac{25}{16}x^2 \quad \tfrac{9}{16}x^2 = \quad 36$$

la soluzione appartenente all'intervallo di variazione dell'incognita è $CD = 8$ e quindi $AD = 1\,km$. Pertanto $DB = 10\,km$. In questo caso il costo sarà

$$Costo = 1 \times 400 + 10 \times 500 = 5400\,\$$$

Esercizio 41. Gli epidemiologi hanno trovato una nuova malattia che dilaga nella College Station, in Texas. Stimano che t giorni dopo che la malattia è stata osservata per la prima volta nella comunità, la percentuale della popolazione infettata dalla malattia è approssimato da

$$p\,(t) = \frac{20t^3 - t^4}{1000}$$

per $0 \leq t \leq 20$. a) Dopo quanti giorni la percentuale della popolazione infetta ha un massimo? (b) Qual è la percentuale massima della popolazione infetta?

Soluzione. Calcoliamo la derivata

$$p'\,(t) = \frac{60t^2 - 4t^3}{1000} = \frac{15t^2 - t^3}{250}$$

poniamo la derivata uguale a zero

$$15t^2 - t^3 = 0 \quad t^2\,(15 - t) = 0 \quad t = 15\,giorni$$

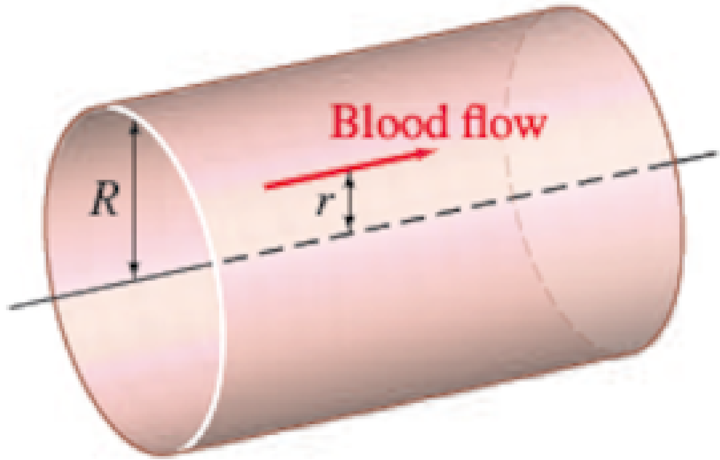
la percentuale massima sarà

$$p\,(t) = \frac{20 \times 15^3 - 15^4}{1000} = \frac{15^3 \times 5}{1000} \simeq 1700\%$$

Esercizio 42. Il sangue scorre più veloce quanto più è vicino al centro di un vaso sanguigno. Secondo la legge di Poiseuille, la velocità V del sangue è data da

$$V = k\left(R^2 - r^2\right)$$

dove R è il raggio del vaso sanguigno, r è la distanza di uno strato di flusso sanguigno dal centro della vaso e k è una costante, qui assunta uguale a 375. Supponi che il vaso sanguigno di uno sciatore abbia un raggio $R = 0,08\,mm$ e che il freddo faccia contrarre il vaso sanguigno ad una velocità $\frac{dR}{dt} = -0,01\,\frac{mm}{min}$. Quanto è veloce il ricambio del sangue?



Soluzione. Calcoliamo la derivata della funzione che esprime la velocità di scorrimento rispetto al tempo, considerando quindi r come costante. Essendo $V = 375\left(R^2 - r^2\right)$ abbiamo

$$\frac{dV}{dt} = 375\left(2R\frac{dR}{dt} - 0\right) = 750R\frac{dR}{dt}$$

Poiché $R = 0,08$ e $\frac{dR}{dt} = -0,01$, avremo

$$\frac{dV}{dt} = 750 \times 0,08 \times (-0,01) = -0,6$$

La velocità del sangue sta diminuendo a una velocità di $-0,6\,\frac{mm}{min}$. Il segno meno indica che si tratta di una decelerazione (accelerazione negativa), poiché rappresenta un tasso negativo di variazione di velocità.

Esercizio 43. Una roccia viene gettata in uno stagno tranquillo. Le increspature circolari si spostano verso l'esterno dal punto di impatto della roccia in modo che il raggio del cerchio formato da un'increspatura aumenta alla velocità di $6\,\frac{cm}{s}$. Trova la velocità con cui l'area del cerchio sta cambiando nell'istante in cui il raggio è di $12\,cm$.

Soluzione. L'area del cerchio che si forma dal treno d'onde è data da

$$A = \pi r^2$$

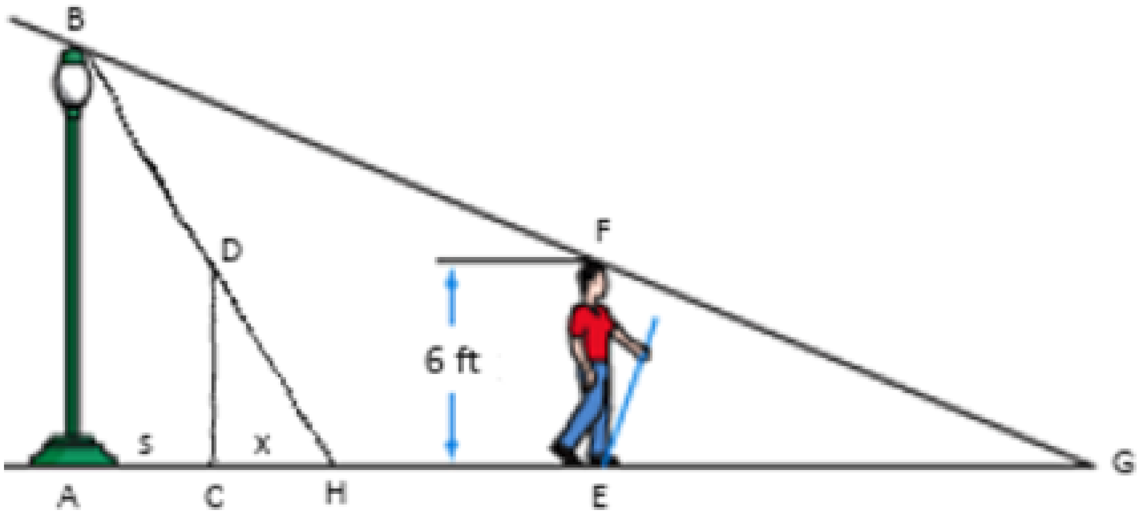
La dimensione dell'area e del raggio sono funzioni del tempo, per cui calcoliamo la derivata dell'area e del raggio rispetto al tempo (scriviamo la derivata nella forma $\frac{d}{dt}$ per evidenziare la variabile dipendente, al numeratore e quella indipendente al denominatore)

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\pi r^2\right) \qquad \frac{dA(t)}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

essendo $\frac{dr}{dt} = 60$, e $r = 120$, avremo

$$\frac{dA\left(t\right)}{dt} = 24\pi \times 6 = 144\pi$$

Esercizio 44. Un uomo alto $6\,ft$ si sta allontanando da una lampada al ritmo di $50\,\frac{ft}{min}$. Quando l'uomo si trova a $8\,ft$ dal lampione, la sua ombra è lunga $10\,ft$. Trova la velocità con cui la lunghezza dell'ombra aumenta quando si trova a $25\,ft$ dal lampione.



SOLUZIONE. Calcoliamo l'altezza del lampione attraverso la similitudine dei triangoli FEG e BAG. Avremo

$$1,80 : 3,2 = h : 5,80$$

da cui

$$h = 10,8$$

Consideriamo ora i triangoli simili BAH e DCH; per essi vale

$$10,8 : 6 = (s+x) : x$$

per cui

$$10,8x = 6s - 6x \quad 4,8x = 6s \quad 2,4x = 3s$$

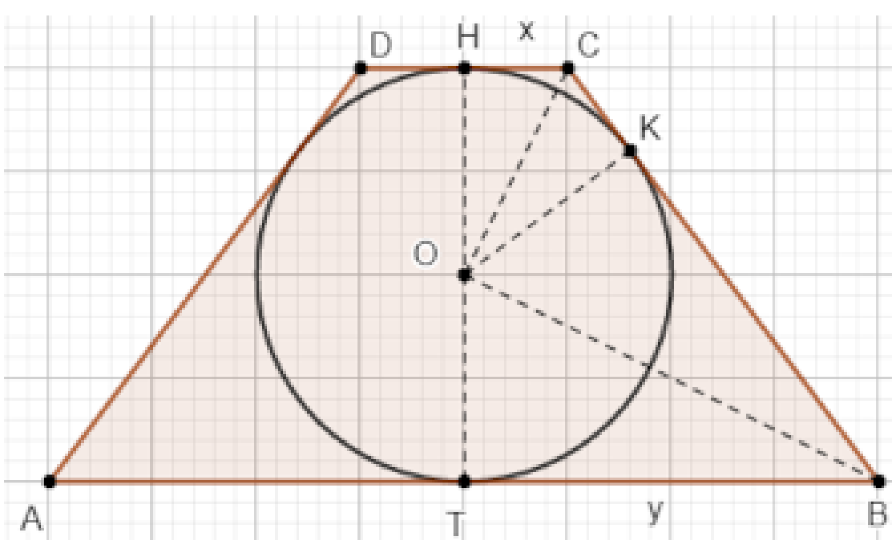
Calcoliamo la derivata di questa funzione rispetto al tempo, sapendo che $\frac{ds}{dt} = 50$

$$2,4\frac{dx}{dt} = 3\frac{ds}{dt}$$

cioè

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3 \times 50}{0,8} = 62,5\,\frac{ft}{min}$$

ESERCIZIO 45. Tra tutti i trapezi isosceli circoscritti a un cerchio di raggio r, trovare quello di area minima.



Soluzione. Siano x e y rispettivamente la metà della base minore e della base maggiore; l'altezza del trapezio, essendo circoscritto, sarà uguale a $2r$. Per il teorema delle tangenti a una crf da un punto esterno, sappiamo che $HC = CK$ e $TB = KB$, per cui $BC = x + y$. Siccome, inoltre, la somma degli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ è uguale a un angolo piatto, avremo che la somma delle loro metà è uguale a un angolo retto; da ciò segue che il triangolo BOC è rettangolo. Applicando il 2° th. di Euclide a tale triangolo abbiamo, $OK^2 = CK \cdot KB$, cioè $r^2 = xy$. L'area del triangolo sarà $A = \frac{2(x+y)\cdot 2r}{2}$. Possiamo quindi scrivere il sistema nelle due incognite x e y:

$$\begin{cases} xy = r^2 \\ 2r\,(x+y) = A \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{r^2}{x} \\ 2r\left(x + \frac{r^2}{x}\right) = A \end{cases}$$

Studiamo quindi la funzione

$$A = 2r\left(x + \frac{r^2}{x}\right)$$

per ricavare la sua condizione di minimo assoluto. Calcoliamo la derivata

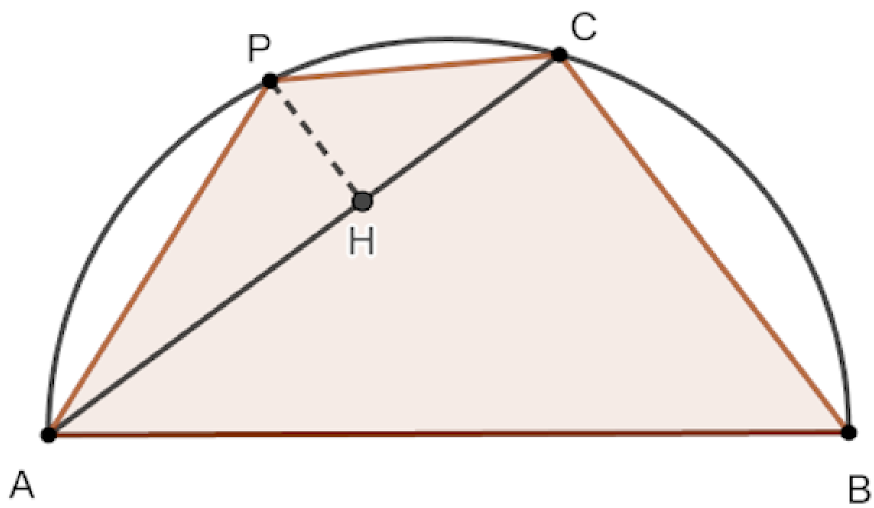
$$A' = 2r\left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)$$

tale funzione si annulla per

$$\frac{r^2}{x^2} = 1 \quad x = \pm r$$

la condizione accettabile sarà data da $x = r$ e $y = r$, cioè il poligono circoscritto deve essere un quadrato di lato uguale al diametro.

Esercizio 46. Data la semi crf di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia $\overline{AC} = \frac{8}{5}r$ una corda. Determinare sull'arco AC il punto P per il quale l'area del quadrilatero $ABCP$ sia massima.



Soluzione. L'area del quadrilatero irregolare è la somma dell'area dei due triangoli ACP e ACB aventi il lato AC in comune. Il triangolo ACB è rettangolo essendo inscritto in una semicrf. Poniamo $PH = x$ con $0 \leq x \leq \frac{2}{5}r$, dove $\frac{2}{5}r$ è l'altezza del segmento circolare di base AC. l'area del triangolo APC è

$$A_{APC} = \frac{4}{5}rx$$

Calcoliamo BC con il th. di Pitagora.

$$BC = \sqrt{4r^2 - \frac{64}{25}r^2} = \frac{6}{5}r$$

L'area del triangolo ACB sarà

$$A_{ACB} = \frac{8}{5}r \cdot \frac{6}{5}r \cdot \frac{1}{2} = \frac{24}{25}r^2$$

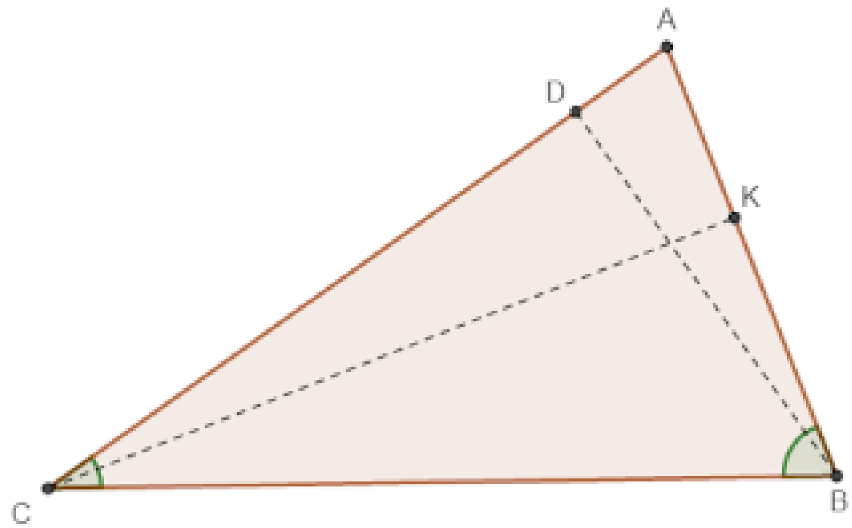
L'area del quadrilatero sarà

$$A = \frac{4}{5}rx + \frac{24}{25}r^2$$

Questa è una funzione lineare e il suo massimo si avrà quando $x = \frac{2}{5}r$, cioè sarà nell'estremo superiore del suo intervallo di variazione; per cui avremo l'area massima quando P occupa il punto medio dell'arco AC. L'area sarà pertanto

$$A_{max} = \frac{4}{5}r \cdot \frac{2}{5}r + \frac{24}{25}r^2 = \frac{32}{25}r^2$$

Esercizio 47. In un triangolo ABC si ha $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ e $\overline{BC} = a$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\widehat{C}$ in modo che la somma dei quadrati delle altezze condotte dai vertici B e C risulti massima.



Soluzione. Sia $\widehat{C} = x$, $\widehat{B} = 2x$ e quindi $\widehat{A} = \pi - 3x$ con $0 < x < \frac{\pi}{3}$. I triangolo CDB e ADB sono rettangoli, per cui, $DB = a \sin x$. Analogamente $CK = a \sin 2x$. Pertanto

$$S = DB^2 + CK^2 = a^2 \left(\sin^2 x + \sin^2 2x\right)$$

Affinché tale somma sia massima

$$S' = a^2 \left(2 \sin x \cos x + 2 \sin 2x \cos 2x \cdot 2\right) = a^2 \left(\sin 2x + 4 \sin 2x \cos 2x\right)$$

Tale funzione si annulla se

$$\sin 2x \left(1 + 4 \cos 2x\right) = 0$$

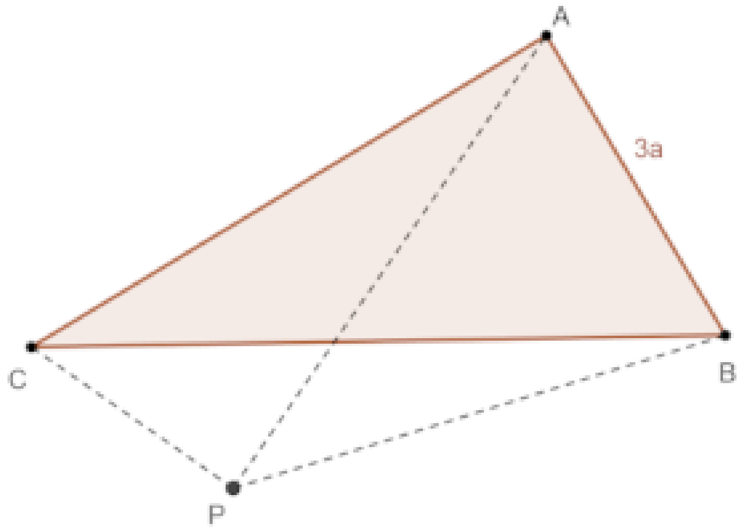
da cui

$$\begin{array}{ccc} \sin 2x = 0 & & x = 0 \\ \cos 2x = -\frac{1}{4} & 2\cos^2 - 1 = -\frac{1}{4} & \cos x = \sqrt{\frac{3}{8}} \end{array}$$

La somma massima sarà

$$S_{max} = a^2 \left[1 - \frac{3}{8} + 4\left(1 - \frac{3}{8}\right) \cdot \frac{3}{8}\right] = \frac{25}{16}a^2$$

Esercizio 48. Nel triangolo ABC rettangolo in A il cateto AB misura $3a$ e l'angolo acuto adiacente ha seno uguale a $\frac{4}{5}$. Nel semipiano individuato dalla retta AC contenente B determinare un punto P tale che $A\widehat{P}C = \frac{\pi}{2}$ e in modo che risulti minima la somma dei quadrati delle distanze di P dai vertici A, B, C.



Soluzione. La somma dei quadrati delle distanze è data da

$$S = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

Sia $C\widehat{A}P = x$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, allora l'angolo $B\widehat{A}P = \frac{\pi}{2} - x = A\widehat{C}P$; abbiamo inoltre che $\sin\left(A\widehat{B}C\right) = \frac{4}{5}$. Pertanto $\sin\left(A\widehat{B}C\right) = \cos\left(B\widehat{C}A\right) = \frac{4}{5}$ e il $\sin\left(B\widehat{C}A\right) = \frac{3}{5}$. Applichiamo il th. di Eulero

$$\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} \quad \frac{15a}{3} = \frac{5AC}{4} \quad AC = 4a$$

Da ciò segue

$$CP = 4a\sin x \quad AP = 4a\cos x$$

Applicando il th. di Carnot possiamo ricavare la distanza PB:

$$PB^2 = AP^2 + AB^2 - 2AP \cdot AB\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 16a^2\cos^2 x + 9a^2 - 24a^2\cos x\sin x$$

La somma delle tre distanze sarà quindi data da

$$S = 16a^2\cos^2 x + 16a^2\sin^2 x + 16a\cos^2 x + 9a^2 - 24a^2\cos x\sin x$$

$$S = 25a^2 + 16a^2\cos^2 x - 24a^2\cos x\sin x$$

Troviamo le condizioni di minimo

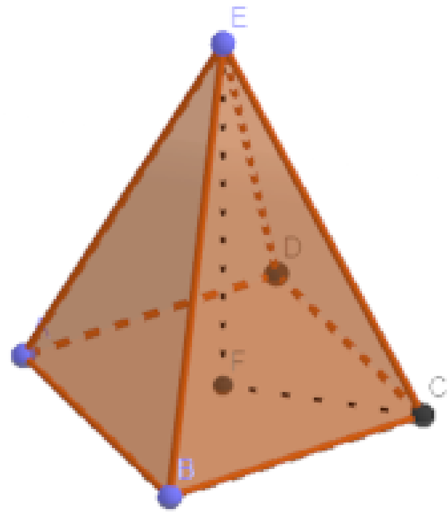
$$S' = 32a^2\cos x\,(-\sin x) - 24a^2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) =$$

$$3\tan^2 x - 4\tan x - 3 = 0$$

da cui

$$\tan x = \frac{2+\sqrt{13}}{3}$$

Esercizio 49. Tra tutte le piramidi quadrangolari regolari rette aventi spigolo laterale uguale a l, trovare quella che ha il volume massimo.



Soluzione. Sia x il lato del quadrato di base; la sua diagonale sarà $x\sqrt{2}$. Il segmento $FC = \frac{x\sqrt{2}}{2}$, per cui l'altezza della piramide sarà

$$EF = \sqrt{l^2 - \frac{x^2}{2}}$$

e il volume della piramide sarà

$$V = \frac{x^2\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{2}}}{3}$$

Troviamo quando tale relazione presenta un massimo assoluto

$$V' = \frac{2x\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{2}} + x^2\frac{-x}{2\sqrt{l^2-\frac{x^2}{2}}}}{3} = \frac{4x\left(l^2 - \frac{x^2}{2}\right) - x^3}{6\sqrt{l^2 - \frac{x^2}{2}}} = 0$$

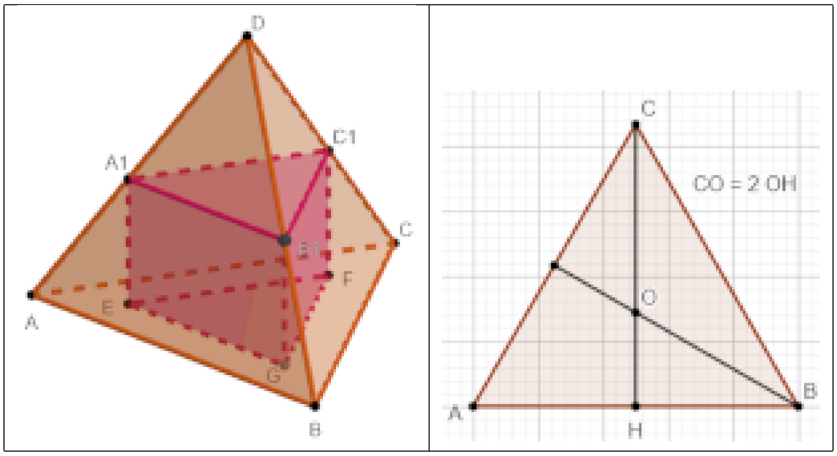
svolgendo

$$-3x^3 + 4xl^2 = 0 \quad -x\left(3x^2 - 4l^2\right) \quad x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm\frac{2l}{\sqrt{3}}$$

la soluzione accettabile sarà pertanto $x = \frac{2l}{\sqrt{3}}$ e il volume massimo sarà

$$V_{max} = \frac{\frac{4}{3}l^2\sqrt{l^2 - \frac{2}{3}l^2}}{3} = \frac{\frac{4}{3}l^2 \cdot \frac{l}{\sqrt{3}}}{3} = \frac{4}{9\sqrt{3}}l^3$$

Esercizio 50. Sia T il tetraedro regolare avente spigolo l e vertici A, B, C, D. Condotto un piano α parallelo al piano β della faccia ABC, siano A_1, B_1, C_1 il triangolo sezione di α con T e P il prisma avente la base coincidente con A_1, B_1, C_1 e l'altra base sul piano β. Determinare il prisma P avente volume massimo e quello avente la superficie totale minima,



Soluzione. Come è noto, il tetraedro è un solido composto da quattro triangoli equilateri uguali. Pertanto anche il prisma P avrà le basi formate da due triangoli equilateri. Sia l'altezza del prisma $A_1E = x$. Calcoliamo l'altezza dell'intero tetraedro che intersecherà il piano β nel baricentro del tr. equilatero. Questo punto divide la mediana dei lati in due parti in modo che la parte maggiore sia doppia di quella minore, cioè, riferendosi alla figura, $CO = 2OH$. Ora, l'altezza di un triangolo equilatero è uguale a $h = \frac{lato}{2}\sqrt{3}$, per cui $CO = \frac{2}{3}h = \frac{l\sqrt{3}}{3} = \frac{l}{\sqrt{3}}$. L'altezza del tetraedro sarà, applicando il th. di Pitagora

$$DO = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{3}} = l\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Pertanto la nostra incognita varierà nell'intervallo $0 < x < l\sqrt{\frac{2}{3}}$. Il piano α è parallelo al piano β e quindi il rapporto tra le altezze dei due tetraedri $ABCD, A_1B_1C_1D$ e i loro lati di base sono proporzionali

$$AB : A_1B_1 = DO : (DO - A_1E)$$

da cui

$$l : A_1B_1 = l\sqrt{\frac{2}{3}} : \left(l\sqrt{\frac{2}{3}} - x\right)$$

Ricaviamo quindi

$$A_1B_1 = l - x\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Troviamo ora il volume del prisma sapendo che l'area di un triangolo equilatero è $A_{eql} = \frac{lato^2}{4}\sqrt{3}$

$$V_P = A_{A_1B_1C_1} \cdot A_1E = \left[\frac{1}{4}\left(l - x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\sqrt{3}\right] \cdot x = \frac{\sqrt{3}}{4}x\left(l - x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

Calcoliamo la derivata

$$V' = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)^2 + \tfrac{\sqrt{3}}{4}x\left[2\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\right] =$$
$$= \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}} - 2x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \tfrac{\sqrt{3}}{4}\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(l - 3x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)$$

La derivata prima si annulla per

$$x_1 = l\sqrt{\tfrac{2}{3}} \qquad x_2 = \tfrac{l}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

La soluzione accettabile sarà pertanto $x = \frac{l}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$, cioè a un terzo dell'altezza del tetraedro. In questo caso il volume sarà

$$V_{max} = \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{l}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(l - \frac{l}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{27}l^3$$

Calcoliamo ora la superficie totale del prisma: $A_{ST} = A_{Sl} + 2A_{base}$.

$$A_{St} = 3x\left(l - x\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(l - x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$$

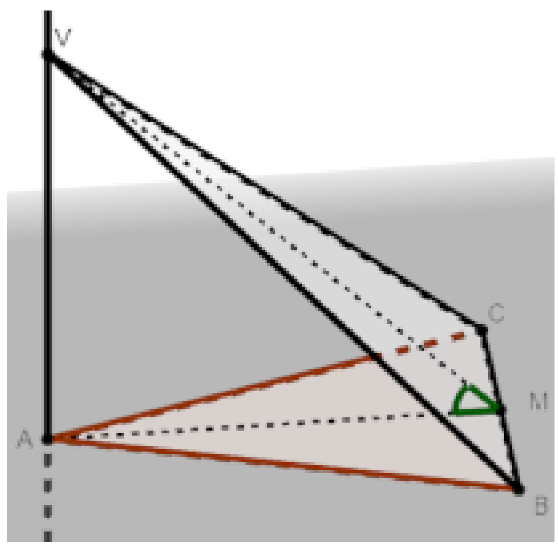
Calcoliamo la derivata prima

$$A'_{St} = 3\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) + 3x\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) + \sqrt{3}\left(l - x\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) =$$
$$= 3l - \tfrac{3l}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{\tfrac{3}{2}}x + \tfrac{3}{2}\sqrt{3}x = l\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{3}x\left(\tfrac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) = 0$$

da cui si ricava, razionalizzando e semplificando

$$x = \frac{3\sqrt{2}-2}{7\sqrt{3}}l$$

Esercizio 51. Considerato il triangolo ABC isoscele sulla base BC, avente altezza $AM = 4a$, sulla perpendicolare in A al piano del triangolo, considerare un punto V in modo che il piano del triangolo VBC formi un angolo di 45° con il piano del triangolo ABC. (a) Sapendo che il volume della piramide di vertice V e base ABC è uguale a $32a^3$, calcolare le misure dei lati del triangolo ABC. (b) Condurre un piano α parallelo alla base della piramide e proiettare ortogonalmente su tale base il triangolo sezione di α con la piramide P, ottenendo in tal modo un prisma retto. Determinare la posizione di α per la quale il volume di tale prisma risulti massimo.



Soluzione. (a) Sia $MB = x$, $BC = 2x$. il triangolo AMV è un triangolo rettangolo isoscele in quanto ha un angolo di 45°. L'altezza della piramide sarà pertanto uguale all'altezza del triangolo ABC di base. L'area del triangolo di base è

$$A_b = \frac{8ax}{2} = 4ax$$

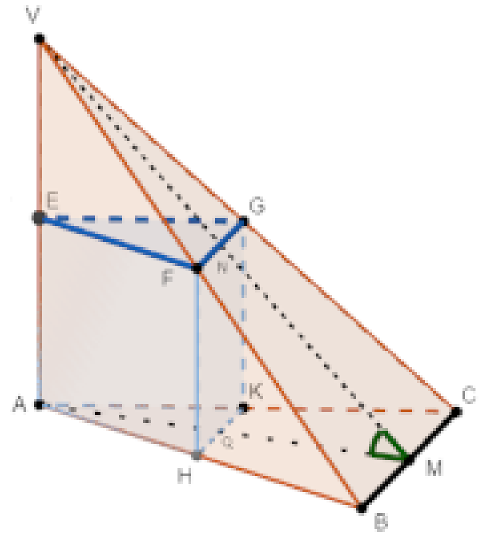
Il volume della piramide in funzione di x è dato da

$$V = \frac{16a^2x}{3} = 32a^3$$

da cui

$$x = \frac{96a^3}{16a^2} = 6a$$

pertanto i lati del triangolo ABC saranno $BC = 12a$ e $AB = AC = \sqrt{16^2 + 36a^2} = 2a\sqrt{13}$.



Soluzione. (b) Poniamo $AE = x$ che sarà compreso nell'intervallo $0 < x < 4a$. Essendo il piano α contenente il triangolo FEG parallelo al piano del triangolo BAC avremo che anche il triangolo EFG è isoscele e simile al triangolo BAC. Pertanto

$$A_{ABC} : A_{EFG} = AM^2 : EN^2$$

Ora l'altezza EN è uguale al segmento $VE = 4a - x$ e $A_{ABC} = 24a^2$ (dalla parte precedente)

$$24a^2 : A_{EFG} = 16a^2 : (4a - x)^2$$

cioè

$$A_{EFG} = \frac{3}{2}(4a - x)^2$$

Il Volume del prisma sarà quindi

$$V = \frac{3}{2}x(4a - x)^2$$

Troviamo la condizione di massimo assoluto nell'intervallo indicato

$$V' = \frac{3}{2}(4a - x)^2 - 3x(4a - x) = 0$$

$$(4a - x)^2 - 2x(4a - x) = 0$$

quindi

$$16a^2 - 8ax + x^2 - 8ax + 2x^2 = 0$$

$$3x^2 - 16ax + 16a^2 = 0$$

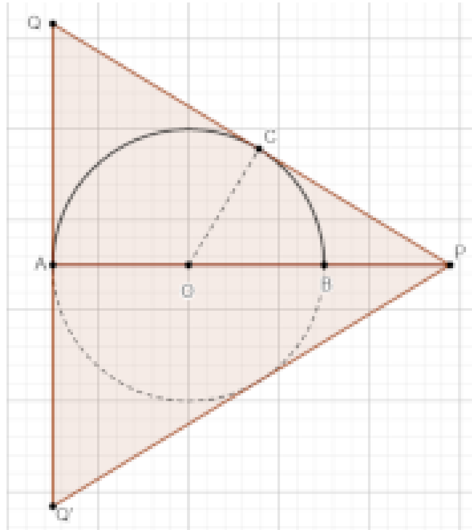
cioè

$$x_1 = 4a \quad x_2 = \tfrac{4}{3}a$$

la soluzione accettabile sarà $AE = \frac{4}{3}a$. Il volume in tale caso sarà

$$V = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}a \cdot \frac{64}{9}a^2 = \frac{128}{9}a^3$$

Esercizio 52. Data una semicrf di diametro $AB = 2r$ e centro O, determinare il triangolo rettangolo APQ con il cateto AP sulla semiretta AB, il cateto AQ sulla tangente in A e l'ipotenusa PQ tangente alla semicrf in modo che, fatta ruotare la figura d un giro completo intorno ad AP, il volume generato dalle regioni del triangolo APQ esterne al semicerchio sia minimo.



Soluzione. In figura la sezione mostra che il solido da considerare è quello che si ottiene sottraendo al cono QPQ' la sfera di centro O e raggio OC. Il volume della sfera è immediatamente noto e vale $V_{sf} = \frac{4}{3}\pi r^3$. Nella sezione il triangolo QPQ' è circoscritto al cerchio di centro O. I triangolo APQ e OCP sono simili essendo entrambi rettangoli e aventi l'angolo $A\widehat{P}Q$ in comune. Pertanto

$$AQ : OC = AP : PC$$

Ricordando il teorema della secante e della tangente a una crf uscenti da uno stesso punto si ha

$$AP : PC = PC : BP \quad \overline{PC}^2 = AP \cdot BP$$

Poniamo $BP = x$ con $x > 0$. Sostituendo avremo

$$AQ : r = 2r + x : \sqrt{x(2r + x)}$$

da cui

$$AQ = \frac{r(2r + x)}{\sqrt{x(2r + x)}}$$

Il volume del solido cercato sarà

$$V = \frac{\pi r^2 (2r + x)^2 \cancel{(2r + x)}}{3x\cancel{(2r + x)}} - \frac{4}{3}\pi r^3$$

Troviamo il valore di x per il quale il volume è minimo

$$V' = \frac{6\pi r^2 x(2r + x) - 3\pi r^2 (2r + x)^2}{9x^2} = 0$$

cioè

$$4rx + 2x^2 - 4r^2 - x^2 - 4rx = 0$$

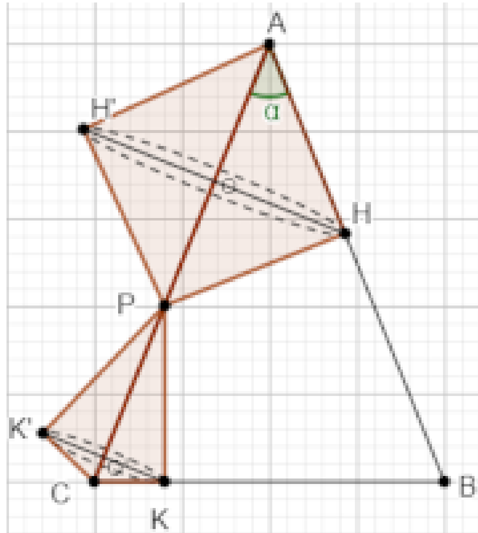
da cui

$$x = 2r$$

Pertanto il volume del solido sarà

$$V_{min} = \frac{\pi r^2 (4r)^2}{6r} - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Esercizio 53. Dato il triangolo isoscele ABC di angolo al vertice α tale che $\cos\alpha = \frac{7}{25}$ e i lati obliqui $AB = AC = 2a$, determinare sul lato AC un punto P tale che, dette rispettivamente H e K le proiezioni di P su AB e BC, risulti minima la superficie del solido generato dai due triangoli AHP e PKC in una rotazione completa attorno ad AC.



Soluzione. La superficie totale del solido è formata dalle superfici laterali dei quattro coni che si formano nella rotazione dei triangoli indicati. Posto $AP = x$ con $0 < x < 2a$ si ha $PC = 2a - x$. Il triangolo PHA è rettangolo per costruzione per cui

$$PH = x \sin\alpha = \tfrac{24}{25}x$$
$$AH = x \cos\alpha = \tfrac{7}{25}x$$

il raggio della base comune ai due coni HAH' e HPH' sarà

$$OH = AH \sin\alpha = \frac{168}{625}x$$

La superficie di questi due coni sarà, dove a è l'apotema

$$S_1 = \pi r_1 \left(a_1 + a_2\right) = \pi \cdot \frac{168}{625}x \left(\frac{24}{25}x + \frac{7}{25}x\right) = \pi \frac{5208}{15625}x^2$$

Procediamo in modo analogo per gli altri due coni, sapendo che l'angolo $A\widehat{C}B = \frac{\pi-\alpha}{2}$ per cui

$$\cos A\widehat{C}B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{3}{5}$$

Pertanto

$$PK = (2a - x)\sin A\widehat{C}B = \tfrac{4}{5}\left(2a - x\right)$$
$$CK = (2a - x)\cos A\widehat{C}B = \tfrac{3}{5}\left(2a - x\right)$$

il raggio della base comune ai due coni KCK' e KPK' sarà

$$O'K = CK \sin A\widehat{C}B = \frac{12}{25}\left(2a - x\right)$$

La superficie di questi due coni sarà, dove a è l'apotema

$$S_2 = \pi r_2 \left(a_3 + a_4\right) = \pi \cdot \frac{12}{25}\left(2a - x\right)\left[\frac{7}{5}\left(2a - x\right)\right] = \pi \frac{84}{125}\left(2a - x\right)^2$$

La superficie del solido complessivo sarà

$$S = S_1 + S_2 = \pi\left[\frac{5208}{15625}x^2 + \frac{84}{125}\left(2a - x\right)^2\right]$$

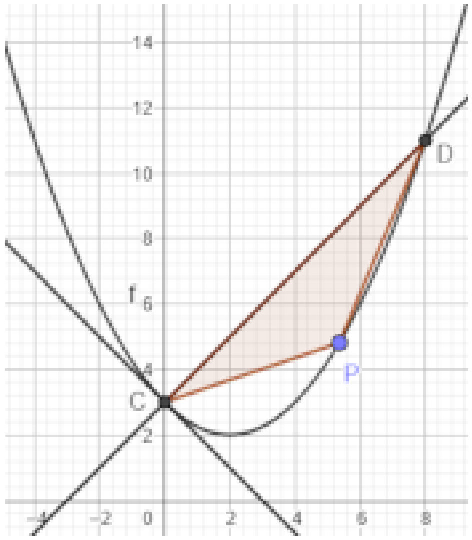
Troviamo la condizione di minimo

$$S' = \pi\left[\frac{10416}{15625}x - \frac{168}{125}\left(2a - x\right)\right] = 0$$

risolvendo

$$\frac{31416}{15625}x = \frac{336}{125}a \quad x = \frac{250}{187}a$$

Esercizio 54. Data la parabola $y=\frac{1}{4}x^2-x+3$, determinare la normale n a essa nel suo punto di intersezione C con l'asse y, indicando con D l'ulteriore punto di intersezione di c con la parabola. Determinare il punto P sull'arco CD di parabola tale che l'area del triangolo PCD sia massima.



Soluzione. Il punto C ha coordinate $(0;3)$ ricavabili dal termine noto dell'equazione. La normale è la perpendicolare alla retta tangente alla parabola nel punto C. Troviamo prima la tangente calcolando dapprima il suo coefficiente angolare

$$y'(0)=\frac{1}{2}\cdot 0-1=-1$$

la normale avrà $m=1$ e la sua equazione sarà

$$x-y+3=0$$

Il punto D ha coordinate

$$\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2-x+3 \\ y=x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+3=\frac{1}{4}x^2-x+3 \\ y=x+3 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{1}{4}x^2-2x=0 \\ y=x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=8 \\ y=11 \end{cases}$$

Il punto P ha coordinate $P\left(x;\frac{1}{4}x^2-x+3\right)$ con $0<x<8$. Calcoliamo il lato CD preso come base del triangolo

$$CD=\sqrt{64+64}=8\sqrt{2}$$

troviamo ora l'altezza relativa alla base con la formula della distanza di un punto da una retta

$$PH=\frac{\left|x-\frac{1}{4}x^2+x-3+3\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|-\frac{1}{4}x^2+2x\right|}{\sqrt{2}}$$

L'area del triangolo sarà

$$A=8\sqrt{2}\cdot\frac{\left|-\frac{1}{4}x^2+2x\right|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=4\left(-\frac{1}{4}x^2+2x\right)$$

Troviamo la condizione di massimo

$$A'=4\left(-\frac{1}{2}x+2\right)=0 \quad x=4$$

il punto P avrà coordinate $P(4;3)$.

Esercizio 55. Nel fascio di parabole di equazione

$$y=-x^2+kx+h$$

determinare la parabola γ tangente nel punto $T(4;3)$ alla retta di coefficiente angolare $m=-2$. Detto S il punto di intersezione di γ con l'asse y, sull'arco ST determinare il punto P per il quale è massimo il prodotto della distanze dagli assi cartesiani.

Soluzione. Determiniamo prima l'equazione della parabola γ. Ricordando il significato geometrico di derivata in un punto abbiamo

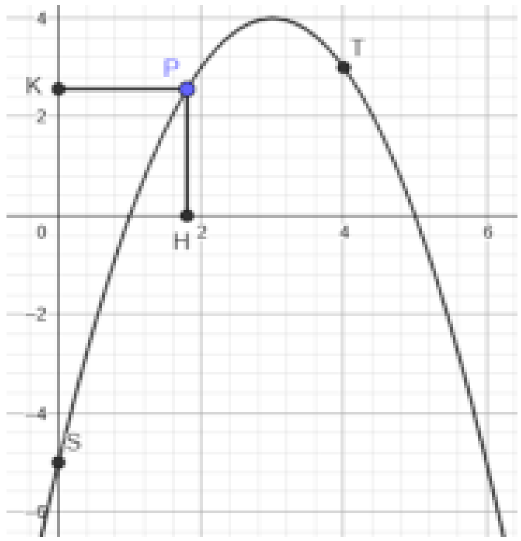
$$y'(4) = -2 \cdot 4 + k = -2$$

da cui $k = 6$; inoltre il punto T appartiene alla parabola per cui

$$3 = -16 + 24 + h$$

da cui $h = -5$. La parabola γ avrà equazione

$$y = -x^2 + 6x - 5$$



In pratica, il prodotto della distanza dagli assi è il prodotto delle coordinate di P, per cui

$$Pr = x\left(-x^2 + 6x - 5\right)$$

determiniamo la condizione di massimo

$$Pr' = -3x^2 + 12x - 5 = 0$$

da cui

$$x = \tfrac{6+\sqrt{21}}{3}$$

le coordinate del punto saranno $P\left(\frac{6+\sqrt{21}}{3}; \frac{2\left(1+\sqrt{21}\right)}{3}\right)$ e il prodotto massimo

$$Pr_{max} = \frac{54 + 14\sqrt{21}}{9}$$

Esercizio 56. Scritta l'equazione della circonferenza passante per l'origine O degli assi, ivi tangente alla bisettrice $x + y = 0$ e il cui centro appartiene alla retta $x + 4y - 5 = 0$, considerare la semicirconferenza $\mathcal{C}_1$ posta nel semipiano $x \leq y$. Determinare l'equazione della retta r passante per O che incontri $\mathcal{C}_1$ in P in modo che, detta H la proiezione di P sul diametro di $\mathcal{C}_1$, risulti massima la somma:

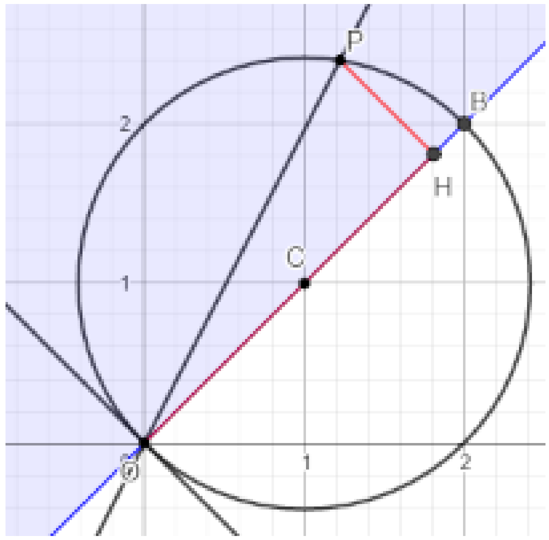
$$S = \overline{OH} + \overline{PH}$$

Soluzione. Se una crf di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, passa per l'origine la sua equazione avrà $c = 0$. Il raggio che congiunge la tangente al centro è perpendicolare alla tangente stessa e apparterrà quindi ad una retta con coefficiente angolare $m = 1$, cioè apparterrà alla bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $x - y = 0$; pertanto, possiamo trovare l'intersezione delle due rette che individuano il centro della crf.

$$\begin{cases} x + 4y - 5 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 5y = 5 \\ x = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

l'eq. della crf sarà

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$



Si tratta di ricavare la posizione del punto P o meglio il coefficiente angolare della retta OP. La retta che delimita il semipiano $x \leq y$ è la bisettrice di eq. $x - y = 0$. La semicirconferenza ha raggio $OC = \sqrt{2}$. Pertanto posto $P\widehat{O}H = x$ con $0 < x < \frac{\pi}{2}$, avremo

$$PO = 2\sqrt{2}\cos x$$

Pertanto

$$PH = 2\sqrt{2}\cos x \sin x \qquad OH = 2\sqrt{2}\cos^2 x$$

$$S = 2\sqrt{2}\left(\cos x \sin x + \cos^2 x\right)$$

troviamo la condizione di massimo

$$S' = 2\sqrt{2}\left(-\sin^2 x + \cos^2 x - 2\cos x \sin x\right) = 0$$

da cui

$$-\tan^2 x + 1 - 2\tan x = 0 \qquad \tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$$

cioè

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

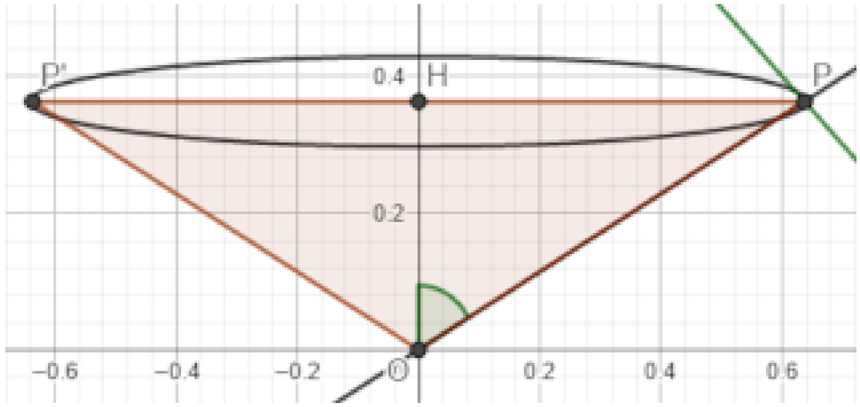
la nostra soluzione sarà $x = \sqrt{2} - 1$. L'angolo formato dalla retta OP con l'asse x è però $x + \frac{\pi}{4}$, per cui

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

e la retta avrà equazione $y = \left(\sqrt{2} + 1\right)x$. Il punto P avrà quindi coordinate

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y = \left(\sqrt{2} + 1\right)x \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2\left(\sqrt{2} + 2\right) - 2x\left(\sqrt{2} + 2\right) = 0 \\ y = \left(\sqrt{2} + 1\right)x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = \left(\sqrt{2} + 1\right) \end{cases}$$

Esercizio 57. Data la retta r di equazione $x + y - 1 = 0$, sia P, appartenente al primo quadrante, il punto di intersezione di r con una retta generica uscente da O. Determinare la posizione di P in modo che risulti massimo il volume del cono generato da OP in una rotazione completa attorno all'asse x.



Soluzione. Sia OP in figura la retta generica (in verde la retta data). La retta OP può essere identificata tramite il suo coefficiente angolare, cioè il complementare dell'angolo $P\widehat{O}H$. PH e OH, rispettivamente raggio di base e altezza del cono, sono le coordinate del punto P che appartiene alle due rette $x+y-1=0$ e $y=mx=\left(\frac{OH}{PH}\right)x$. Pertanto

$$P\begin{cases} y=1-x \\ y=mx \end{cases} \qquad \begin{cases} mx=1-x \\ y=1-x \end{cases} \qquad \begin{cases} PH=x=\frac{1}{m+1} \\ OH=y=\frac{m}{m+1} \end{cases}$$

Il volume del cono in funzione di m sarà

$$V(m)=\frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{m+1}\right)^2\frac{m}{m+1}=\frac{\pi m}{3(m+1)^3}$$

Troviamo la condizione di massimo

$$V'(m)=\frac{3\pi(m+1)^3-9\pi m(m+1)^2}{9(m+1)^6}=\frac{3\pi+3\pi m-9\pi m}{9(m+1)^4}=0$$

da cui

$$1+m-3m=0 \qquad m=\tfrac{1}{2}$$

la retta OP avrà equazione $y=\frac{1}{2}x$, le coordinate di P saranno $P\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ e il volume massimo sarà

$$V_{max}=\frac{\frac{\pi}{2}}{3\left(\frac{3}{2}\right)^3}=\frac{4}{81}\pi$$

Esercizio 58. Determinare l'equazione delle circonferenze con il centro sulla retta $y+2x-3=0$ e tangenti agli assi cartesiani, indicando con γ quella che ha il centro nel primo quadrante. Detto M il punto di contatto tra γ e l'asse y, condurre per l'origine O una retta che intersechi γ in A e B in modo che l'area del triangolo MAB sia massima.

Soluzione. Il centro appartiene alla retta indicata per cui le sue coordinate sono $C(x,-2x+3)$. Essendo tangenti ai due assi cartesiani, la distanza del centro dagli assi stessi è il raggio e quindi uguale. Calcoliamo tale raggio con la formula della distanza di un punto da una retta. Il punto sarà il centro e la retta sarà prima l'asse x di equazione $y=0$ e poi l'asse y di equazione $x=0$.

$$r_x=\frac{|-2x+3|}{1}=|-2x+3|$$

$$r_y=\frac{|x|}{1}=|x|$$

Essendo il raggio sempre uguale possiamo scrivere

$$|-2x+3|=|x|$$

cioè

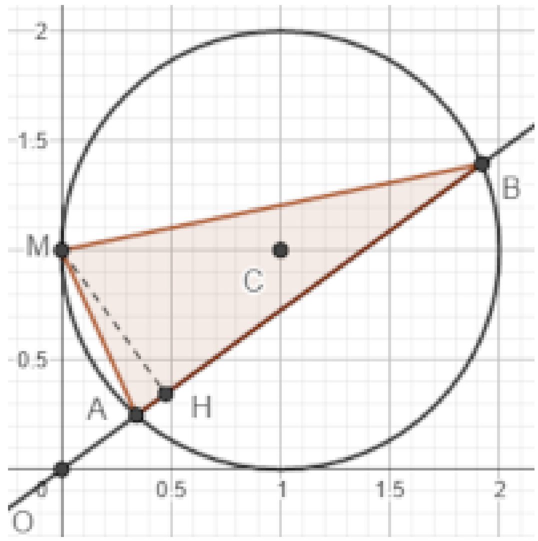
$$-2x+3=\pm x$$

abbiamo quindi i due casi

$$\begin{array}{ll} -2x+3=x & \quad x=1 \\ -2x+3=-x & \quad x=3 \end{array}$$

Avremo quindi il centro $C_1\,(1;1)$ e $C_2\,(3;-3)$ e i raggi sono $r_1 = 1$ e $r_2 = 3$. La circonferenza γ con centro nel primo quadrante avrà equazione

$$\gamma : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$



Troviamo le intersezioni tra la crf e la retta generica di equazione $y = mx$; considereremo come incognita il valore del coefficiente angolare m che dovrà essere positivo.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + m^2x^2 - 2x - 2mx + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(m^2+1\right)x^2 - 2x\,(m+1) + 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{m+1\pm\sqrt{2m}}{m^2+1} \\ y_{1,2} = m \cdot \frac{m+1\pm\sqrt{2m}}{m^2+1} \end{cases}$$

Le coordinate dei due punti di intersezione sono

$$A\left(\tfrac{m+1-\sqrt{2m}}{m^2+1}; m \cdot \tfrac{m+1-\sqrt{2m}}{m^2+1}\right) \qquad B\left(\tfrac{m+1+\sqrt{2m}}{m^2+1}; m \cdot \tfrac{m+1+\sqrt{2m}}{m^2+1}\right)$$

la lunghezza del segmento AB è

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{-2\sqrt{2m}}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{-2m\sqrt{2m}}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{8m}{m^2+1}}$$

l'altezza MH del triangolo è la distanza del punto $M\,(0;1)$ dalla retta AB di equazione $mx - y = 0$

$$\overline{MH} = \frac{|m \cdot 0 - 1 \times 1 + 0|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$$

L'area del triangolo AMB è quindi

$$A = \sqrt{\frac{8m}{m^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{8m}}{2\,(m^2+1)} = \frac{\sqrt{2m}}{m^2+1}$$

Troviamo la condizione di massimo

$$A'\,(m) = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2m}} \cdot \left(m^2+1\right) - 2m\sqrt{2m}}{\left(m^2+1\right)^2} = 0$$

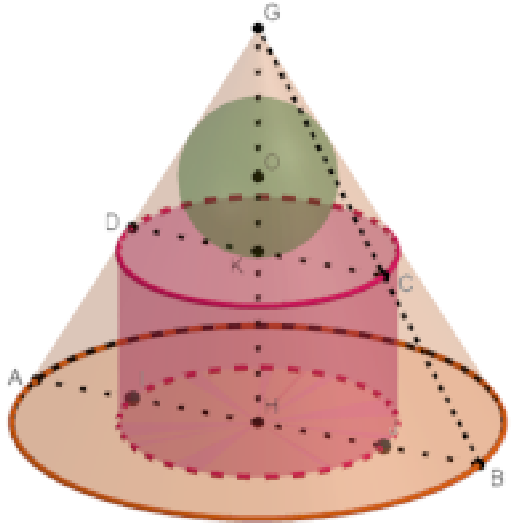
cioè

$$\tfrac{m^2+1-4m^2}{\sqrt{2m}} = 0 \quad 3m^2 = 1 \quad m = \pm\tfrac{\sqrt{3}}{3}$$

per la nostra configurazione dovendo essere positivo, $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$. La retta cercata ha equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ e l'area massima è

$$A_{max} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Esercizio 59. È dato un cono equilatero di altezza h. Si conduca un piano parallelo alla base del cono che interseca il cono stesso in un cerchio γ e si consideri il cilindro $\mathscr{C}$ che si ottiene proiettando γ sulla base del cono. Si consideri la sfera $\mathscr{S}$ tangente a γ e alle generatrici del cono ed esterna al cilindro; si determini l'altezza x del cilindro che corrisponde al massimo valore della somma dei volumi dei solidi $\mathscr{C}$ e $\mathscr{S}$.



Soluzione. Il cono equilatero ha l'apotema BG uguale al diametro di base AB, per cui il triangolo AGB, sezione del cono, è equilatero, così come per similitudine il triangolo CGD. La sfera, dovendo essere tangente al cerchio di base del cilindro e alle generatrici del cono avrà il centro nell'incentro del triangolo equilatero CGD, cioè $KO = \frac{1}{3}GK$, cioè l'apotema del triangolo. Posto, come indicato, $HK = x$ con $0 < x < h$, avremo $GK = h - x$. Nota l'altezza di un triangolo equilatero possiamo trovarne i lati

$$AB = BG = AG = \frac{2h}{\sqrt{3}}$$

quindi, essendo i triangoli AGB e CDG simili

$$AB : CD = h : h - x$$

cioè

$$CD = \frac{\frac{2h(h-x)}{\sqrt{3}}}{h} = \frac{2\left(h-x\right)}{\sqrt{3}}$$

Infine, il raggio della sfera sarà

$$OK = \frac{1}{3}GK = \left(\frac{h-x}{3}\right)$$

Possiamo quindi calcolare il volume totale dei tre solidi

$$V_{tot} = V_c + V_{cil} + V_S = \frac{\pi h\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2}{3} + \pi x\left(\frac{(h-x)}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{h-x}{3}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{9}\pi h^3 + \frac{\pi}{3}x\left(h-x\right)^2 + \frac{4}{81}\pi\left(h-x\right)^3 = \frac{1}{9}\pi h^3 + \frac{\pi}{81}\left(h-x\right)^2\left(23x+4h\right)$$

Troviamo la condizione di massimo

$$V'_{tot} = -\frac{2\pi}{81}\left(h-x\right)\left(23x+4h\right) + \frac{23\pi}{81}\left(h-x\right)^2 = 0$$

$$V' = \left(h-x\right)\left(-46x-8h+23h-23x\right) = \left(h-x\right)\left(15h-69x\right) = 0$$

La soluzione accettabile è $x = \frac{5}{23}h$ e il volume massimo $V_{max} = \frac{665\pi h^3}{529}$.