ESERCITAZIONI PER ESAMI DI ANALISI MATEMATICA

SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

Exercise 1. Studia le caratteristiche della seguente funzione e tracciane il grafico

$$y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x}$$

Soluzione la funzione va studiata nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

(1) Campo di esistenza: la funzione presenta al numeratore una radice quadrata sempre positiva, essendo il suo radicando la somma di due quadrati; essa è definita quindi per $x \neq 0$, cioè

$$(-\infty; 0) \cup (0; -\infty)$$

(a) Segno della funzione: per quanto detto sopra, il segno della funzione è determinato dal segno del denominatore, per cui

$$\begin{array}{lll} y > 0 & per & x > 0 \\ y < 0 & per & x < 0 \end{array}$$

(b) intersezione con gli assi: intersezione asse x, di equazione $y = 0$

$$\sqrt{x^4+1} = 0$$

nessuna intersezione;
intersezione con l'asse y, di equazione $x = 0$, non possibile perché 0 non appartiene al campo di esistenza della funzione

(c) asintoti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} &= \frac{x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}}{x} = \pm\infty \\ \lim_{x\to 0^{\mp}} \frac{\sqrt{x^4+1}}{x} &= \mp\infty \end{aligned}$$

(d) punti estremanti: calcolo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{N'D - ND'}{D^2}$$

ricordando che la derivata del numeratore va calcolata secondo le regole delle funzioni composte,cioè $\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

$$y' = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}} \cdot x - 1 \cdot \sqrt{x^4+1}}{x^2} = \frac{2x^4 - \left(x^4+1\right)}{x^2\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}}$$

calcoliamo il segno della derivata prima, cioè

$$\frac{x^4-1}{x^2\sqrt{x^4+1}} > 0$$

(i) $N > 0$ $x^4 - 1 = \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right) > 0$, cioè per $x < -1 \ \vee x > 1$
(ii) $D > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ pertanto

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < -1 \ \vee x > 1 \\ y' < 0 & -1 < x < 1 \\ y' = 0 & x = \pm 1 \end{array}$$

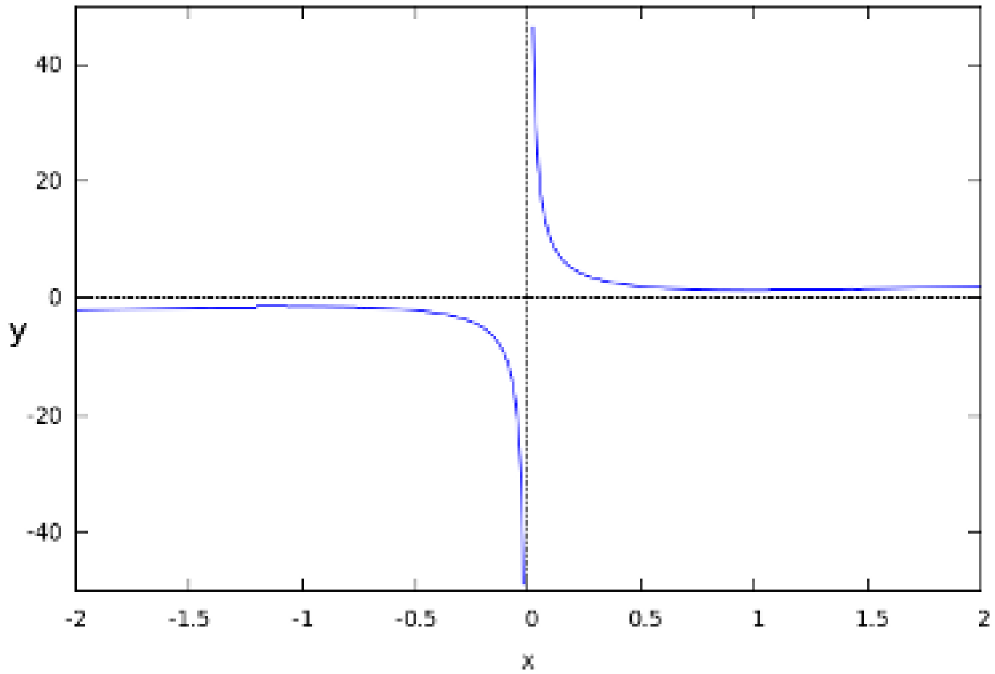
la funzione ha quindi un massimo per $x_{max} = -1$ nel punto di coordinate $M\left(-1; -\sqrt{2}\right)$ e un minimo per $x_{min} = 1$ nel punto di coordinate $m\left(1; \sqrt{2}\right)$

(e) punti di flesso: calcoliamo la derivata seconda

$$
\begin{aligned}
y'' &= \frac{4x^3\left(x^2\sqrt{x^4+1}\right)-\left(x^4-1\right)\left(2x\sqrt{x^4+1}+\frac{2x^5}{\sqrt{x^4+1}}\right)}{x^4\left(x^4+1\right)} = \\
&= \frac{4x^5\sqrt{x^4+1}-\left(x^4-1\right)\left(\frac{82x\left(x^4+1\right)+2x^5}{\sqrt{x^4+1}}\right)}{4x^4\left(x^4+1\right)} = \\
&= \frac{4x^5\left(x^4+1\right)-2x\left(x^4-1\right)\left(2x^4+1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} \\
&= \frac{4x^9+4x^5-2x\left(2x^8-x^4-1\right)}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} = \\
&= \frac{6x^5+2x}{x^4\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}} = \frac{2\left(3x^4+1\right)}{x^3\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}
\end{aligned}
$$

La derivata seconda è uguale a zero, quando il numeratore è uguale a 0, condizione che non si verifica mai. La funzione non presenta pertanto flessi.

(f) Grafico della funzione



Exercise 2. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\sqrt{\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x}} < 2$$

Soluzione: studiamo prima le condizioni di esistenza del radicale, $\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x} \geq 0$, e per questo è necessario un breve richiamo delle disequazioni irrazionali. Sia $f(x)$ il radicando di una radice di indice pari, allora si presentano due casi:

(1) $\sqrt{f(x)} < g(x)$, la disequazione si risolve mediante il sistema

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ g(x) & > & 0 \\ f(x) & < & [g(x)]^2 \end{cases}$$

(2) $\sqrt{f(x)} > g(x)$, la disequazione si risolve con l'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} f(x) & \geq & 0 \\ g(x) & < & 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) & \geq & 0 \\ f(x) & > & [g(x)]^2 \end{cases}$$

Nel nostro caso, la condizione di esistenza chiede di studiare la non negatività della frazione $\frac{x-1-\sqrt{x-1}}{2-x}$, per cui

(a) $N \geq 0$ per $x-1-\sqrt{x-1} \geq 0$, cioè $\sqrt{x-1} \leq x-1$; le soluzioni si ottengono pertanto risolvendo il sistema (vedi caso (a))

$$\begin{cases} x-1 & \geq & 0 \\ x-1 & > & 0 \\ x-1 & < & (x-1)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \\ x^2-3x+2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \\ x \leq 1 \vee x \geq 2 \end{cases} \quad \textit{intervallo comune} \quad x \geq 2$$

(b) $D > 0$ per $2-x > 0$, cioè $x < 2$

(c) La frazione sarà quindi sempre negativa

(3) la disequazione non ha quindi alcuna soluzione

Exercise 3. Calcolare gli integrali della seguente equazione differenziale

$$\left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} \cdot y' = e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

Soluzione: L'equazione può essere risolta con il metodo della variabili separabili

$$\left[\left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y}\right] dy = \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx$$

da cui

$$\int \left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx$$

risolviamo il primo integrale sostituendo $\tan y = t$, per cui, essendo $y = \arctan t$, si ha $dy = \frac{1}{1+t^2}dt$ e l'integrale diviene

$$\frac{1}{2}\int te^{t^2} 2tdt = \frac{1}{2}\int e^{t^2} d\left(t^2\right) = \frac{1}{2}e^{t^2}$$

sostituendo nuovamente, si ha

$$\int \left(1+\tan^2 y\right)\tan y \cdot e^{\tan^2 y} dy = \frac{1}{2}e^{\tan^2 y} + C_1$$

risolviamo ora il secondo integrale

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int \frac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

anche qui operiamo la sostituzione $\sqrt[3]{x} = t$ da cui $dx = 3tdt^2$; l'integrale diviene

$$\int \frac{e^t}{t^2} \cdot 3t^2 dt = 3\int e^t dt = 3e^t$$

da cui

$$\int \left(e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = 3e^{\sqrt[3]{x}} + C_2$$

Confrontando i risultati dei due integrali, si ha

$$\frac{1}{2}e^{\tan^2 y} = 3e^{\sqrt[3]{x}}$$

passando al logaritmo naturale, si ha

$$\ln\left(\frac{1}{2}e^{\tan^2 y}\right) = \ln\left(3e^{\sqrt[3]{x}}\right)$$

cioè

$$\begin{aligned} \ln\frac{1}{2} + \tan^2 y &= \ln 3 + \sqrt[3]{x} \\ \tan^2 y &= \ln 6 + \sqrt[3]{x} \\ y &= \pm\arctan\left(\ln 6 + \sqrt[3]{x}\right) + C \end{aligned}$$

Exercise 4. Calcolare l'insieme di definizione della funzione

$$z=\sqrt{\frac{(y+x-1)\left(y+x^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)}}$$

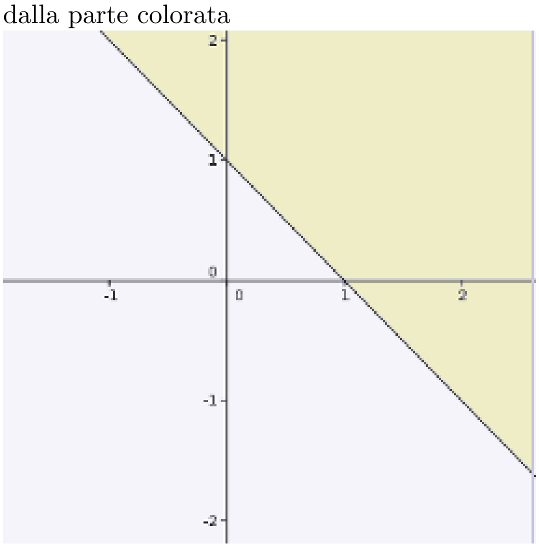
Soluzione: In questo caso, l'argomento della radice deve essere non negativo, cioè,

$$\frac{(y+x-1)\left(y+x^2\right)}{\left(y+\frac{1}{2}\right)}\geq 0$$

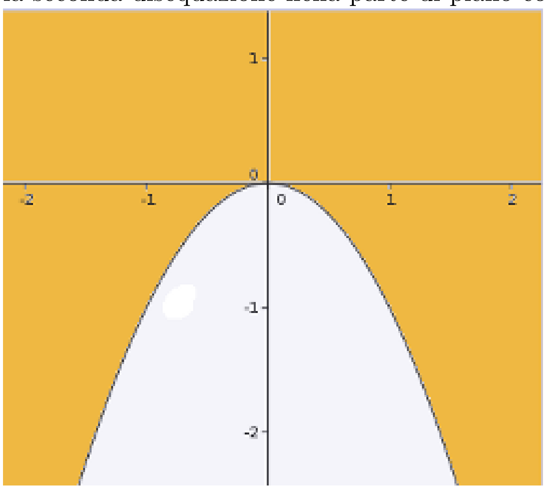
Le disequazioni possono essere risolte graficamente, rappresentando la prima una retta, la seconda una parabola con vertice nell'origine e concavità verso il basso e la terza una retta parallela all'asse x. Risolviamo applicando le modalità delle disequazioni fratte

$$\begin{aligned}(y+x-1) &\geq 0\\ \left(y+x^2\right) &\geq 0\\ y+\frac{1}{2} &> 0\end{aligned}$$

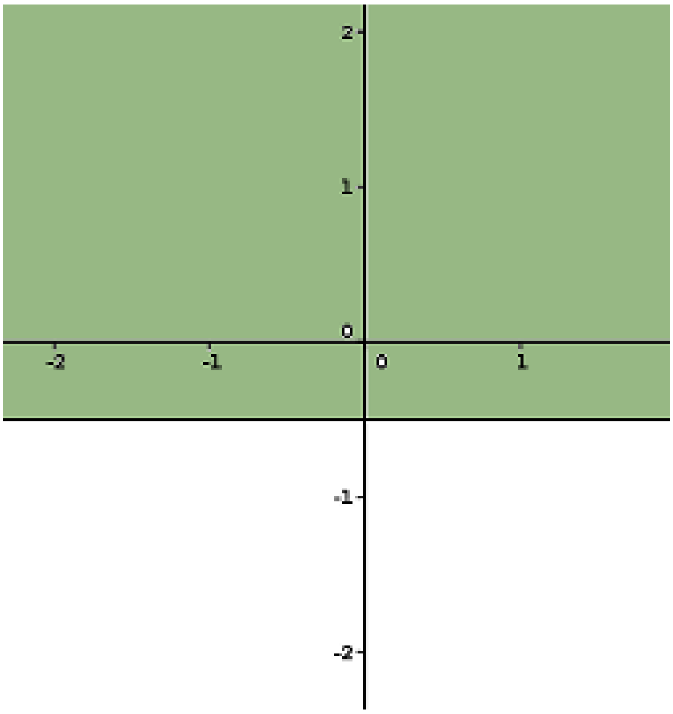
Risolviamo le disequazioni graficamente. La prima disequazione è verificata dalle coppie rappresentate dalla parte colorata



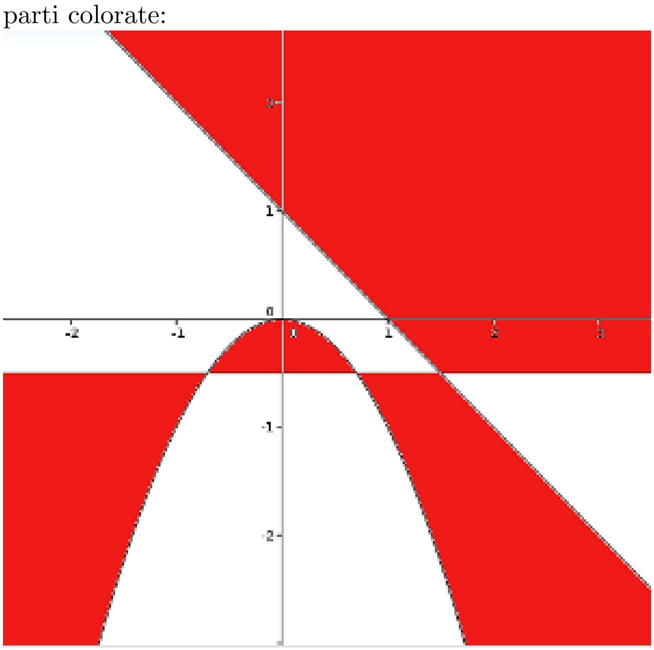
la seconda disequazione nella parte di piano colorata



infine, per l'ultima disequazione



considerando positive le parti colorate e negative quelle in bianco, si ha che il radicando è positivo nelle parti colorate:



Exercise 5. Stabilire in quali intervalli è applicabile il teorema di Rolle alla funzione

$$y = \left|x^2 - 5x + 4\right|$$

Soluzione Il teorema di Rolle afferma che se una funzione reale di variabile reale è continua in un intervallo $[a, b]$ e derivabile nell'intervallo (a, b), cioè nei suoi punti interni, allora, se $f(a) = f(b)$, esiste un punto c per il quale $f^{'}(c) = 0$.
Il polinomio $x^2 - 4x + 5 = (x-1)(x-4)$, per cui

$$\begin{array}{rcl} y = x^2 - 5x + 4 & per & x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ y = -x^2 + 5x - 4 & per & 1 \leq x \leq 4 \end{array}$$

La funzione modulo non è derivabile nei punti $x = 1$ e $x = 4$ perché in essi i limiti destro e sinistro sono diversi, infatti, se calcoliamo le derivate si ha

$$y^{'} = \begin{cases} 2x - 5 & x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ -2x + 5 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

per cui

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} y' &= -3\\ \lim_{x\to 1^+} y' &= 3\end{aligned}$$

lo stesso vale anche per l'altro punto. La funzione polinomiale è continua per ogni valore di x, per cui sono soddisfatte le condizioni del teorema di Rolle. Troviamo il valore per il quale la derivata prima si annulla

$$\pm 2x \mp 5 = 0 \;\; per \;\; x = \frac{5}{2}$$

inoltre $f\left(\frac{5}{2}-a\right) = f\left(\frac{5}{2}-a\right)$. Troviamo l'intervallo di $\frac{5}{2}$, cioè $\left[\frac{5}{2}-a; \frac{5}{2}+a\right]$ ponendo

$$\begin{aligned}\frac{5}{2} - a \geq 1 \qquad a \leq \frac{3}{2}\\ \frac{5}{2} + a \leq 4 \qquad a \leq \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{e^x + e^x \ln\tan e^x}{\cos^2 e^x} dx$$

con $\cos e^x \neq 0$ e $\tan e^x > 0$.

Soluzione: Risolviamo applicando il metodo della sostituzione della variabile, ponendo cioè

$$e^x = t \qquad dx = \frac{dt}{t}$$

sostituendo, si ha

$$\int \frac{t\left(1+\ln\tan t\right)}{\cos^2 t} \cdot \frac{dt}{t}$$

ma, $(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$, per cui $d(\tan t) = \frac{dt}{\cos^2 t}$ e sostituendo ancora

$$\tan t = u \qquad du = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

e l'integrale diviene

$$\begin{aligned}&\int \frac{1+\ln u}{\cos^2 t} \cdot \cos^2 t du =\\ &= \int du + \int \ln u du\end{aligned}$$

risolviamo il secondo integrale per parti

$$\int du + u\ln u - \int u \cdot \frac{1}{u} du = u \ln u$$

sostituendo a ritroso, si ha

$$\tan e^x \ln\tan e^x + C$$

Exercise 6. Determinare l'insieme di definizione e calcolare le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{\ln(x+1) + x^2 - 1}{x^2 + y^2 - 4}}$$

Dire poi se tra i punti di frontiera esistono degli estremanti.

Soluzione: La funzione presenta una radice quadrata, il cui argomento deve essere non negativo, un logaritmo nel radicando, il suo argomento deve essere positivo e una frazione il cui denominatore deve essere diverso da zero. Le tre condizioni poste si possono ridurre a due, in quanto l'annullamento del denominatore è una sottoparte della prima condizione; si traducono quindi

$$\begin{cases} \frac{\ln(x+1)+x^2-1}{x^2+y^2-4} \geq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione fratta

$$N \geq 0 \qquad \ln(x+1) + x^2 - 1 \geq 0$$

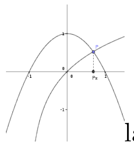
$$D > 0 \qquad x^2 + y^2 - 4 > 0$$

Risolviamo entrambe le disequazioni graficamente.

(1) Prima disequazione

$$\ln(x+1) \geq 1 - x^2$$

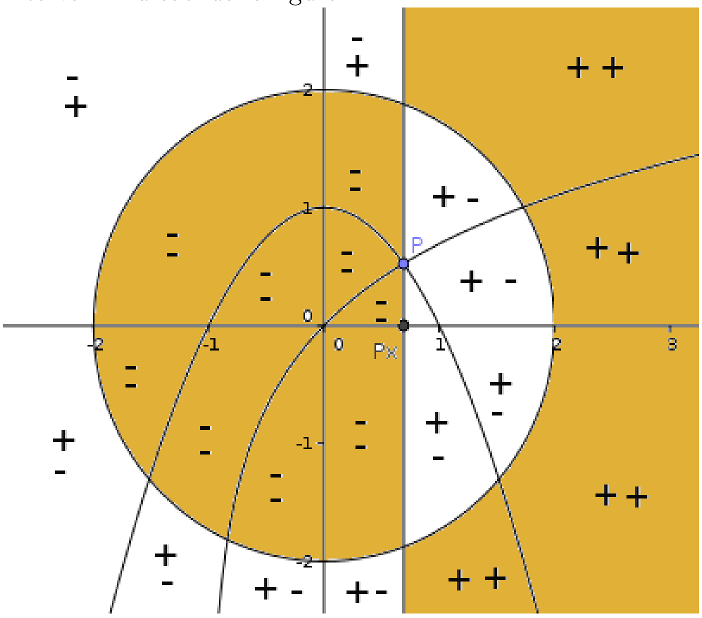
una funzione logaritmica traslata verso sinistra di vettore $-1; 0$ e una parabola con concavità rivolta verso il basso e vertice $V\left(-\frac{b}{2a} = 0; 1\right)$ e intersezioni con l'asse x per $x = \pm 1$. I grafici sono quindi



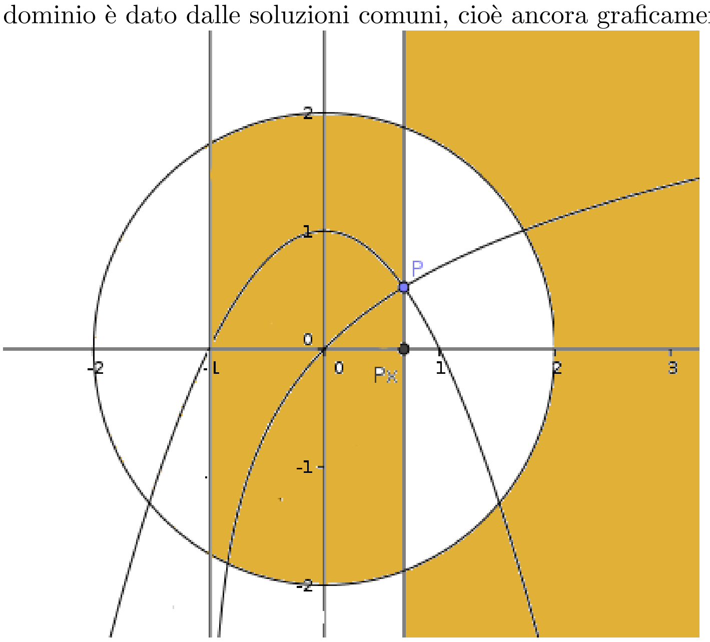
(2) Il punto di intersezione Px è compreso tra 0 e 1 la disequazione è verificata per $x \geq P_x$

(3) La seconda disequazione rappresenta una circonferenza centrata nell'origine di raggio 2 ed è verificata per tutti i punti esterni alla circonferenza stessa

(4) mettendo assieme i due risultati, sempre graficamente, si ha che la frazione è non negativa negli intervalli indicati dalla figura



(5) se consideriamo ora anche la seconda disequazione del sistema, che ha come soluzioni $x > -1$, il dominio è dato dalle soluzioni comuni, cioè ancora graficamente



Exercise 7. Determinare gli eventuali punti di discontinuità della funzione, classificare la specie di discontinuità in $x=0$ ed eliminare la discontinuità, se possibile in tale punto

$$y = x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}+\frac{\ln(1+x)}{x}$$

Soluzione:: la funzione è la somma di due frazioni i cui denominatori devono essere diversi da zero; inoltre, nel numeratore della seconda frazione, l'argomento del logaritmo deve essere positivo.

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}} &\neq 0 \\ x &\neq 0 \\ 1+x &> 0 \end{aligned}$$

Risolvendo

$$\begin{aligned} \forall x &\in \mathbb{R} \\ x &\neq 0 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

i punti di discontinuità si trovano quindi per $x=0$; $x=-1$. Per $x=0$, calcoliamo i limiti

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^{\pm}} x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}+\frac{\ln(1+x)}{x} &= \\ \lim_{x\to 0^{+}} x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}\left(1+e^{-\frac{2}{x}}\right)}+\frac{\ln(1+x)}{x} &= 1 \end{aligned}$$

in quanto $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ (limite notevole). Si può eliminare la discontinuità ponendo

$$y = \begin{cases} x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}+\frac{\ln(1+x)}{x} & per \quad x\neq 0 \\ \lim_{x\to 0^{\pm}} x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}+\frac{\ln(1+x)}{x}=1 & per \quad x=0 \end{cases}$$

Exercise 8. Calcolare il seguente integrale

$$\int\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}+x\sqrt[6]{x}+x}dx$$

Soluzione: sostituisco $x=t^6$, e $dx=6t^5dt$, ottenendo

$$\int\frac{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}{\sqrt[3]{t^{24}}+t^6\sqrt[6]{t^6}+t^6}\cdot 6t^5dt = 6\int\frac{t^3+t^2}{t^8+t^7+t^6}$$

raccogliendo

$$6\int\frac{t^2(t+1)}{t^6(t^2+t+1)}\cdot t^5dt = 6\int\frac{t^2+t}{t^2+t+1}dt$$

aggiungendo e togliendo 1al numeratore, si ha

$$6\int\frac{t^2+t+1-1}{t^2+t+1}dt = 6\int dt-6\int\frac{dt}{t^2+t+1}$$

il secondo integrale si può risolvere, riscrivendo

$$6t-6\int\frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

ma $\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, per cui, moltiplicando Num. e Den. per $\frac{4}{3}$

$$6t-6\times\frac{4}{3}\int\frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = 6t-8\int\frac{dt}{\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$$

moltiplicando per $\sqrt{\frac{3}{2}}$ e ricordando gli integrali delle funzioni elementari, si ha

$$6t-8\int\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{1+\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = 6t-4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)$$

risolvendo ora in x, si ha

$$6\sqrt[6]{x} - 4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Exercise 9. Stabilire il campo di esistenza della seguente funzione e la natura dei suoi punti di frontiera

$$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{-(4x^2+4y^2-4)}}{\sqrt{1-4y^2}}}$$

Soluzione::

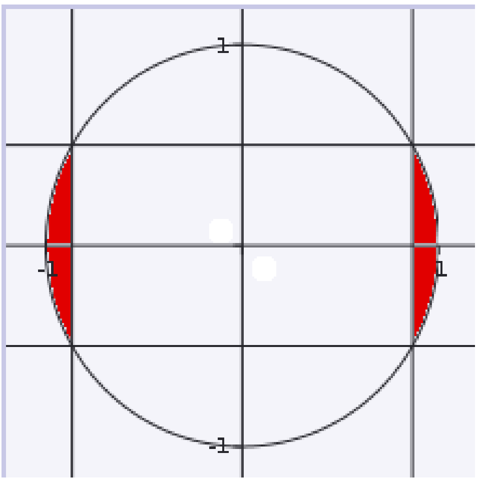
(1) la radice principale deve avere il radicando non negativo; lo stesso deve valere per le ulteriori radici, ma $\sqrt{1-4y^2}$ può avere radicando solo positivo, essendo al denominatore di una frazione. Pertanto

$$\begin{cases} 1 - \frac{\sqrt{-(4x^2+4y^2-4)}}{\sqrt{1-4y^2}} & \geq & 0 \\ 4x^2+4y^2-4 & \leq & 0 \\ 1-4y^2 & > & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{1-4y^2} - \sqrt{-(4x^2+4y^2-4)} \geq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2-3 \leq 0 \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee x \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x^2+y^2-1 \leq 0 \\ -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Graficamente



Exercise 10. Studiare e tracciare il grafico della seguente funzione

$$y = 2x - \frac{x}{|\ln x|}$$

Soluzione:

(1) Campo di esistenza: denominatore della frazione diverso da zero e argomento del logaritmo positivo:

$$\begin{cases} \ln x \neq 0 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \neq 1 \\ x > 0 \end{matrix}$$

per cui

$$C.E: \ (0;1) \cup (1;+\infty)$$

(2) La presenza del valore assoluto richiede lo studio della funzione nei due intervalli, cioè

$$\begin{cases} y = 2x + \dfrac{x}{\ln x} & 0 < x < 1 \\ \\ y = 2x - \dfrac{x}{\ln x} & x > 1 \end{cases}$$

(3) Primo caso $y = 2x + \frac{x}{\ln x}$ per $0 < x < 1$.

(a) Intersezione con l'asse x

$$2x + \frac{x}{\ln x} = 0$$

cioè

$$2x \ln x + x = 0 \qquad x\,(2\ln x + 1) = 0$$

$$x = 0 \;\; non\, acc \qquad x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

la funzione passerà quindi per il punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{e}};0\right)$

(b) intersezione con l'asse y sarà vuota tenendo conto del campo di esistenza

(4) segno della funzione

$$2x + \frac{x}{\ln x} > 0$$

tenendo conto della risoluzione dell'equazione e del campo di esistenza, si ha

$$y < 0 \quad per \quad \frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1$$
$$y > 0 \quad per \quad 0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$$

(5) comportamento della funzione negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x\ln x + x}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln x + 3}{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \quad = \quad 0$$
$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x\ln x + x}{\ln x} = \lim_{x\to 1^-} \left[\frac{1}{0^-}\right] \quad = \quad -\infty$$

eventuali asintoti obliqui

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,(2\ln x + 1)}{x\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln x + 1}{\ln x} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,(2\ln x + 1)}{\ln x} - 2x = \lim_{x\to\infty} \frac{2x\ln x + x - 2x\ln x}{\ln x} = \infty$$

non esistono pertanto asintoti obliqui

(6) crescenza e decrescenza

$$y^{'} = \frac{2\ln^2 x + \ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$$

(a) Numeratore positivo

$$N > 0 \quad 2\ln^2 x + \ln x - 1 > 0$$

sostituendo $\ln x = t$, si ha

$$2t^2 + t - 1 > 0$$

per cui $t < -1 \vee t > \frac{1}{2}$, cioè

$$\ln x > \frac{1}{2} \qquad x > \sqrt{e}\, fuori\, dal\, C.E.$$
$$\ln x < -1 \qquad 0 < x < \frac{1}{e}$$

(b) Denominatore sempre positivo nel campo di esistenza; pertanto

$$y^{'} > 0 \quad crescente\ per \quad \frac{1}{e} < x < 1$$
$$y^{'} < 0 \quad decrescente\ per \quad 0 < x < \frac{1}{e}$$

avremo quindi un massimo $M\left(\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$.

(7) concavità e flessi

$$y'' = \frac{\left(\frac{4\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)\ln^2 x - \frac{2\ln x}{x}\left(2\ln^2 x + \ln x - 1\right)}{\ln^4 x} =$$

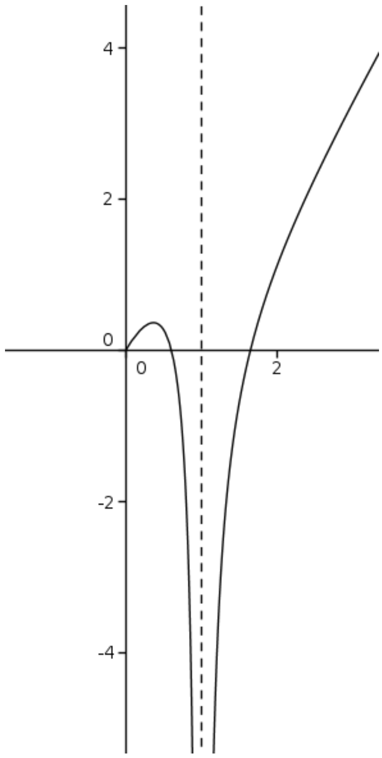
$$= \frac{\left(\frac{4\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)\ln x - \frac{2}{x}\left(2\ln^2 x + \ln x - 1\right)}{\ln^3 x}$$

$$y'' = \frac{-\frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x}}{\ln^3 x} = \frac{2 - \ln x}{x\ln^3 x}$$

la derivata seconda si annulla per

$$x = e^2$$

(8) Grafico della funzione



Exercise 11. Risolvere la seguente disequazione

$$\ln\left(\sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3}\right) > 0$$

Soluzione: Per risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$ dobbiamo risolvere il seguente sistema che contiene anche le condizioni di esistenza del primo membro. In particolare, 1°) il logaritmo esiste se il suo argomento è positivo, 2°) la radice quadrata esiste se il suo radicando non è negativo. Pertanto

$$\begin{cases} \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq 0 \\ \ln\left(\sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3}\right) & > 0 \end{cases}$$

nell'intervallo delle condizioni di esistenza la disequazione logaritmica si risolve considerando che la funzione logaritmica è positiva quando il suo argomento è > 1. Il sistema, quindi, diventa

$$\begin{cases} \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq 0 \\ \sqrt{\ln|x| - x^2 + 5x - 3} & > 1 \end{cases}$$

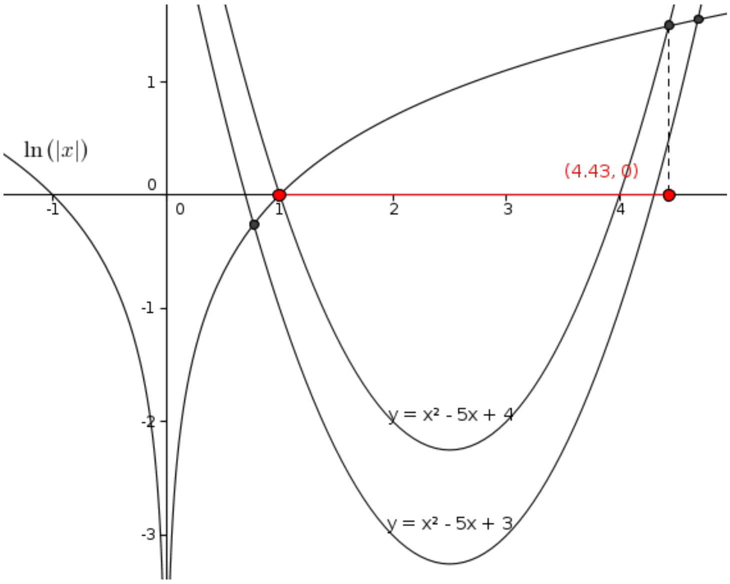
Il sistema cerca le soluzioni comuni tra più disequazioni, pertanto, la prima disequazione può essere trascurata e il sistema diviene, elevando al quadrato entrambi i membri della terza disequazione

$$\begin{cases} \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & \geq 0 \\ \ln|x| - x^2 + 5x - 3 & > 1 \end{cases}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \ln|x| & \geq & x^2-5x+3 \\ \ln|x| & > & x^2-5x+4 \end{cases}$$

È quindi possibile affrontare la soluzione di queste disequazioni trascendenti con il metodo grafico, rappresentando le funzioni $y=\ln|x|$ e le due parabole $y=x^2-5x+3$ e $y=x^2-5x+4$. La figura mostra la rappresentazione grafica di tutte le funzioni e l'intervallo delle soluzioni. (Si potrebbe considerare solo la seconda disequazione, avendo le due parabole lo stesso asse di simmetria)



Exercise 12. Determinare, se esistono, i punti di massimo e minimo della funzione $z=f(x,y)=\sqrt{(x+y)(y-x^2-x)}$

Soluzione: La condizione necessaria richiede che esistano e siano nulle le derivate rispetto a x e y, per cui

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-3x^2-2x-2xy}{2\sqrt{(x+y)(y-x^2-x)}}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y-x^2}{2\sqrt{(x+y)(y-x^2-x)}}$$

Le derivate si annullano contemporaneamente se

$$\begin{cases} 3x^2+2x+2xy=0 \\ 2y-x^2=0 \end{cases}$$

risolviamo il sistema per determinare i punti stazionari

$$\begin{cases} 3x^2+2x+x^3=0 \\ y=\frac{x^2}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(x^2+3x+2\right)=0 \\ y=\frac{x^2}{2} \end{cases}$$

le soluzioni saranno rappresentate dai tre punti $P_1(0;0)$, $P_2\left(-1;\frac{1}{2}\right)$, $P_3(-2;2)$

La derivata prima **non è definita** in alcun punto P, perché il radicando è ≤ 0. La condizione sufficiente richiederebbe che esistano le derivate seconde nei punti trovati tali che, detti $A=f^{"}_{xx}(x_p,y_p)$, $B=f^{"}_{xy}(x_p,y_p)$, $C=f^{"}_{yy}(x_p,y_p)$, se il discriminante, $\Delta=AC-B^2>0$ il punto P sarà un max se $A<0$ (o $C<0$, un minimo se $A>0$ (o $C>0$). Non eseguiamo pertanto il calcolo delle derivate seconde nei punti stazionari. la funzione non avrà né max né min.

Exercise 13. Risolvere la seguente equazione differenziale $y'-x\sin x\left(y^2-4y-5\right)=0$

Soluzione: Equazione del primo ordine a variabili separabili.

$$\frac{dy}{(y^2-4y-5)} = x\sin x dx$$

integrando entrambi i membri

$$\int\frac{dy}{(y^2-4y-5)} = \int x\sin x dx$$

Calcoliamo l'integrale della funzione razionale al primo membro, dopo aver scomposto il denominatore

$$\int \frac{dy}{(y-5)(y1-1)} \qquad si\,ha \qquad \frac{1}{(y-5)(y11)} = \frac{A}{y-5} + \frac{B}{y+1}$$

$$1 = y(A+B) + (A-5B)$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-5B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{6} \\ B=-\frac{1}{6} \end{cases}$$

da cui

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+1} = \int x \sin x dx$$

risolviamo l'integrale al secondo membro per parti, osservando che $\sin x dx = d(-\cos x)$

$$\frac{1}{6}\int \frac{dy}{(y-5)} - \frac{1}{6}\int \frac{dy}{y+1} = -x\cos x + \int \cos x dx$$

avremo

$$\ln\left|\frac{y-5}{y+1}\right| = 6(-x\cos x + \sin x + C)$$

$$\frac{y-5}{y+1} = e^{6(-x\cos x+\sin x+C)}$$

$$\frac{y-5}{y+1} - 1 = e^{6(-x\cos x+\sin x+C)} - 1$$

$$-\frac{6}{y+1} = e^{6(-x\cos x+\sin x+C)} - 1$$

da cui

$$y = \frac{-6}{e^{6(-x\cos x+\sin x+C)} - 1} - 1 = \frac{5 + e^{6(-x\cos x+\sin x+C)}}{1 - e^{6(-x\cos x+\sin x+C)}}$$

Exercise 14. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y = \frac{|x|}{x} - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

Soluzione: Determiniamo il C.E della funzione: la radice al denominatore è sempre positiva per cui $C.E : \mathbb{R}_0$. La presenza del modulo richiede di distinguere i casi in cui la variabile indipendente è positiva o negativa.

1° caso) $x > 0$, la funzione diviene

$$y = 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

essa non può intersecare l'asse y per le C.E e non interseca nemmeno l'asse x, come si vede dal calcolo

$$\begin{cases} 1 = \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x^2+5} = x-5 \\ x^2+5 \geq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ \forall x \\ x \geq 5 \end{cases}$$

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} > 0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5} - x + 5}{\sqrt{x^2+5}} > 0$$

$$N > 0 \qquad \sqrt{x^2+5} > x-5$$

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x^2+5 > (x-5)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x-5 < 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 5 \\ x > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x < 5 \\ \forall x \in C.E \end{cases}$$

$$x \geq 5 \cup x < 5 \quad (x \neq 0)$$

$$D > 0 \qquad \forall x \in C.E$$

la funzione risulta quindi sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} = \lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} 1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} = 1+\sqrt{5}$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x = 0$, cioè l'asse delle ascisse.

Cerchiamo ora eventuali punti stazionari, calcolando la derivata prima della funzione

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2+5} - (x-5)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}}{x^2+5} = \frac{-5x-5}{\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}}}$$

la derivata è sempre definita nel campo di esistenza. Studiamo il suo suo segno, osservando che il denominatore è sempre positivo, per cui la derivata prima risulta positiva per $x < -1$, cioè la funzione è sempre decrescente nell'intervallo $x > 0$.

Cerchiamo eventuali flessi calcolando la derivata seconda

$$y" = \frac{-5\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} + 15\left(x+1\right)\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+5\right)^3} = \frac{5\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{2}}\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^3} = \frac{5\left(2x^2+3x-5\right)}{\left(x^2+5\right)^{\frac{5}{2}}}$$

la derivata seconda si annulla quando $2x^2+3x-5 = 0$, cioè per $x = 1$ e $x = -\frac{5}{2}$, quest'ultimo non nell'intervallo $x > 0$. Avremo quindi un flesso nel punto $F\left(1; \frac{3+2\sqrt{6}}{6} \simeq 1,32\right)$

2°) caso per $x < 0$, la funzione diventa

$$y = -1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}$$

anche in questo caso non abbiamo intersezioni con gli assi, in quanto il valore $x = 2$ non appartiene all'intervallo $x < 0$.

Studiamo il segno della funzione per stabilire gli intervalli in cui è positiva e negativa:

$$-1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}} > 0 \qquad \frac{\sqrt{x^2+5}+x-5}{\sqrt{x^2+5}} < 0$$

$$\begin{array}{ll}
N > 0 & \sqrt{x^2+5} > 5-x \\
 & \begin{cases} 5-x \geq 0 \\ x^2+5 > (5-x)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} 5-x < 0 \\ x^2+5 > 0 \end{cases} \\
 & \begin{cases} x \leq 5 \\ x > 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x > 5 \\ \forall x \in C.E \end{cases} \\
 & 2 < x \leq 5 \cup x > 5 \\
D > 0 & \forall x \in C.E
\end{array}$$

la funzione risulta quindi positiva per $x < 2$ e quindi nell'intervallo $x < 0$ sarà sempre positiva.

Cerchiamo eventuali asintoti

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-1 - \frac{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-}\left(-1 - \frac{x-5}{\sqrt{x^2+5}}\right) = \sqrt{5}-1$$

avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $x = 0$, cioè l'asse delle ascisse.

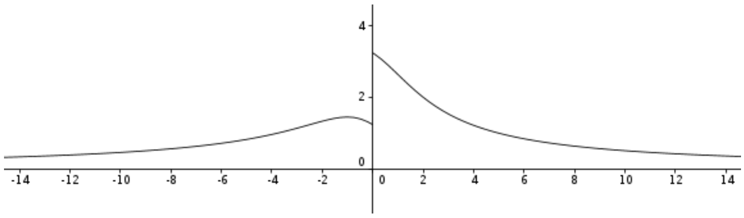
Nella ricerca di eventuali punti stazionari, osserviamo che la derivata prima della funzione è identica a quella già calcolata prima e quindi avremo

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & per & x < -1 \\ y' < 0 & per & -1 < x < 0 \end{array}$$

la funzione avrà quindi un massimo $M\left(-1; \sqrt{6}-1 \simeq 1,45\right)$

Anche la derivata seconda è uguale alla precedente e avremo questa volta un flesso $F_2\left(-\frac{5}{2}; \sqrt{5}-1 \simeq 1,24\right)$

Il grafico della funzione completa è mostrato nella figura sotto. La funzione presenta una discontinuità di prima specie nel punto di ascissa $x = 0$ con un salto $\Delta y = 2$



Exercise 15. Determinare le specie di discontinuità in $x=0$ e $x=1$ della funzione

$$y=\frac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\frac{x+1}{x-1}$$

Soluzione: Calcoliamo il limite destro e sinistro nei due punti indicati

$$\lim_{x\to1^-}\tfrac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\tfrac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}1-\tfrac{2}{0^-}=+\infty$$
$$\lim_{x\to1^+}\tfrac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\tfrac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}1-\tfrac{2}{0^+}=-\infty$$

la discontinuità è pertanto di seconda specie

$$\lim_{x\to0^-}\tfrac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\tfrac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to0^-}\tfrac{-\frac{1}{|x|}}{\frac{2\ln|x|}{|x|}}+1=\lim_{x\to0^-}\tfrac{-1}{2\ln|x|}+1=1$$
$$\lim_{x\to0^+}\tfrac{1-\ln|x|}{1+\ln^2|x|}-\tfrac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\tfrac{-\frac{1}{|x|}}{\frac{2\ln|x|}{|x|}}-1=\lim_{x\to0^-}\tfrac{-1}{2\ln|x|}-1=-1$$

si ha quindi una discontinuità di prima specie con un salto pari a $-1-1=-2$

Exercise 16. Determinare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$z=\frac{\sqrt{y^2-x^2}+\ln\left(4-x^2-y^2\right)}{\sqrt{xy}+1}$$

Soluzione: L'insieme di definizione si ottiene risolvendo il sistema che raggruppa tutte le condizioni di esistenza per i radicali, il logaritmo e la frazione

$$\begin{cases} x^2-y^2\le0\\ x^2+y^2-4<0\\ xy\ge0\\ \sqrt{xy}+1\ne0\end{cases}$$

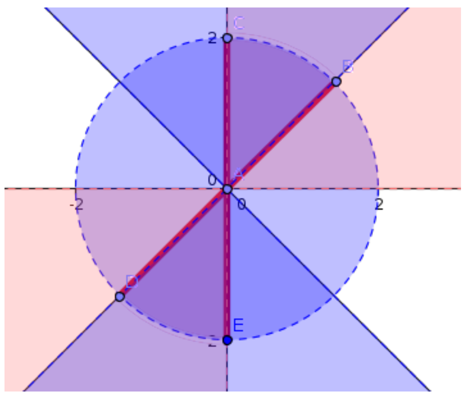
la prima disequazione ($x^2-y^2=0$ è una iperbole degenere nelle due bisettrici dei quadranti) ha come soluzioni la parte di piano compresa tra le due bisettrici dei quadranti dove $|y|>|x|$;

la seconda disequazione ha come soluzioni l'insieme dei punti interni del cerchio di centro O e raggio 2

la terza disequazione ha come soluzioni i punti del 1° e 3° quadrante dove x e y hanno lo stesso segno

l'ultima disequazione è sempre vera se si considera vera la terza.

La figura mostra la parte di piano, delimitata dalle linee rosse e dall'arco di circonferenza non compreso, dove le coordinate dei punti soddisfano la funzione data



Exercise 17. Determinare gli integrali di $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$

Soluzione: Equazione del tipo $y' + P(x)y = Q(x)$. Risolviamo introducendo due funzioni, dipendenti da x, tali che $y = uv$, e derivando si ha $y' = u'v + uv'$. Sostituiamo nell'equazione data

$$u'v + uv' + uv\cos x = \sin x\cos x$$

cioè

$$uv' + v\left(u' + u\cos x\right) = \sin x\cos x$$

imponiamo $u' + u\cos x = 0$, da cui otteniamo, separando le variabili

$$\frac{du}{u} = -\cos x dx \qquad \int \frac{du}{u} = -\int \cos x dx$$

$$\ln|u| = -\sin x \qquad u = e^{-\sin x}$$

sostituiamo per ottenere v

$$e^{-\sin x}v' = \sin x\cos x$$

e di nuovo, separando le variabili

$$dv = \frac{\sin x\cos x}{e^{-\sin x}} \qquad \int dv = \int \frac{\sin x\cos x}{e^{-\sin x}}dx$$

$$v = \int e^{\sin x}\sin x\cos x dx$$

poniamo $t = \sin x$, per cui $dt = \cos x dx$, l'integrale diviene $v = \int te^t dt$; integriamo per parti:

$$v = te^t - \int e^t dt = e^t(t-1) = e^{\sin x}(\sin x - 1)$$

da cui

$$y = uv = e^{-\sin x}\cdot\left(e^{\sin x}(\sin x - 1) + C\right) = \sin x - 1 + Ce^{-\sin x}$$

Exercise 18. Calcolare il campo di esistenza e le derivate parziali prime di

$$f(x,y) = \sqrt{-\left(x^2+y^2+2x\right)} + \ln\frac{1+xy}{y-x^2+1}$$

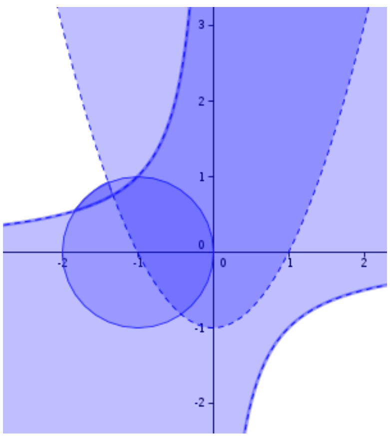
Soluzione: la determinazione del campo di esistenza passa attraverso la risoluzione del seguente sistema che contiene le condizioni affinché esistano il radicale e il logaritmo

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x \le 0 \\ \frac{1+xy}{y-x^2+1} > 0 \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata per tutti i punti del cerchio, comprensivi della circonferenza. Risolviamo la seconda disequazione

$$\begin{array}{ll} N > 0 & xy > -1 \\ D > 0 & y > x^2 - 1 \end{array}$$

la prima disequazione raggruppa i punti del piano delimitati dall'iperbole equilatera riferita agli asintoti $xy = -1$; la seconda i punti interni alla parabola $y = x^2 - 1$ di vertice $0; -1$ e passante per i punti $-1; 0$ e $1; 0$. La figura mostra la parte di piano che rappresenta l'insieme dei punti del C.E. (È la parte con il colore più marcato)



Exercise 19. Tracciare il grafico della funzione

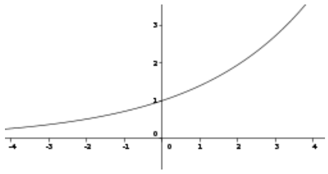
$$y=\left|1-\sqrt[3]{e^{x-1}}\right|$$

e scrivere le equazioni delle tangenti alla curva negli eventuali punti di intersezione con gli assi coordinati.

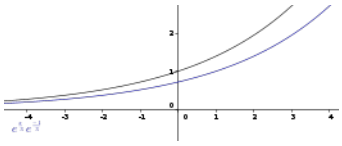
Soluzione: questa funzione può essere studiata nelle forme tradizionali. Si può ottenere il suo grafico molto più rapidamente costruendola mediante successive trasformazioni, riscrivendo la funzione nella forma

$$y=\left|1-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\cdot e^{\frac{x}{3}}\right|$$

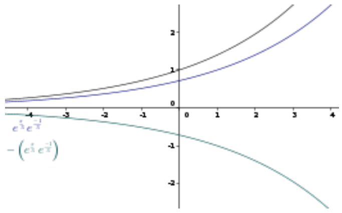
- La nostra funzione di partenza sarà $y=e^{x}$, funzione che consideriamo nota
- rappresentiamo $y=e^{\frac{x}{3}}$, applicando una dilatazione orizzontale: la forma grafica sarà



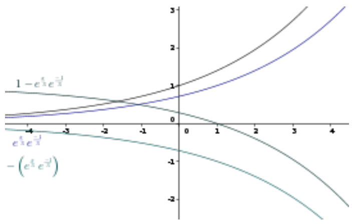
- rappresentiamo ora $y=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\cdot e^{\frac{x}{3}}$, una dilatazione verticale



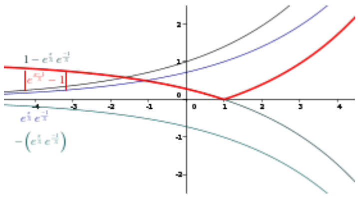
- Costruiamo la simmetrica rispetto all'asse delle x, $y=-\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\cdot e^{\frac{x}{3}}$



- operiamo una traslazione verticale verso l'alto di vettore $(0;1)$



- costruiamo il simmetrico rispetto all'asse x della parte negativa della funzione



La funzione interseca gli assi nei punti

$$asse\,x\quad\begin{cases}x=0\\ y=1-\sqrt[3]{\frac{1}{e}}\simeq 0.28\end{cases}$$

$$asse\,y\quad\begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$$

Si può osservare che il punto di coordinate $(1;0)$ è un punto angoloso. Infatti calcolando le due derivate si ottengono due tangenti diverse.

$$per\,x\leq 1\quad y'=-\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}}\quad y'(1)=-\frac{1}{3}$$

$$per\,x>1\quad y'=\frac{1}{3}\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^{\frac{1}{3}}}\quad y'(1)=\frac{1}{3}$$

le rette tangenti avranno equazioni $y = \pm\frac{1}{3}(x-1)$

La derivata nel punto $\left(0; 1-\sqrt[3]{\frac{1}{e}}\right)$ avrà valore $y'(0) = -\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}}$ e l'equazione della tangente sarà $y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{e}}x + 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

Exercise 20. Dopo aver calcolato gli integrali dell'equazione differenziale $yy' = y^2 xe^x$, calcolare l'integrale particolare che soddisfa la condizione $y(1) = \frac{1}{2}$.

Soluzione: Risolviamo con il metodo delle variabili separabili

$$\frac{y}{y^2}dy = xe^x dx$$

e integrando

$$\frac{1}{2}\int\frac{2ydy}{y^2} = \int xe^x dx$$

da cui, integrando per parti l'integrale al secondo membro

$$\frac{1}{2}\ln\left|y^2\right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

risolviamo rispetto a y

$$y = C_1 e^{e^x(x-1)}$$

dove $C_1 = e^c$. L'integrale particolare sarà, sostituendo $\frac{1}{2} = C_1 e^{e \cdot 0} = C_1$

$$y = \frac{1}{2}e^{e^x(x-1)}$$

Exercise 21. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione $\sqrt{|x+1| + \frac{6}{x}} < 1$

Soluzione: La disequazione si divide in due parti a seconda del segno di $x+1$, per cui

1) $x \geq -1$, la disequazione diventa $\sqrt{\frac{x^2+x+6}{x}} < 1$. Poiché 1 è sempre maggiore di 0, basterà che

$$\begin{cases} \frac{x^2+x+6}{x} < 1 \\ \frac{x^2+x+6}{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x^2+6}{x} < 0 \\ \frac{x^2+x+6}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 1^a\,diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & -1 < x < 0 \\ 2^a diseq & \begin{array}{ll} N \geq 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & x > 0 \end{array}$$

il sistema non ha soluzioni

2) $x < -1$, la disequazione diventa $\sqrt{\frac{-x^2-x+6}{x}} < 1$, per cui

$$\begin{cases} \frac{-x^2-x+6}{x} < 1 \\ \frac{-x^2-x+6}{x} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{-x^2-2x+6}{x} < 0 \\ \frac{-x^2-x+6}{x} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} 1^a\,diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & -1-\sqrt{7} < x < -1+\sqrt{7} \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & -1-\sqrt{7} < x < -1 \\ 2^a\,diseq & \begin{array}{ll} N > 0 & -3 \leq x \leq 2 \\ D > 0 & x > 0 \end{array} \\ & x \leq -3 \end{array}$$

la soluzione comune del sistema sarà rappresentata dall'intervallo $-1-\sqrt{7} < x \leq -3$

Exercise 22. Trovare l'integrale che soddisfa la condizione $x \neq 3$ e la condizione iniziale $y(0) = 0$, della seguente equazione differenziale

$$x(y-1) = (x-3)^2 y'$$

Soluzione: risolviamo separando le variabili e integrando entrambi i membri

$$\frac{dy}{y-1}=\frac{x}{(x-3)^2}dx \qquad \int\frac{dy}{y-1}=\int\frac{x}{(x-3)^2}dx$$

$$\ln|y-1|=\int\frac{x-3}{(x-3)^2}dx+3\int\frac{dx}{(x-3)^2} \qquad \ln|y-1|=\ln|(x-3)|-\frac{3}{x-3}+C$$

la soluzione sarà

$$y-1=C_1\,(x-3)^2\,e^{\frac{1}{3-x}} \qquad y=C_1\,(x-3)^2\,e^{\frac{1}{3-x}}+1$$

se $x\neq 3$, allora $y\,(0)=C_2e^{\frac{1}{3}}+1$

Exercise 23. Studiare la funzione seguente e tracciarne il grafico

$$y=\sqrt{-\ln\frac{2x+5}{9}}$$

Soluzione: applicando le proprietà dei logaritmi, riscriviamo la funzione nella forma

$$y=\sqrt{\ln\left(\frac{2x+5}{9}\right)^{-1}}=\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}$$

- **Campo di Esistenza**: la radice quadrata esiste se il radicando non è negativo; il logaritmo esiste se il suo argomento è maggiore di zero

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}\geq 0\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{9}{2x+5}\geq 1\\ \frac{9}{2x+5}>0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{4-2x}{2x+5}\geq 0\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases}N\geq 0\ x\leq 2\\ D>0\ x>-\frac{5}{2}\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\frac{5}{2}<x\leq 2\\ x>-\frac{5}{2}\end{cases} \qquad C.E:-\frac{5}{2}<x\leq 2$$

- **Intersezioni con assi**: calcoliamo le intersezioni con l'asse x

$$\begin{cases}\ln\frac{9}{2x+5}=0\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{9}{2x+5}=1\\ y=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=2\\ y=0\end{cases} \qquad P\,(2;0)$$

intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases}x=0\\ y=\ln\frac{9}{5}\end{cases} \qquad Q\left(0;\ln\frac{9}{5}\simeq 0.6\right)$$

- **Asintoti**: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to-\frac{5}{2}^+}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=+\infty \qquad \lim_{x\to 2}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}=0$$

avremo un asintoto verticale di equazione $x=-\frac{5}{2}$

- **Segno della funzione**: studiamo dove la funzione assume valori positivi e negativi

$$\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}>0 \qquad \forall x\in C.E.$$

la funzione sarà quindi sempre positiva

- **Punti stazionari, crescenza e decrescenza**: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{\frac{2x+5}{9}\cdot\frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}} \qquad y'=-\frac{1}{(2x+5)\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

la derivata prima non si annulla mai e quindi la funzione è sempre crescente.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} - (2x+5)\frac{\frac{2x+5}{9}\cdot\frac{-18}{(2x+5)^2}}{2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}} \qquad y" = \frac{-2\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}} + \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}}$$

$$y" = \frac{-2\ln\frac{9}{2x+5}+1}{4(2x+5)^2\ln\frac{9}{2x+5}\sqrt{\ln\frac{9}{2x+5}}}$$

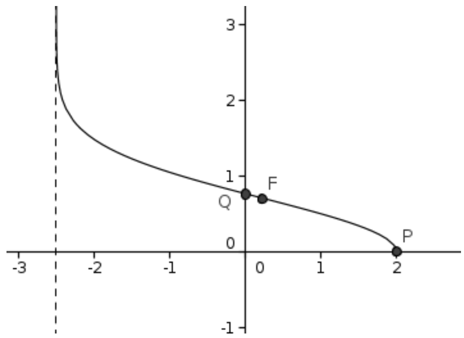
la derivata seconda si annulla se

$$-2\ln\frac{9}{2x+5}+1=0 \qquad \ln\frac{9}{2x+5}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{9}{2x+5}=\sqrt{e} \qquad x=\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}}\simeq 0.23$$

la funzione avrà un flesso nel punto $F\left(\frac{9-5\sqrt{e}}{2\sqrt{e}};\sqrt{\frac{1}{2}}\simeq 0.71\right)$. Infatti $F_y=\sqrt{\ln\left(\frac{9}{\frac{9-5\sqrt{e}}{\sqrt{e}}+5}\right)}=\ln\frac{9\sqrt{e}}{9}=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

- **Rappresentazione grafica**: ecco il grafico della funzione



Exercise 24. Tracciare il grafico della funzione

$$y = e^{x+1} - \ln|x+1|$$

- **Campo di Esistenza**: la funzione esponenziale è sempre definita, mentre il logaritmo esiste se

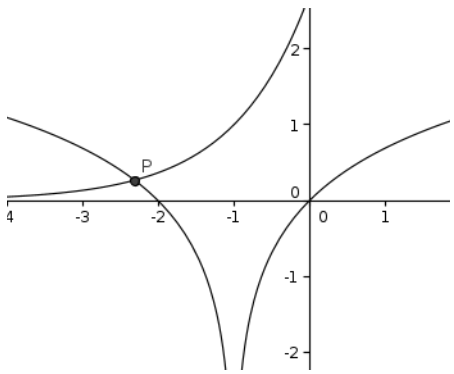
$$x+1\neq 0 \qquad x\neq -1$$

- La funzione non presenta simmetrie rispetto agli assi cartesiani e all'origine. La funzione non è, infatti, né pari né dispari
- **Intersezioni con assi**: intersezione con l'asse delle ascisse

$$\begin{cases} x=0 \\ y=e \end{cases} \qquad A(0;e)$$

$$\begin{cases} e^{x+1}=\ln|x+1| \\ y=0 \end{cases} \qquad P(\alpha;0)$$

risolviamo l'equazione graficamente, rappresentando i due membri due funzioni elementari: e^{x+1} è la funzione e^x traslata verso sinistra di 1, mentre $\ln|x+1|$ è la funzione logaritmica traslata verso destra di 1 e poi estesa con la sua simmetrica rispetto all'asse delle ordinate



la soluzione può essere espressa con $x=\alpha$, dove $-3<\alpha<-2$.

- **Segno**: il grafico sopra consente anche di discutere il segno della funzione, che si ottiene risolvendo la disequazione $e^{x+1} > \ln|x+1|$. In particolare, $y > 0$ per $x > \alpha$ e $y < 0$ per $x < \alpha$.
- **Asintoti**: calcoliamo i seguenti quattro limiti

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x+1} - \ln(-x-1) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$
$$\lim_{x\to-1^-} e^{x+1} - \ln(-x-1) = +\infty \qquad \lim_{x\to-1^+} e^{x+1} - \ln(x+1) = +\infty$$

la funzione avrà un asintoto verticale di equazione $x = -1$. Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui, essendone verificata la condizione necessaria

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1} - \ln(-x-1)}{x} = +\infty$$

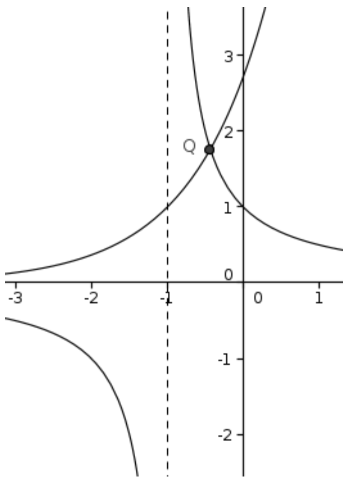
non vi sono asintoti obliqui.
- **Crescenza, decrescenza, punti stazionari**: calcoliamo la derivata prima, ricordando che se $y = \ln|x|$, $y' = \frac{1}{x}$

$$y' = e^{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

la derivata non esiste per $x = -1$, quindi ha lo stesso campo di esistenza della funzione. Studiamo il segno della derivata

$$e^{x+1} \geq \frac{1}{x+1}$$

anche in questo caso risolviamo graficamente, essendo il secondo membro un'iperbole traslata



La figura mostra che la funzione esponenziale è maggiore dell'iperbole per $x > \beta$, con $-1 < \beta < 0$. Avremo quindi

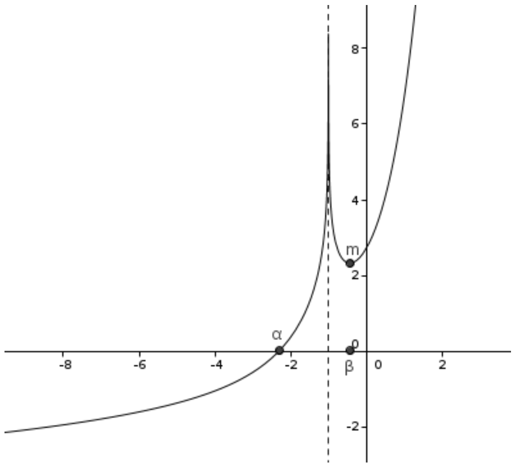
$$\begin{aligned} y' > 0 &\quad per \quad x < -1 \lor x > \beta \\ y' = 0 &\quad per \quad x = \beta \\ y' < 0 &\quad per \quad -1 < x < \beta \end{aligned}$$

la funzione sarà quindi crescente per $x < -1$ e $x > \beta$, decrescente per $-1 < x < \beta$ e avrà un punto di minimo relativo per $x = \beta$.

- **Flessi**: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = e^{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

anche la derivata seconda non è definita per $x = -1$, ma sarà sempre positiva, quindi la funzione avrà concavità sempre rivolta verso l'alto, senza la presenza di flessi.
- **Grafico**: la figura mostra il grafico della funzione data



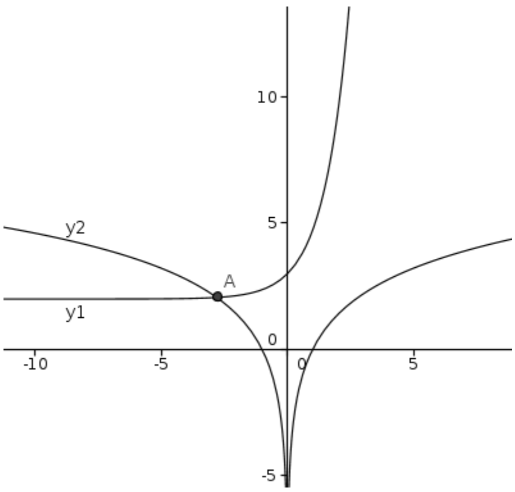
Exercise 25. Risolvere la disequazione

$$\frac{\ln x^2 - e^x - 2}{e^x + x^2 - 4} \leq 0$$

Soluzione: Il logaritmo esiste se $x \neq 0$. Studiamo separatamente il numeratore e denominatore della frazione data

$$N \geq 0 \qquad \ln x^2 \geq e^x + 2$$

risolviamo graficamente ponendo $y_1 = \ln x^2$ e $y_2 = e^x + 2$, dovrà essere $y_1 \geq y_2$.



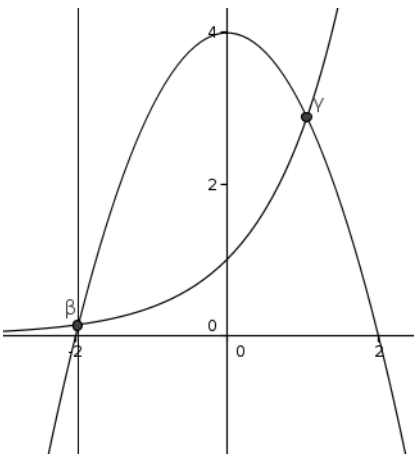
Avremo quindi

$$N \geq 0 \quad per \quad x > \alpha \quad -3 < \alpha < -2$$

Studiamo allo stesso modo il denominatore

$$D > 0 \qquad e^x > 4 - x^2$$

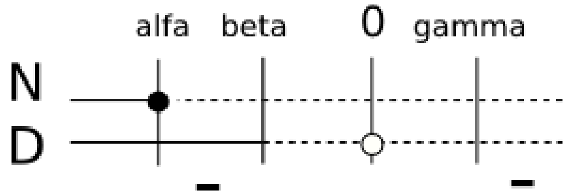
poniamo $y_1 = e^x$ e $y_2 = 4 - x^2$, dovrà essere $y_1 > y_2$.



Avremo

$$\begin{array}{cc} D>0 \quad per & x<\beta \ \vee \ x>\gamma \\ -2<\beta<-1 & 1<\gamma<2 \end{array}$$

Osservando che $\alpha<\beta<\gamma$, avremo le seguenti soluzioni



$$\alpha \leq x \leq \beta \qquad x>\gamma$$

Exercise 26. Risolvere l'integrale indefinito

$$\int \frac{e^{3x}\arctan e^x}{1+e^{2x}}dx$$

Soluzione: Applichiamo la sostituzione $e^x=t$, da cui $x=\ln t$ e $dx=\frac{1}{t}$ e avremo

$$\int \frac{t^3 \arctan t}{1+t^2}\frac{dt}{t}=\int \frac{t^2\arctan t}{1+t^2}dt$$

riscriviamo il numeratore

$$\int \frac{\left(t^2+1-1\right)\arctan t}{1+t^2}dt=\int \arctan t dt-\int \frac{\arctan t}{1+t^2}dt=$$

risolviamo il primo integrale per parti,

$$=t\arctan t-\int \frac{t}{1+t^2}dt-\int \arctan t\cdot d\left(\arctan t\right)=$$

$$=t\arctan t-\frac{1}{2}\int\frac{2t}{1+t^2}dt-\frac{\arctan^2 t}{2}=t\arctan t-\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right|-\frac{\arctan^2 t}{2}$$

infatti ($\int \frac{2t}{1+t^2}dt=\int\frac{f'(t)}{f(t)}dt=\ln|f(t)|$). Sostituendo il valore di x, otteniamo

$$\int \frac{e^{3x}\arctan e^x}{1+e^{2x}}dx=e^x\arctan e^x-\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{2x}\right)-\frac{1}{2}\arctan^2 e^x+C$$

Exercise 27. Determinare l'insieme di definizione, la natura dei punti di frontiera e le derivate parziali prime della funzione

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{(x^2+y^2)-9}{(x-1)(y-e^x)}}$$

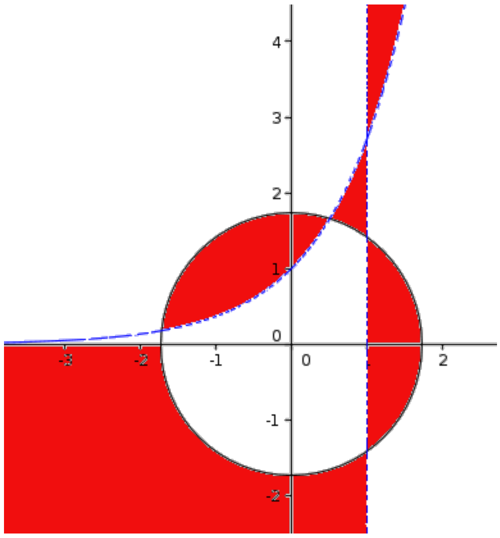
Soluzione: possiamo riscrivere la funzione applicando le semplici regole algebriche dei prodotti notevoli

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{(x^2+y^2+3)(x^2+y^2-3)}{(x-1)(y-e^x)}}$$

e osservare che il fattore $\left(x^2+y^2+3\right)$ al numeratore è sempre positivo. L'insieme di definizione sarà calcolabile tramite il sistema che contiene le condizioni che rendono il radicando non negativo e il denominatore della frazione non nullo

$$\begin{cases} 1^a & \frac{\left(x^2+y^2-3\right)}{(x-1)(y-e^x)}\geq 0 \\ 2^a & x-1>0 \\ 3^a & y-e^x>0 \end{cases}$$

studiamo graficamente le tre disequazioni e cerchiamo le soluzioni comuni: il polinomio x^2+y^2-3numeratore può essere rappresentato come una circonferenza di raggio $\sqrt{3}$ e centrata nell'origine; $x-1$ è una retta parallela all'asse y e $y-e^x$ è la funzione esponenziale, sempre positiva



i punti di intersezione della circonferenza con la retta e l'esponenziale sono da considerarsi esclusi.
Calcoliamo le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}}\cdot\frac{4x\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-[(y-e^x-e^x(x-1))]\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{(x^2+y^2)^2-9}{(x-1)(y-e^x)}}}\cdot\frac{4y\left(x^2+y^2\right)(x-1)(y-e^x)-(x-1)\left[\left(x^2+y^2\right)^2-9\right]}{(x-1)^2(y-e^x)^2}$$

Exercise 28. Studiare l'andamento e tracciare il grafico della funzione $y=\sqrt[3]{\ln^2|x-1|}$

Campo di Esistenza: la radice cubica esiste sempre, mentre il logaritmo solo se il suo argomento è diverso da zero, cioè

$$x\neq 1 \qquad (-\infty;1)\cup(1;+\infty)$$

la presenza del modulo implica che si studi la funzione

$$y=\begin{cases}\sqrt[3]{\ln^2(x-1)} & x>1\\ \sqrt[3]{\ln^2(1-x)} & x<1\end{cases}$$

1°) Studio della funzione $y=\sqrt[3]{\ln^2(1-x)}$ nell'intervallo $(-\infty;1)$

Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$

Segno: $y\geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)

Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to-\infty}y=+\infty \qquad \lim_{x\to1^-}y=+\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x=1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y'=\frac{2}{3}\ln^{-\frac{1}{3}}(1-x)\cdot\frac{-1}{1-x}=\frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x)}$$

C.E della derivata: $x\neq 1,0$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(1-x)>0$ nell'intervallo $x<1$

$$\begin{array}{lll}1^\circ\, fattore<0 & & \forall x<1\\ 2^\circ\, fattore<0 & \ln^{\frac{1}{3}}(1-x)<0 & x>0\end{array}$$

avremo quindi $y' > 0$ per $0 < x < 1$ e la funzione sarà crescente; $y' < 0$ per $x < 0$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x = 0$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^-} y' = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} y' = +\infty$$

Il punto $(0;0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(1-x) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(1-x) \cdot \frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2 \ln^{\frac{2}{3}}(1-x)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\ln(1-x)+1}{(x-1)^2 \ln^{\frac{4}{3}}(1-x)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$y" \geq 0 \qquad \begin{aligned} &3\ln(1-x)+1 \leq 0 \\ &\ln(1-x) \leq -\frac{1}{3} \\ &x \geq 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}} \sim 0,28 \end{aligned}$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $x < 0$ e $0 < x < 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 1$. Avremo, quindi, un flesso ascendente $F_1\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

2°) Studio della funzione $y = \sqrt[3]{\ln^2(x-1)}$ nell'intervallo $(1;+\infty)$

Intersezioni con gli assi: asse y: $\begin{cases} 0 = \ln^2(x-1) \\ y = 0 \end{cases}$,da cui $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

Segno: $y \geq 0$ per ogni x appartenente all'intervallo (il logaritmo è infatti sempre positivo)

Asintoti: calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 1^+} y = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} y = +\infty$$

avremo quindi un asintoto verticale di equazione $x = 1$. L'asintoto obliquo non esiste in quanto

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{y}{x} = 0$$

Crescenza, decrescenza, punti stazionari: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{2}{3}\ln^{-\frac{1}{3}}(x-1) \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{2}{3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1)}$$

C.E della derivata: $x \neq 1, 2$. Per studiare il segno della derivata prima, basta considerare il denominatore $3(x-1)\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0$ nell'intervallo $x < 1$

$$\begin{aligned} &1° \, fattore > 0 && && \forall x > 1 \\ &2° \, fattore > 0 && \ln^{\frac{1}{3}}(x-1) > 0 && x > 2 \end{aligned}$$

avremo quindi $y' > 0$ per $x > 2$ e la funzione sarà crescente; $y' < 0$ per $1 < x < 2$ e la funzione sarà decrescente. Studiamo la derivata nel punto $x = 2$ nei due intervalli, in quanto la derivata non è definita per $x = 2$.

$$\lim_{x\to 2^-} y' = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} y' = +\infty$$

Il punto $(2;0)$ è punto di cuspide e minimo assoluto.

[Studio dei punti di non derivabilità. Si ha un

- punto angoloso: è un punto del dominio di una funzione in cui esistono entrambe le derivate destra e sinistra, ma sono diverse ed almeno una di esse ha valore finito;
- una cuspide: se i limiti destro e sinistro della derivata prima tendono a $\pm\infty$ con segno opposto.

(1) flesso a tangente verticale: punto in cui la funzione è definita e il limite della derivata prima in quel punto diverge]

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

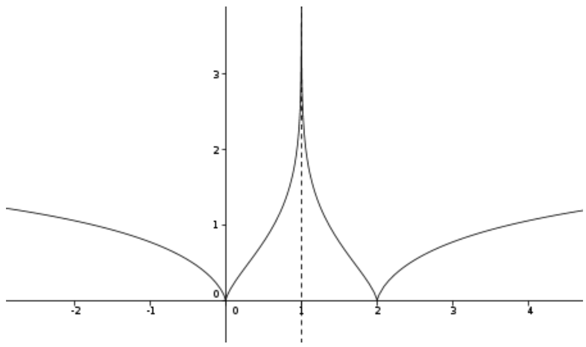
$$y" = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\left[\ln^{\frac{1}{3}}(x-1) + \frac{1}{3}(x-1)\ln^{-\frac{2}{3}}(x-1) \cdot \frac{1}{x-1}\right]}{(x-1)^2 \ln^{\frac{2}{3}}(x-1)} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3\ln(x-1)+1}{(x-1)^2 \ln^{\frac{4}{3}}(x-1)}$$

studiamo il segno della derivata seconda attraverso il segno del suo numeratore, essendo il denominatore sempre positivo

$$y\text{"} \geq 0 \qquad \begin{aligned} &3\ln(x-1)+1 \leq 0 \\ &\ln(x-1) \leq -\frac{1}{3} \\ &x \leq 1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}} \sim 1,71 \end{aligned}$$

La funzione presenta una concavità verso il basso negli intervalli $1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}} < x < 2$ e $x > 2$; presenta concavità verso l'alto nell'intervallo $1 < x < 1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$. Avremo, quindi, un flesso discendente $F_2\left(1+\sqrt[3]{\frac{1}{e}}; \sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)$.

Grafico della funzione:



Exercise 29. Determinare l'insieme di definizione, classificare i punti di discontinuità, eliminandoli dove possibile, e studiare la funzione

$$y = \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2}$$

Soluzione: funzione trascendente fratta; l'insieme di definizione si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|x| \neq -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm e^{-2} \end{cases}$$

avremo quindi $C.E: \left(-\infty; -e^{-2}\right) \cup \left(-e^{-2}; 0\right) \cup \left(0; e^{-2}\right) \cup \left(e^{-2}; +\infty\right)$

Discontinuità: Calcoliamo i limiti nei punti di discontinuità per poterli classificare

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} y = (H\hat{o}p) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x}{2(2+\ln|x|)} = 0^+ \quad \textit{eliminabile} \quad y = \begin{cases} \frac{|\ln|x||}{(2+\ln|x|)^2} & per \quad x \neq 0, \pm e^{-2} \\ 0 & per \qquad x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm e^{-2}} y = +\infty \qquad 2^a \textit{ specie}$$

avremo due asintoti verticali di equazione $x = \pm e^{-2}$.

Simmetrie: la funzione è simmetrica rispetto all'asse y, in quanto $f(-x) = f(x)$. Ciò consente di studiare la funzione solo per $x > 0$.

Intersezioni assi: essendo $x \neq 0$, non vi sono intersezioni con l'asse y;

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Segno: la funzione è sempre positiva nel $C.E.$

Asintoti orizzontali: calcoliamo gli altri limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{(2+t)^2} = 0^+$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza e decrescenza: la funzione, contenendo pure il modulo del logaritmo, deve essere studiata in due diversi intervalli

$$y_1 = \frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} \quad per \quad x \geq 1$$

$$y_2 = -\frac{\ln x}{(2+\ln x)^2} \quad per \quad 0 < x < e^{-2} \; e^{-2} < x \leq 1$$

calcoliamo la derivata prima di y_1

$$y_1' = \frac{\frac{1}{x}(2+\ln x)^2 - \frac{2}{x}(2+\ln x)\ln x}{(2+\ln x)^4} = \frac{2-\ln x}{x(2+\ln x)^3}$$

Il *C.E.* della derivata coincide con quello di y_1. Studiamo il segno della derivata

$$\begin{array}{lll} N \geq 0 & 2 > \ln x & x < e^2 \\ D > 0 & x(2+\ln x)^3 & \forall x > 0 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{ll} y' > 0 & x < e^2 \\ y' < 0 & x > e^2 \end{array}$$

e quindi $x = e^2$ sarà un massimo assoluto. Inoltre

$$\begin{aligned} y_1\left(e^2\right) &= \frac{1}{8} \\ y_1'(1) &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Calcoliamo la derivata prima di y_2

$$y_2' = \frac{\ln x - 2}{x(2+\ln x)^3}$$

il cui *C.E.* : $\left(0; e^{-2}\right) \cup \left(e^2; 1\right]$. Studiamo il suo segno, tenendo conto che y_2' non è mai nulla per $x \leq 1$.

$$\begin{array}{lll} N > 0 & \ln x > 2 & mai \\ D > 0 & x(2+\ln x)^3 & x > e^{-2} \end{array}$$

avremo quindi

$$\begin{array}{lll} y_2' > 0 & 0 < x < e^{-2} & f\ crescente \\ y_2' < 0 & e^{-2} < x > 1 & f\ decrescente \end{array}$$

inoltre

$$y_2'(1) = -\frac{1}{2}$$

per $x = 1$ le due derivate sono diverse e $x = 1$ è, quindi, un punto angoloso e minimo assoluto.

Inoltre

$$\lim_{x \to 0^+} y_2' = +\infty$$

e per la simmetria della funzione rispetto all'asse delle y, $x = 0$ è un punto di cuspide.

Concavità: calcoliamo le due derivate seconde

$$y"_1 = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x(2+\ln x)^3 - \left[(2+\ln x)^3 + 3x(2+\ln x)^2 \cdot \frac{1}{x}\right](2-\ln x)}{x^2(2+\ln x)^6} = \frac{(2+\ln x)^2\left[-2-\ln x-(2+\ln x)(2-\ln x)-6+\right.}{x^2(2+\ln x)^6}$$

$$y"_1 = \frac{\ln^2 x + 2\ln x - 12}{x^2(2+\ln x)^6}$$

la derivata seconda si annulla quando è nullo il numeratore

$$\ln^2 x + 2\ln x - 12 = 0 \qquad \ln x = -1 \pm \sqrt{13}$$

per cui, $x = e^{\sqrt{13}-1}$ è un punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_1 > 0 & x > e^{\sqrt{13}-1} & concavità\ verso\ l'alto \\ y"_1 < 0 & 1 \leq x < e^{\sqrt{13}-1} & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

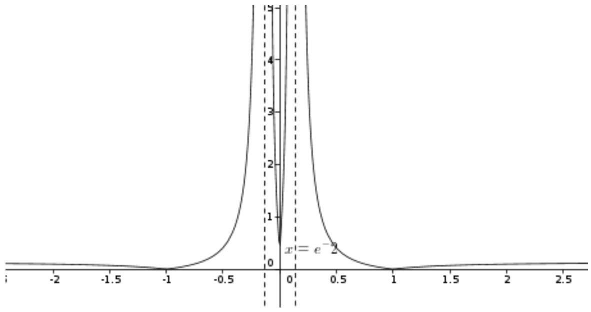
Studiamo ora la derivata nell'altro intervallo, cioè quella indicata come $y"_2$, con calcolo analogo, si ottiene

$$y"_2 = \frac{-\ln^2 x - 2\ln x + 12}{x^2(2+\ln x)^6}$$

per cui $y"_2 = 0$ per $x = e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)}$ che sarà un ulteriore punto di flesso; inoltre

$$\begin{array}{lll} y"_2 > 0 & e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} < x < 1 & concavità\ verso\ l'alto \\ y"_2 < 0 & x < e^{-\left(\sqrt{13}+1\right)} & concavità\ verso\ il\ basso \end{array}$$

Grafico: rappresentiamo la funzione completa tenendo conto della simmetria inizialmente indicata



con questa scala non è possibile indicare il massimo relativo per $x = e^2$

Exercise 30. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}} \geq -\frac{1}{3}$$

Soluzione: possiamo riscrivere la disequazione nel seguente modo

$$\frac{|4-e^x|-1}{\sqrt{e^x-1}} + \frac{1}{3} \geq 0 \qquad \frac{3\left(|4-e^x|-1\right)+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

la disequazione ha significato nel campo reale se il denominatore è maggiore di zero, cioè

$$C.E: \quad e^x > 1 \quad x > 0$$

Data tale condizione, il denominatore risulta sempre positivo e basta studiare il segno del numeratore nei due casi ottenibili studiando il valore assoluto

$$1^\circ \quad 4-e^x > 0 \quad 0 < x \leq \ln 4$$
$$2^\circ \quad 4-e^x < 0 \quad x \geq \ln 4$$

1° caso: $0 < x < \ln 4$. La disequazione diviene

$$\frac{12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

$$12-3e^x-3+\sqrt{e^x-1} > 0 \qquad \sqrt{e^x-1} > 3e^x-9$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} e^x-3 \leq 0 \\ e^x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} e^x-3 \geq 0 \\ e^x-1 \geq (3e^x-9)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq \ln 3 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq \ln 3 \\ 9e^{2x}-55e^x+82 \leq 0 \end{cases}$$

$$0 < x \leq \ln 3 \qquad \begin{cases} x \geq \ln 3 \\ \ln \frac{55-\sqrt{73}}{18} \leq x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18} \end{cases}$$

$$0 < x \leq \ln 3 \qquad \ln 3 \leq x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18}$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $0 < x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18}$.

2° caso: $x \geq \ln 4$, la disequazione diviene

$$\frac{-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{e^x-1}} \geq 0$$

il numeratore sarà positivo quando

$$-12+3e^x-3+\sqrt{e^x-1} \geq 0 \qquad \sqrt{e^x-1} \geq 15-3e^x$$

risolviamo la disequazione irrazionale mediante i due sistemi

$$\begin{cases} 15-3e^x \leq 0 \\ e^x-1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 5-e^x \geq 0 \\ e^x-1 \geq 9\left(25+e^{2x}-10e^x\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq \ln 5 \\ x > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq \ln 5 \\ 9e^{2x}-91e^x+226 \leq 0 \end{cases}$$

$$x \geq \ln 5 \qquad \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18} \leq x \leq \ln 5$$

la soluzione in questo primo caso sarà pertanto $x \geq \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18}$.

La disequazione sarà pertanto verificato negli intervalli

$$0 < x \leq \ln \frac{55+\sqrt{73}}{18} \qquad x \geq \ln \frac{91-\sqrt{145}}{18}$$

Exercise 31. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}\left[\ln^2(x+1)\cdot \arctan\left(\ln^2(x+1)\right)+\frac{1}{1+\ln^4(x+1)}\right]dx$$

nelle condizioni $x > -1$ e $x \neq 0$.

Soluzione: Applichiamo la sostituzione di variabile $t = \ln^2(x+1)$, per cui $dt = \frac{2\ln(x+1)}{x+1}dx$. L'integrale diviene

$$\frac{1}{2}\int\left(t\arctan t+\frac{1}{1+t^2}\right)dt$$

la funzione integranda è una somma di termini e per i teoremi noti, si ha

$$\tfrac{1}{2}\int \arctan t dt + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{1+t^2}dt =$$

risolviamo il primo integrale per parti

$$\frac{1}{4}t^2\arctan t - \frac{1}{4}\int\frac{t^2}{1+t^2}dt+\frac{1}{2}\arctan t = \frac{t^2}{4}\arctan t+\frac{1}{2}\arctan t-\frac{1}{4}\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{t^2}{4}\arctan t+\frac{1}{2}\arctan t-\frac{1}{4}\int dt+\frac{1}{4}\int\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{t^2}{4}\arctan t+\frac{1}{2}\arctan t-\frac{1}{4}t+\frac{1}{4}\arctan t =$$

$$\frac{t^2}{4}\arctan t+\frac{3}{4}\arctan t-\frac{1}{4}t+C$$

La soluzione rispetto alla variabile x sarà

$$\frac{1}{4}\left(\ln^4(x+1)\cdot\arctan\left(\ln^2(x+1)\right)+3\arctan\left(\ln^2(x+1)\right)-\left(\ln^2(x+1)\right)\right)+C$$

Exercise 32. Tracciare il grafico della funzione

$$y = xe^{-\ln^2 x+|\ln x|}$$

Campo di Esistenza: la funzione esponenziale ha il campo di esistenza del suo esponente; in questo caso, dovendo esistere il logaritmo, avremo $x > 0$ oppure $(0;+\infty)$.

Intersezioni con assi: per il campo di esistenza non vi sono intersezioni con l'asse x, mentre per le intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} -\ln^2 x+|\ln x| = 0 \\ y = 0\end{cases} \qquad \begin{cases} \ln x(\ln x \pm 1) = 0 \\ y = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0\end{cases}$$

Non esistono simmetrie.

Segno: nel campo di esistenza la funzione risulta sempre non negativa, cioè $y \geq 0 \ \forall x \in C.E.$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi di campo di esistenza

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\ln^2 x+|\ln x|} =$$

sostituendo $t = \ln x$, da cui $x = e^t$, avremo

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t^2+t+|t|} \approx \lim_{x\to+\infty} e^{-\infty} = 0^+$$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{-\ln^2 x+|\ln x|} = \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2+t+|t|} \approx \lim_{t\to-\infty} e^{-t^2} = 0^+$$

Avremo quindi un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

Crescenza, decrescenza: la presenza del modulo richiede di considerare la funzione nei due intervalli

$$\|\ln x\| \quad = \quad \begin{matrix} \ln x & x \geq 1 \\ -\ln x & 0 < x \leq 1 \end{matrix}$$

1° caso: $x \geq 1$, la funzione diviene

$$y_1 = xe^{-\ln^2 x + \ln x}$$

e $y_1(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x + \ln x} + xe^{-\ln^2 x + \ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 2e^{-\ln^2 x + \ln x}(1 - \ln x)$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_1. Inoltre, $y_1'(1) = 2$

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$y_1' \geq 0 \quad 1 - \ln x \geq 0 \quad 1 \leq x \leq e \;\; f \; crescente$$
$$y_1' \leq 0 \quad 1 - \ln x \leq 0 \quad x \geq e \;\; f \; decrescente$$

avremo quindi un massimo relativo per $x = e$. Studiamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y"_1 &= 2e^{-\ln^2 x + \ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right)(1 - \ln x) + 2e^{-\ln^2 x + \ln x}\left(-\frac{1}{x}\right) = \\ &= \frac{2e^{-\ln^2 x + \ln x}}{x}\ln x\,(2\ln x - 3) \end{aligned}$$

Nel campo di esistenza l'esponenziale, il logaritmo e il denominatore sono sempre positivi, per cui

$$y"_1 \geq 0 \quad 2\ln x - 3 \geq 0 \quad x \geq e^{\frac{3}{2}} \;\; f \; concava$$
$$y"_1 \leq 0 \quad 2\ln x - 3 \leq 0 \quad 1 \leq x \leq e^{\frac{3}{2}} \;\; f \; convessa$$

avremo quindi un flesso di tangente obliqua per $x = e^{\frac{3}{2}}$.

2° caso: $0 < x \leq 1$, la funzione diventa

$$y_2 = xe^{-\ln^2 x - \ln x}$$

e $y_2(1) = 1$; calcoliamo la derivata prima

$$y_1' = e^{-\ln^2 x - \ln x} + xe^{-\ln^2 x - \ln x}\left(\frac{-2\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right) = -2\ln x \cdot e^{-\ln^2 x + \ln x}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione y_2. Inoltre, $y_1'(1) = 0$. Per $x = 1$ avremo, quindi, un punto angoloso. Calcoliamo il limite della derivata nell'estremo sinistro dell'intervallo

$$\lim_{x \to 0^+} -2\ln x \cdot e^{-\ln^2 x + \ln x} = 0$$

e per $x = 0$ avremo un punto a tangente orizzontale.

Studiamo il segno della derivata, ricordando che l'esponenziale è sempre positivo

$$y"_2 \geq 0 \quad -2\ln x \geq 0 \quad x \leq 1 \;\; f \; sempre\ crescente$$

Studiamo la derivata seconda

$$y"_2 = 2e^{-\ln^2 x + \ln x} \cdot \frac{2\ln^2 x + \ln x + 1}{x}$$

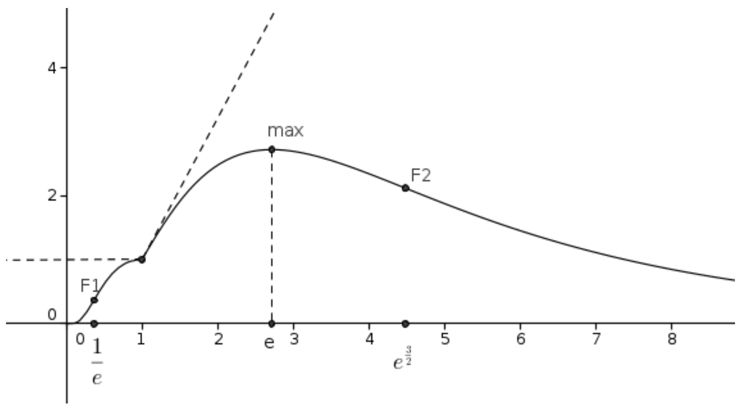
Avremo

$$y_2" \geq 0 \quad 2\ln^2 x + \ln x + 1 \quad \begin{matrix} x \geq e^{\frac{1}{2}} \; non\,accettabile \\ x \leq e^{-1}\,accettabile \end{matrix}$$

$$y"_1 \geq 0 \quad \begin{matrix} 0 < x \leq e^{-1} \\ x \geq e^{-1} \end{matrix} \quad \begin{matrix} f \; concava \\ f \; convessa \end{matrix}$$

avremo quindi un flesso a tangente obliqua per $x = e^{-1}$.

Grafico: rappresentiamo graficamente la funzione data



Exercise 33. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione

$$\frac{3e^x}{2xe^{2x+1}} \geq \frac{e^{2x}}{4x+1}$$

Soluzione: si tratta di una disequazione non algebrica, di cui studiamo il campo di esistenza, ponendo i denominatori diversi da zero

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Poiché gli esponenziali sono sempre positivi, la disequazione si può riscrivere, dividendo i due esponenziali della prima frazione,

$$\frac{3}{2xe^{x+1}} \geq \frac{e^{2x}}{4x+1}$$

moltiplico ora entrambi i membri per e^{x+1} e ottengo la disequazione equivalente

$$\frac{3}{2x} \geq \frac{e^{3x+1}}{4x+1}$$

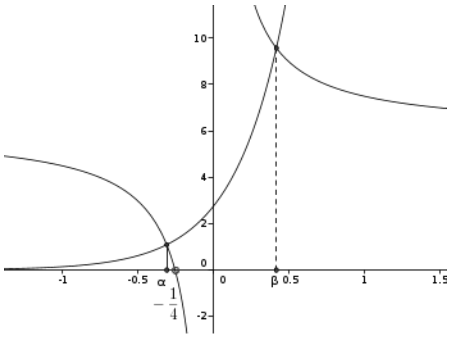
Osserviamo che se $x > -\frac{1}{4}$ il polinomio $4x+1 > 0$ e la disequazione è equivalente a

$$\frac{3\left(4x+1\right)}{2x} \geq e^{3x+1}$$

mentre se $x < -\frac{1}{4}$, la disequazione è equivalente a

$$\frac{3\left(4x+1\right)}{2x} \leq e^{3x+1}$$

Studiamo le funzioni $y_1 = \frac{3(4x+1)}{2x}$ e $y_2 = e^{3x+1}$ e risolviamo graficamente, osservando che y_1 è un'iperbole traslata con asintoti $y = 6$ e $x = 0$ passante per $x = -\frac{1}{4}$, e y_2 è una funzione esponenziale. I grafici sono rappresentati in figura



Avremo, pertanto, le soluzioni $\alpha \leq x < -\frac{1}{4}$ e $0 < x \leq \beta$ con, come si vede in figura, $\alpha < -\frac{1}{4}$ e $\beta > 0$.

Exercise 34. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x \cos x \cdot \ln\left(\sin^2 x + 2\right)}{\left(\sin^2 x + 1\right)^3} dx$$

Soluzione: Osservando che $2\sin x \cos x dx = d\left(\sin^2 x\right)$, introduciamo la seguente sostituzione $t = \sin^2 x$ e $dt = 2\sin x \cos x dx$; l'integrale diviene

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(t+2\right)}{\left(t+1\right)^3} dt$$

Calcoliamo l'integrale indefinito per parti, ponendo $f = \ln\left(t+2\right)$ sarà $f' = \frac{1}{t+2}$ e $g' = \left(t+1\right)^{-3} dt$, per cui $g = -\frac{1}{2(t+1)^2}$

$$I = \int \frac{\ln\left(t+2\right)}{\left(t+1\right)^3} dt$$

quindi

$$I = -\frac{\ln\left(t+2\right)}{2\left(t+1\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(t+1\right)^2\left(t+2\right)} dt =$$

calcoliamo l'integrale $\int \frac{1}{(t+1)^2(t+2)} dt$ riscrivendo la frazione come

$$\frac{A}{t+1} + \frac{B}{\left(t+1\right)^2} + \frac{C}{t+2} = \frac{1}{\left(t+1\right)^2\left(t+2\right)}$$

svolgendo abbiamo

$$\begin{aligned} A(t+1)(t+2)+B(t+2)+C(t+1)^2 &= 1 \\ At^2+3At+2A+Bt+2B+Ct^2+2Ct+C &= 1 \\ t^2(A+C)+t(3A+B+2C)+(2A+2B+C) &= 1 \end{aligned}$$

confrontando i termini ai due membri osserviamo che

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B+2C=0 \\ 2A+2B+C=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} C=-A \\ 3A+B-2A=0 \\ 2A+2B-A=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=-A \\ A=-B \\ A+2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$\frac{1}{2}\int\frac{1}{(t+1)^2(t+2)}dt=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+2}$$

avremo quindi

$$I=-\frac{\ln(t+2)}{2(t+1)^2}-\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{1}{2(t+1)}+\frac{1}{2}\ln|t+2|+C$$

Il nostro integrale definito avrà quindi come soluzione

$$\int_0^1\frac{\ln(t+2)}{(t+1)^3}dt=-\frac{\ln 3}{8}-\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\ln 3}{2}+\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{4}-\frac{\ln 2}{2}+\frac{3\ln 3}{8}$$

Exercise 35. Studiare la seguente funzione e tracciarne il grafico

$$y=\sqrt{1-\frac{4x-8}{x^2-4x+8}}$$

Soluzione: Riscriviamo la funzione, sommando i termini del radicando

$$y=\sqrt{\frac{x^2-8x+16}{x^2-4x+8}}=\sqrt{\frac{(x-4)^2}{x^2-4x+8}}=\frac{|x-4|}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

Campo di esistenza: il denominatore e radicando è sempre positivo ($\Delta<0$) per cui la funzione esiste $\forall x\in\mathbb{R}$.

Simmetrie: la funzione non è né pari né dispari.

Si può semplificare lo studio di questa funzione analizzando la funzione

$$y=\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}$$

ed eseguendo le opportune simmetrie delle sue parti negative.

Intersezioni:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione

$$\frac{x-4}{\sqrt{x^2-4x+8}}>0$$

Essendo il denominatore sempre positivo, avremo

$$\begin{aligned} y>0 \quad &per \quad x>4 \\ y<0 \quad &per \quad x<4 \end{aligned}$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}=\pm1$$

avremo due asintoti orizzontali di equazione $y=1$ e $y=-1$ e non vi sono asintoti obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione

$$y' = \frac{\sqrt{x^2-4x+8} - (x-4)\frac{2(x-2)}{2\sqrt{x^2-4x+8}}}{x^2-4x+8} = \frac{x^2-4x+8-4x^2+6x-8}{\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}} = \frac{2x}{\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8}}$$

il campo di esistenza della derivata coincide con quello della funzione, ed essendo ancora il denominatore sempre positivo, avremo

$$\begin{array}{lll} y'>0 & x>0 & f.\ crescente \\ y'<0 & x<0 & f\ descrescente \end{array}$$

Avremo pertanto un minimo nel punto $m\left(0;-\sqrt{2}\right)$.

Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)\sqrt{x^2-4x+8} - 2x\cdot\frac{6\left(x^2-4x+8\right)^2(x-2)}{2(x^2-4x+8)\sqrt{x^2-4x+8}}}{\left(x^2-4x+8\right)^3} = \\ &= \frac{2\left(x^2-4x+8\right)^2\left(2x^2-4x+8-3x^2+6x\right)}{\left(x^2-4x+8\right)^2\sqrt{\left(x^2-4x+8\right)}} = \frac{-4\left(x^2-x-4\right)}{\sqrt{\left(x^2-4x+8\right)^5}} \end{aligned}$$

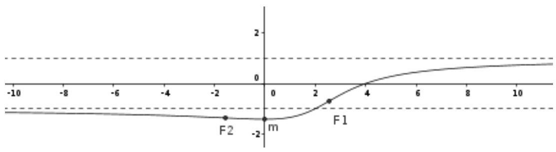
la derivata seconda ha lo stesso campo di esistenza della funzione e si annulla se

$$x^2-x-4=0 \qquad x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

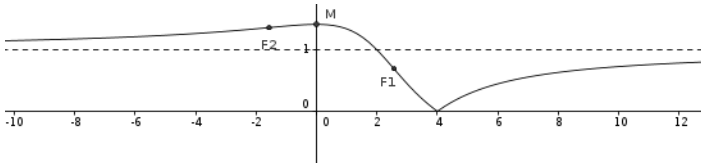
avremo due flessi in corrispondenza di questi valori di x; inoltre

$$\begin{array}{lll} y">0 & x<\frac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{17}}{2} & concavità\,verso\,alto \\ y"<0 & \frac{1-\sqrt{17}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{17}}{2} & concavità\,verso\,basso \end{array}$$

la funzione avrà quindi l'andamento in figura



Applichiamo ora il ribaltamento della parte negativa



Si può osservare che ora l'intersezione di ascissa $x=0$ è punto di massimo assoluto e che il punto $(4;0)$ è di minimo assoluto ed è un punto angoloso in quanto

$$\begin{aligned} y'_-(4) &= -\sqrt{2} \\ y'_+(4) &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercise 36. Calcolare, mediante la definizione, la derivata di $f(x)=e^{\sqrt{4-5x}}$ con $x<\frac{4}{5}$.

Soluzione: la definizione di derivata è la seguente

$$y'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

e applicata alla funzione assegnata, diviene

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{\sqrt{4-5(x+h)}}-e^{\sqrt{4-5x}}}{h}$$

ricordando il limite notevole $\lim_{f(x)\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{f(x)}=1$, riscriviamo il rapporto incrementale

$$\lim_{h\to0}\frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(e^{\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}}-1\right)\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)} = \frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)}{h}$$

razionalizziamo il numeratore

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{\sqrt{4-5x}}\left(\sqrt{4-5(x+h)}-\sqrt{4-5x}\right)\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} = \frac{e^{\sqrt{4-5x}}(4-5x-5h-4+5x)}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} =$$

$$\lim_{h\to 0} = \frac{-5h\cdot e^{\sqrt{4-5x}}}{h\left(\sqrt{4-5(x+h)}+\sqrt{4-5x}\right)} = -\frac{5}{2}$$

Exercise 37. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_2^{2+\ln 2}\frac{\ln\left(4+e^{2x-4}\right)}{e^{x-2}}dx$$

Soluzione: operiamo la sostituzione $t=e^{x-2}$ e $x=\ln t+2$, $dx=\frac{dt}{t}$. L'integrale diviene

$$\int_1^2\frac{\ln\left(4+t^2\right)}{t^2}dt=$$

integriamo per parti con $f'=\frac{dt}{t^2}$ e $g=\ln\left(4+t^2\right)$

$$=\left[-\frac{1}{t}\ln\left(4+t^2\right)\right]_1^2+2\int_1^2\frac{dt}{4+t^2}=\left[-\frac{1}{t}\ln\left(4+t^2\right)+\frac{2}{2}\arctan\frac{x}{2}\right]_1^2=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln 8+\frac{\pi}{4}+\ln 5-\arctan\frac{1}{2}=\ln\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{1}{2}$$

Exercise 38. Tracciare il grafico della seguente funzione

$$y=\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{|x|}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^{-|x|}}{5}\right)$$

e precisare il tipo di discontinuità della funzione nel punto di ascissa zero

Campo di Esistenza: l'argomento del logaritmo è sempre positivo, per cui basterà $x\neq 0$, cioè $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

Per la presenza del $|x|$ la funzione si divide in due parti

$$y=\begin{cases}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{-x}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^x}{5}\right)=-x^2+x+4 & x<0\\ \left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(2-\frac{2x}{x}\right)+\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right)=\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) & x>0\end{cases}$$

Studiamo separatamente i due rami

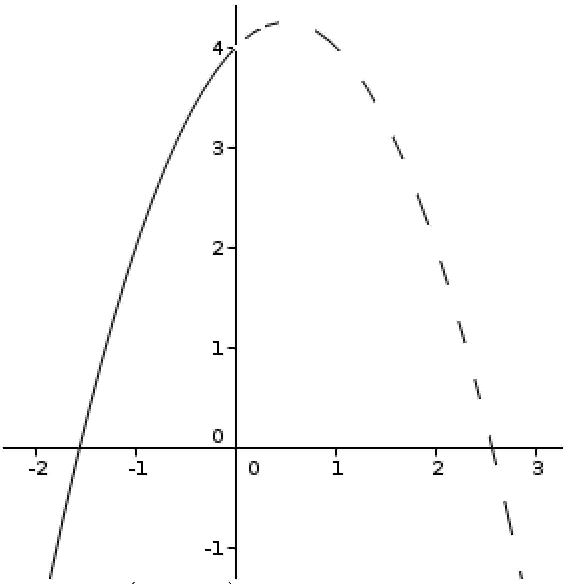
1°) $y=-x^2+x+4$ con $x<0$. La funzione si rappresenta osservando che essa rappresenta una parabola con concavità rivolta verso il basso, $V\left(\frac{1}{2};\frac{17}{4}\right)$ e può intersecare solo l'asse x nel punto ad ascissa negativa $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^-}-x^2+x+4=4$$

e la sua derivata prima è

$$y'=-2x+1\qquad y'\left(0^-\right)=1$$



2°) $y = \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right)$ con $x > 0$.
Intersezione asse y:

$$\begin{cases} \frac{e^x+4e^{-x}}{5} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} e^{2x} - 5e^x + 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad e^{x_1} = 1 (non\ accett) \quad e^{x_2} = 4$$

$$B\,(2\ln 2; 0)$$

La funzione non presenta simmetria.
Segno:

$$\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) > 0 \qquad e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$$

per cui

$$\begin{aligned} y > 0 \quad &per \quad x > 2\ln 2 \\ y < 0 \quad &per \quad 0 < x < 2\ln 2 \end{aligned}$$

Asintoti: Calcoliamo i limiti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) = \ln 1 = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) = +\infty$$

Verifichiamo l'esistenza di un asintoto obliquo, essendo verificata la condizione necessaria

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) = \frac{1}{x}\left[\ln\left(e^x+4e^{-x}\right) - \ln 5\right] = \frac{1}{x}\cdot\left\{\ln\left[e^x\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right)\right] - \ln 5\right\}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left[x + \ln\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5\right] = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right)}{x} - \frac{\ln 5}{x} = 1$$

Pertanto

$$q = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x+4e^{-x}}{5}\right) - x = x + \ln\left(1+\frac{4}{e^{2x}}\right) - \ln 5 - x = -\ln 5$$

L'asintoto obliquo avrà equazione

$$y = x - \ln 5$$

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima, che è sempre definita

$$y' = \frac{5}{e^x+4e^{-x}}\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(e^x-4e^{-x}\right) = \frac{e^x-4e^{-x}}{e^x+4e^{-x}}$$

La derivata prima si annulla se

$$e^x - 4e^{-x} = 0 \quad e^{2x} - 4 = 0 \quad x = \ln 2$$

studiamo il segno della derivata

$$y' > 0 \quad \frac{e^x-4e^{-x}}{e^x+4e^{-x}} > 0 \quad \begin{matrix} N > 0 & x > \ln 2 \\ D > 0 & \forall x \in C.E. \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} y' > 0 \qquad & x > \ln 2 \qquad f\,crescente \\ y' < 0 \quad & 0 < x < \ln 2 \quad f\,decrescente \end{aligned}$$

Avremo un punto di minimo nel punto $m\left(\ln 2; \ln\frac{4}{5} \simeq -0.223\right)$

Flessi: studiamo la derivata seconda

$$y" = \frac{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - 4e^{-x}\right)^2}{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2} = \frac{16}{\left(e^x + 4e^{-x}\right)^2}$$

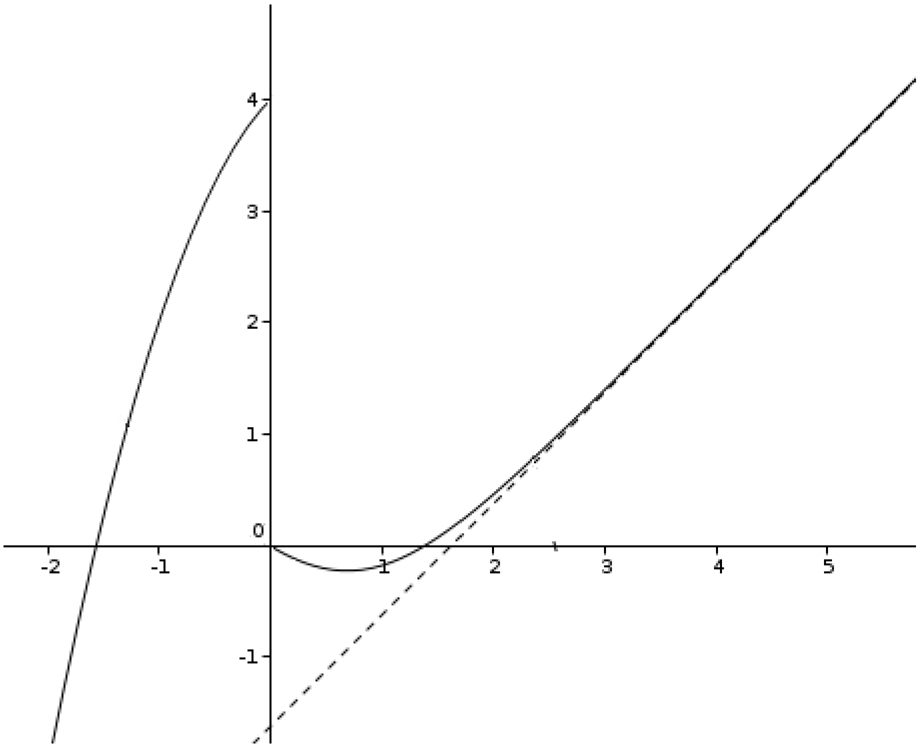
la derivata seconda è sempre positiva e la funzione avrà sempre, nell'intervallo $x > 0$, concavità rivolta verso l'alto.

Analizziamo la discontinuità nel punto di ascissa $x = 0$.

$$y'\left(0^+\right) = -\frac{3}{5}$$

Avremo quindi una discontinuità di prima specie non eliminabile, esistendo le derivate dx e sx ma avendo valore diverso.

Grafico:



Exercise 39. Risolvere nel campo reale la seguente disequazione;

$$\frac{\ln\left(3 - x\right) - e^{-x^2}}{\sqrt{4 - x} - |x - 2|} < 0$$

Soluzione: studiamo dapprima il campo di esistenza

$$\begin{cases} 3 - x > 0 \\ 4 - x \geq 0 \\ \sqrt{4 - x} - |x - 2| \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ \sqrt{4 - x} \neq |x - 2| \end{cases}$$

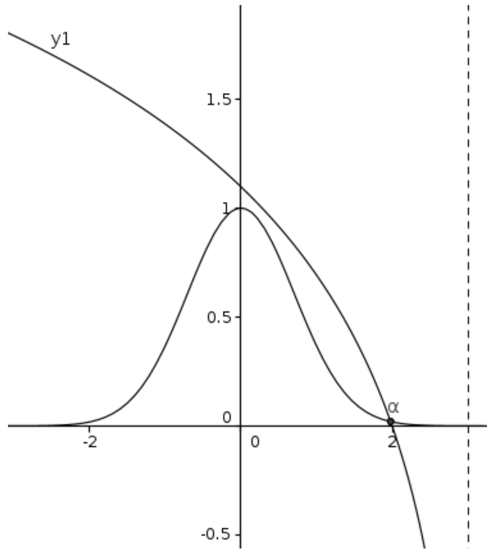
$$\begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ 4 - x \neq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ x^2 - 3x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x \leq 4 \\ x \neq 0 \; x \neq 3 \end{cases} \qquad C.E: \; x < 0 \; 0 < x < 3$$

Studiamo ora la disequazione iniziando dal suo numeratore

$$N > 0 \qquad \ln\left(3 - x\right) > e^{-x^2}$$

risolviamo graficamente ponendo $y_1 = \ln\left(3 - x\right)$ e $y_2 = e^{-x^2}$.
y_1 è la funzione logaritmo naturale traslata verso destra di 3 e sulla quale si opera una riflessione rispetto all'asse y; la y_2 è una funzione sempre positiva, pari $\left(y\left(-x\right) = y\left(x\right)\right.$ con asintoto orizzontale $y = 0$ e massimo per $x = 1$. La loro forma grafica è in figura, dalla quale è possibile risolvere la disequazione



Avremo quindi $N > 0$ per $x < \alpha$ $(x \neq 0)$ con $1.5 < \alpha < 2$.
Studiamo ora il denominatore

$$D > 0 \qquad \sqrt{4-x} > |x-2|$$

entrambi i membri sono positivi nel campo di esistenza, per cui, elevando al quadrato,

$$\begin{array}{ll} D > 0 & x^2 - 3x > 0 \\ & x < 0 \;\; x > 3 \end{array}$$

La disequazione avrà come soluzione

$$\begin{array}{rl} N > 0 & x < \alpha, \;\; x \neq 0 \\ D > 0 & x < 0 \;\; x > 3 \\ frazione & x < 0 \;\vee\; \alpha < x < 3 \end{array}$$

Exercise 40. Calcolare il valore del seguente integrale definito

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$$

Soluzione: Introduciamo la sostituzione $t = \ln x$, per cui $x = e^t$ e $dx = e^t dt$; inoltre, se $x = 1$, allora $t = \ln 1 = 0$ e se $x = e^2$, allora $t = \ln e^2 = 2$. Avremo quindi

$$\int_0^2 \frac{t \cdot e^t}{e^t \sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt = \int_0^2 \frac{2t}{2\sqrt{t+1}} dt$$

ricordando che il differenziale di $d\left(\sqrt{t+1}\right) = \dfrac{dt}{2\sqrt{t+1}}$, integriamo per parti

$$2t\sqrt{t+1}\,|_0^2 - 2\int_0^2 \sqrt{t+1}dt = \left[2t\sqrt{t+1} - \frac{4}{3}(t+1)\sqrt{t+1}\right]_0^2 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{t+1}\,(t-2)\right]_0^2 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\cdot 0 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

Exercise 41. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y = 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x}$

Campo di Esistenza: la radice cubica è sempre definita, mentre l'argomento del logaritmo deve essere positivo, per cui

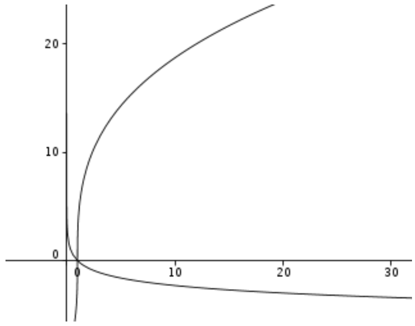
$$C.E.: \; x > 0$$

Segno: determiniamo il segno della funzione e gli eventuali punti di intersezione con l'asse x; non vi saranno intersezione con l'asse y per le C.E

$$3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x} > 0 \qquad 3\sqrt[3]{x-1} + \frac{1}{3}\ln x > 0$$

$$9\sqrt[3]{x-1} > -\ln x > 0$$

risolviamo graficamente indicando con $y_1 = 9\sqrt[3]{x-1}$ e $y_2 = -\ln x$. La funzione y_1 è traslata verso destra di vettore $(1;0)$ ed è simmetrica rispetto a questo punto ed è inoltre dilatata verticalmente; la funzione y_2 è nota. La figura mostra le due funzioni



y_1 e y_2 si intersecano nel punto $(1;0)$ e dalla figura si ricava

$$\begin{array}{ll} y>0 & x>1 \\ y=0 & x=1 \\ y<0 & 0<x<1 \end{array}$$

Asintoti: calcoliamo i limiti negli estremi del C.E.

$$\lim_{x\to 0^+} 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} 3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x} = +\infty$$

Avremo un asintoto verticale di equazione $x=0$. Verifichiamo la presenza di asintoto obliquo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[3]{x-1} + \ln\sqrt[3]{x}}{x} = 0$$

infatti x è un infinito di ordine superiore rispetto a $x^{\frac{1}{3}}$ e a $\ln x$. Non vi sono, pertanto asintoti obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima della funzione $y = 3(x-1)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\ln x$

$$y' = 3\cdot\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{3x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{1}{3x}$$

il campo di esistenza della derivata è $x \neq 0, 1$

studiamo il segno della derivata

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{1}{3x} > 0 \qquad \frac{3x + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{3x\sqrt[3]{(x-1)^2}} > 0$$

$$\begin{array}{ll} N>0 & \forall x \in C.E. \\ D>0 & \forall x \in C.E. - \{1\} \end{array}$$

la derivata prima è sempre positiva nelle condizioni indicate e la funzione è sempre crescente. Studiamo il limite della derivata per x tendente a 1

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \frac{1}{3x} = +\infty$$

avremo quindi un punto a tangente verticale in $(1;0)$

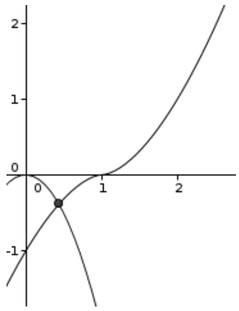
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$y" = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{3x^2}$$

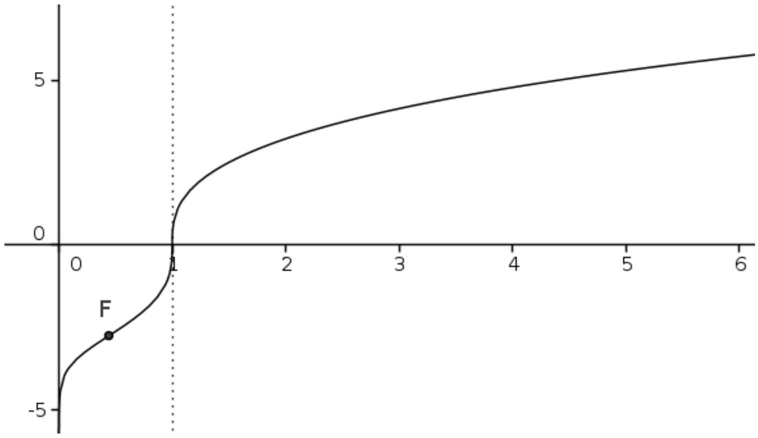
la derivata seconda ha lo stesso C.E della derivata prima e si annulla

$$-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{3x^2} = 0 \qquad 2x^2 + \sqrt[3]{(x-1)^5} = 0$$

la soluzione algebrica presenta un'equazione di sesto grado. Cerchiamo la soluzione graficamente, disegnando la parabola $y_1 = -2x^2$ e la $y_2 = \sqrt[3]{(x-1)^5}$



Avremo quindi un flesso, nel nostro C.E., per $0 < x < 1$.
Grafico:



Exercise 42. Determinare per quali valori del parametro reale a la seguente funzione è continua in $[0; 2\pi]$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} & 0 \le x < \pi \\ ax^2 & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$$

Soluzione: calcoliamo il limite per $x \to \pi$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\cos x + \sin^2 \frac{x}{2}}{(\pi - x)^2} = \frac{\cos x + \frac{1-\cos x}{2}}{(\pi - x)^2} = \frac{1 + \cos x}{2(\pi - x)^2} =$$

$$\lim_{x\to\pi} \frac{1 - \cos(\pi - x)}{2(\pi - x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\cos(\pi-x)}{(\pi-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Pertanto dovrà essere $a = \pm\dfrac{1}{2}$.

Exercise 43. Risolvere la seguente equazione differenziale $y' - \left(y^2 - 4y - 21\right)\left(\sqrt{1 + \sqrt{x}}\right) = 0$

Soluzione: risolviamo mediante la separazione delle variabili

$$\frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \sqrt{1 + \sqrt{x}}dx$$

e passando all'integrale

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \int \sqrt{1 + \sqrt{x}}dx$$

Risolviamo l'integrale al primo membro

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4y - 21} = \int \frac{1}{(y-7)(y+3)}dy$$

riscriviamo la frazione come somma di frazioni

$$\frac{1}{(y-7)(y+3)} = \frac{A}{y-7} + \frac{B}{y+3} = \frac{Ay + 3A + By - 7B}{(y-7)(y+3)} = \frac{y(A+B) + 3A - 7B}{(y-7)(y+3)}$$

ricaviamo A e B dal sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 3A-7B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=\frac{1}{10} \\ B=-\frac{1}{10} \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$\int \frac{dy}{y^2-4y-21} = \frac{1}{10}\int \frac{dy}{y-7} - \frac{1}{10}\int \frac{dy}{y+3} = \frac{1}{10}\left(\ln\left|\frac{y-7}{y+3}\right|\right)$$

Risolviamo ora l'integrale al secondo membro

$$\int \sqrt{1+\sqrt{x}}dx$$

introduciamo la sostituzione $1+\sqrt{x}=t^2$ da cui $dx=4t\left(t^2-1\right)$, l'integrale diviene

$$\int \left(4t^4-4t^2\right)dt = \frac{4}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3 = \frac{4}{5}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C$$

L'equazione differenziale avrà come soluzioni

$$\frac{1}{10}\left(\ln\left|\frac{y-7}{y+3}\right|\right) = \frac{4}{15}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C \qquad \frac{y+-7}{y+3} = e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1}$$

$$1-\frac{10}{y+3} = e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1} \qquad 1-e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1} = \frac{10}{y+3}$$

$$y = \frac{10}{\left(1-e^{\frac{8}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}\left(3\sqrt{x}-2\right)+C_1}\right)} - 3$$

Exercise 44. Studiare le caratteristiche della seguente funzione e tracciarne il grafico $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1}$

Campo di esistenza: la funzione è definita su tutto l'insieme dei numeri reali $\forall \in \mathbb{R}$.

Intersezioni: determiniamo l'intersezione con gli assi cartesiani

$$asse\,x \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad asse\,y \begin{cases} x=0 \\ y=e \end{cases}$$

Segno: risolviamo la disequazione $\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1}>0$

$$\begin{array}{lll} fat_1>0 & (x-1)^2>0 & x\neq 1 \\ fat_2>0 & e^{x+1}>0 & \forall x\in\mathbb{R} \end{array}$$

la funzione è quindi sempre positiva; $y>0\ \forall x\neq 1$.

Asintoti: calcoliamo i limiti agli estremi del campo di esistenza

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1} = \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{e^{-(x+1)}} \overset{Hop}{=} \frac{2e^{x+1}}{-3\sqrt[3]{x-1}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{(x-1)^2}\cdot e^{x+1} = +\infty$$

avremo un asintoto orizzontale di equazione $y=0$; non vi sono asintoti verticali né obliqui.

Crescenza, decrescenza: calcoliamo la derivata prima

$$y' = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}e^{x+1} + (x-1)^{\frac{2}{3}}e^{x+1} = e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right)$$

Il C.E della derivata è $x\neq 1$. Calcoliamo quindi i limiti destro e sinistro della derivata

$$\lim_{x\to 1^-} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} e^{x+1}\left(\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x-1}}\right) = \frac{2e^2}{0^+} = +\infty$$

il punto di ascissa $x=1$ sarà una cuspide essendo i limiti non finiti e di segno opposto. Studiamo il segno della derivata $y'>0$

$$\begin{array}{ll} e^{x+1}>0 & \forall x \\ 3x-1>0 & x>\frac{1}{3} \\ x-1>0 & x>1 \end{array}$$

avremo

$$\begin{array}{lll} y' > 0 & x > \frac{1}{3} \lor x > 1 & f\ crescente \\ y' = 0 & x = \frac{1}{3} & max \\ y' < 0 & \frac{1}{3} < x < 1 & f\ decrescente \end{array}$$

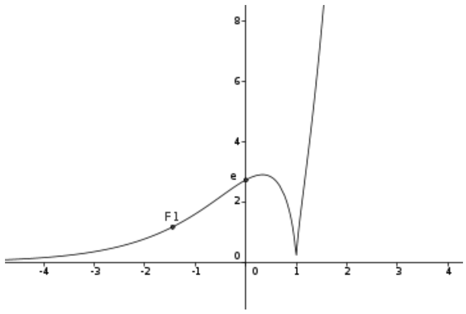
Flessi: calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} y" &= \frac{3\left[e^{x+1}(3x-1) + 3e^{x+1}\right]\sqrt[3]{x-1} - e^{x+1}\frac{(3x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}}{9\sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \frac{3e^{x+1}(3x+2)(x-1) - e^{x+1}(3x-1)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{e^{x+1}\left(9x^2-6x-5\right)}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}} \end{aligned}$$

la derivata seconda si annulla per

$$9x^2 - 6x - 5 = 0 \qquad x = 1 \pm \sqrt{6}$$

in questi due punti avremo due flessi.
Grafico:



Determinare gli integrali della seguente equazione differenziali

$$y - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}y' = 0$$

Soluzione: equazione differenziale lineare del primo ordine che risolviamo separando le variabili

$$\frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} = y \qquad \frac{dy}{y} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

e passando agli integrali

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

l'integrale al primo membro è immediato $\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$. Calcoliamo l'integrale al secondo membro operando la sostituzione $x = t^2$ da cui $dx = 2tdt$; l'integrale diviene

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = & \int \frac{\sqrt{1+t}}{t} \cdot 2tdt = 2\int \sqrt{1+t}dt \\ = & 2\int (1+t)^{\frac{1}{2}} = 2\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Le soluzioni saranno

$$\ln|y| = \frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}} + C \qquad y = C_1 e^{\frac{4}{3}\left(1+\sqrt{x}\right)^{\frac{3}{2}}}$$