ELETTROMAGNETISMO
PARTE I - ELETTRICITÀ

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

1. La Legge di Coulomb

Exercise 1. L'elettrone e il protone in un atomo di idrogeno si trovano a una distanza media $r = 0.53 \cdot 10^{-10}\, m$. che coincide con le dimensioni dell'atomo. Calcolare l'intensità della forza gravitazionale e della forza elettrica tra il protone e l'elettrone.

Soluzione: Applicando la relazione che descrive la forza coulombiana, si ha

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_0}{r^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)^2}{\left(0.53 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 8.20 \cdot 10^{-8} N$$

mentre

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 9.11 \cdot 10^{-31} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{\left(0.53 \cdot 10^{-10}\right)^2} = 3.61 \cdot 10^{-47} N$$

Il rapporto tra le due forze $F_e/F_g \cong 2.3 \cdot 10^{39}$ evidenzia che a livello atomico la forza gravitazionale è completamente trascurabile rispetto alla forza elettrica. Si deve a quest'ultima la formazione e la stabilità degli atomi e quindi della materia.

Exercise 2. Un uomo di massa $m = 70\, kg$, isolato da terra, possiede una carica $-q$ che, per queste considerazioni, pensiamo concentrata in un punto a distanza $r = 1\, m$ dal suolo. Sul suolo è posta una carica q, a distanza r da $-q$. Calcolare il valore di q per cui la forza elettrica tra le cariche è pari al peso dell'uomo.

Soluzione: Se la forza elettrica è pari al peso dell'uomo, sarà

$$mg = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}$$

da cui, risolvendo rispetto a q, si ha

$$q = \sqrt{mg4\pi\varepsilon_0 r^2} = \sqrt{70 \cdot 9.8 \cdot \left(9 \cdot 10^9\right)^{-1} \cdot 1} = 2.76 \cdot 10^{-4}\, C$$

Poiché la carica negativa è portata dagli elettroni, vuol dire che l'uomo ha sul suo corpo un eccesso di elettroni. Calcoliamo il numero di elettroni

$$N = \frac{q}{e} = \frac{2.76 \cdot 10^{-4}}{1.60 \cdot 10^{-19}} = 1.73 \cdot 10^{15}\, elettroni$$

questi hanno la massa $Nm_e = 1.58 \cdot 10^{-15}\, kg$, del tutto trascurabile rispetto alla massa dell'uomo! L'esempio, che è volutamente paradossale, indica che se i corpi non fossero neutri, ma possedessero cariche anche piuttosto piccole, la forza elettrica maschererebbe completamente la forza gravitazionale. Del resto la forza gravitazionale, alla quale si deve la formazione delle galassie, delle stelle e dei pianeti, ha potuto manifestarsi nella storia dell'universo solamente dopo che la forza elettrica aveva terminato la sua opera e cioè aveva formato gli atomi neutri partendo dai protoni, neutroni ed elettroni, costituenti elementari della materia stabile.

Exercise 3. Una sferetta conduttrice molto leggera, di massa $m = 2 \cdot 10^{-3} kg$, possiede una carica $q_0 = 2 \cdot 10^{-8}\, C$ ed è sospesa ad un filo lungo l. Una seconda sferetta conduttrice con una carica $q = 5 \cdot 10^{-7}\, C$ viene avvicinata a q_0. Quando la distanza tra i centri di q e q_0 vale $r = 5\, cm$ l'angolo che il filo forma con la verticale vale θ. Calcolare θ.

Soluzione: All'equilibrio abbiamo la situazione indicata in figura: la risultante $\mathbf{R}$ della forza peso e della forza elettrica agenti su q_0 è diretta lungo il filo, bilanciata dalla tensione del filo stesso. Quindi, applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, si ha

$$\tan\theta = \frac{F_e}{F_g} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2 mg} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot 2 \cdot 10^{-8}}{25 \cdot 10^{-4} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9.8} = 0.1837$$

da cui

$$\theta = \arctan 0.1837 \cong 10.41°$$

con con l'approssimazione $\theta \cong \tan\theta$ risulta $\theta \cong 10.53°$. Pertanto, finché l'angolo è piuttosto piccolo, diciamo inferiore a $10° = 0.1745\,rad$, possiamo scrivere

$$\theta = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2 mg}$$

in cui l'angolo è espresso in radianti.

Exercise 4. Durante la scarica a terra di un fulmine scorre una corrente di $2.5 \cdot 10^4\,A$ per un tempo di $20\,\mu s$. Trovare la carica che viene trasferita in tale evento

Soluzione: la corrente è il rapporto tra la quantità di carica che fluisce nell'intervallo di tempo stabilito (sec)

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

da cui

$$\Delta Q = i\Delta t = 2.5 \cdot 10^4\,\frac{Coul}{s} \times 20 \cdot 10^{-6} s = 0.50\,C$$

Exercise 5. Trovare la forza elettrostatica fra due cariche di $1.00\,C$ alla distanza di $1.00\,m$ e di $1\,km$, supposta possibile una tale configurazione..

Soluzione: la forza che ogni carica esercita sull'altra è espressa dalla legge di Coulomb:

$$F_e = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

dove $k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}$ con ε_0, costante dielettrica del vuoto (e supporremo che le cariche siano nel vuoto), q_1, q_2 sono le cariche e r la distanza che le separa; pertanto, sostituendo i valori assegnati si ha

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{1.00^2\,C^2}{1.00^2\,m^2} = 8.99 \cdot 10^9\,N$$

per una distanza di $1.00\,km$, si ha

$$F_e = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{N\,m^2}{C^2}\,\frac{1.00\,C^2}{1.00 \cdot 10^6\,m^2} = 8.99 \cdot 10^3\,N$$

Exercise 6. Una carica puntiforme di $+3.0 \cdot 10^{-6}\,C$ dista $12.0\,cm$ da una seconda carica puntiforme di $-1.50 \cdot 10^{-6}\,C$. Calcolare l'intensità della forza su ciascuna carica.

Soluzione:: Applichiamo la formula della forza elettrostatica

$$|F_e| = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{+3.00 \cdot 10^{-6}\,C \times -1.50 \cdot 10^{-6}\,C}{0.12^2\,m^2} = 2.81 \cdot 10^{-3}\,N$$

la forza sarà identica su entrambe le cariche.

Exercise 7. Trovare la distanza che separa due cariche puntiformi $q_1 = 26.0\,\mu C$ e una carica puntiforme $q_2 = -47.0\,\mu C$ affinché la forza elettrica attrattiva tra di esse sia pari a $5.70\,N$.

Soluzione:: È necessario in questo caso utilizzare una forma inversa della legge di Coulomb, nella quale la grandezza incognita sia la distanza, cioè

$$d = \sqrt{\frac{kq_1q_2}{F}} = \sqrt{\frac{8.99 \cdot 10^9 \times 26.0 \cdot 10^{-6} \times (47.0 \cdot 10^{-6})}{5.70}} = 1.39\,m$$

le cariche vengono calcolate in valore assoluto.

Exercise 8. Due particelle aventi la stessa carica vengono tenute a una distanza di $3.2 \cdot 10^{-3}\,m$; a un certo punto esse sono lasciate libere. Si misurano le accelerazioni iniziali delle particelle che risultano essere pari a $7.0\,m/s^2$ e $9.0\,m/s^2$. La massa della prima particella è $\times 6.3 \cdot 10^{-7}\,kg$. Determinare la massa e la carica della seconda particella.

Soluzione:: La seconda legge di Newton descrive il legame tra la forza e l'accelerazione impressa a un corpo. Pertanto se

$$F_1 = m_1 a_1 = \times 6.3 \cdot 10^{-7} \times 7.0\, \frac{m}{s^2} = 4.4 \cdot 10^{-6}\, N$$

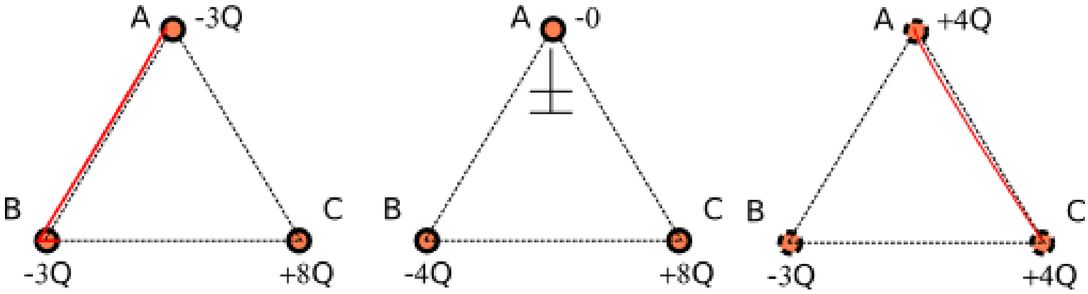
Ma per la terza legge di Newton $F_1 = F_2$, per cui

$$m_2 = \frac{F_2}{a_2} = \frac{4.4 \cdot 10^{-6}\, N}{9.0\, \frac{m}{s^2}} = 4.9 \cdot 10^{-7}\, kg$$

e di conseguenza per la legge di Coulomb la carica sarà

$$q = \sqrt{\frac{Fd^2}{k}} = \sqrt{\frac{4.4 \cdot 10^{-6}\, N \times \left(3.2 \cdot 10^{-3}\, N\right)^2}{8.99 \cdot 10^9\, \frac{Nm^2}{C^2}}} = 7.1 \cdot 10^{-11}\, C$$

Exercise 9. Tre sfere conduttrici identiche A, B, C sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato d (vedi figura). Esse hanno cariche iniziali rispettivamente di $-2Q$, $-4Q$, $8Q$. Trovare il modulo della forza tra A e C. Si eseguono poi le seguenti operazioni: si mettono in contatto momentaneamente con un sottile filo A e B; poi si collega a terra A; infine si collegano temporaneamente col filo A e C. Trovare i moduli delle forze tra A e C e tra B e C.



Soluzione: Calcoliamo dapprima la forza che si esercita tra le sfere cariche A e C

$$F_{A-C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{d^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{16Q^2}{d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

La figura mostra le operazioni eseguite e le corrispondenti variazioni nelle distribuzioni di carica, per cui la forza tra A e C diviene

$$F_{A-C} = \frac{16Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{4Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

e la forza tra B e C sarà

$$F_{B-C} = \frac{12Q^2}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = \frac{3Q^2}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

Exercise 10. Due sfere conduttrici identiche,1 e 2, possiedono una egual quantità di carica e sono tenute a una distanza reciproca molto maggiore rispetto al loro diametro. Una forza elettrostatica **F** agisce sulla sfera 2 per effetto della sfera 1. Si supponga che una terza sfera identica 3, dotata di un manico isolante inizialmente scarica, venga messa in contatto prima con la sfera 1, poi con la sfera 2 e infine venga rimossa. Si trovi la forza elettrostatica che agisce sulla sfera 2 in funzione di **F**.

Soluzione: La forza che la sfera 1 esercita sulla 2 è

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{d^2}$$

se la sfera 3 viene a contatto con la 1, allora essa riceverà metà della carica di 1, cioè la sfera 1 e la 3 avranno una carica $\frac{Q}{2}$. Ora, se la sfera 3 viene a contatto anche con la 2, si avrà una ridistribuzione di carica pari a $\frac{3Q}{4}$. Pertanto la forza che si esercita sarà

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{Q}{2} \cdot \frac{3Q}{4}}{d^2} = \frac{1}{32\pi\varepsilon_0} \frac{3Q^2}{d^2} = \frac{3}{8} F$$

Exercise 11. Tre particelle cariche, q_1, q_2, q_3 nell'ordine, sono poste lungo una linea retta, separate ognuna da una distanza d. Le cariche q_1e $q_2$sono tenute ferme. La carica q_3, posta tra le due, è libera di muoversi e viene a trovarsi in equilibrio rispetto all'azione delle forze elettriche. Si determini $q_1$in funzione di q_2.

Soluzione: Se la carica q_3 è in equilibrio significa che la forza prodotta dalle cariche q_1 e q_2 sono uguali e contrarie. Pertanto

$$F_{1-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3}{(2d)^2}$$

$$F_{2-3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_3}{d^2}$$

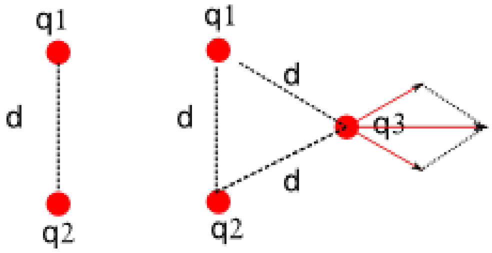
Eguagliando le due forze, si ha

$$\frac{q_1 q_3}{4d^2} = -\frac{q_2 q_3}{d^2}$$

da cui

$$q_1 = -4q_2$$

Exercise 12. La figura mostra due cariche q_1 e q_2 tenute ferme a una distanza d l'una dall'altra. Trovare l'intensità della forza elettrica che agisce su q_1. Si supponga $q_1 = q_2 = 20.0\,\mu C$ e $d = 1.50\,m$. Una terza carica $q_3 = 20.0\,\mu C$ vie4ne avvicinata e collocata come mostrato sempre in figura. Si determini l'intensità della forza elettrica agente su q_1.



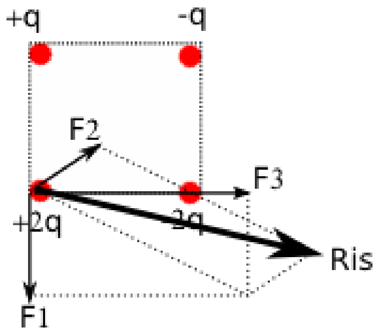
Soluzione: Determiniamo l'intensità della forza nella prima disposizione

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} = 8.99 \cdot 10^9\,\frac{\left(20.0 \cdot 10^{-6}\right)^2}{1.50^2} = 1.60\,N$$

Aggiungiamo ora la terza carica, che, come nella figura, si dispone nel terzo vertice di un triangolo equilatero. Sulla carica q_1 agiranno ora entrambe le cariche. Vale sempre il principio di somma vettoriale delle forze, per cui la risultante sarà il doppio dell'altezza del triangolo equilatero avente per lato l'intensità della forza

$$F = 2 \times 1.60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.77\,N$$

Exercise 13. Quattro cariche sono disposte ai vertici di un quadrato, come mostrato in figura. Si assuma $q = 1.10 \cdot 10^{-7}\,C$ e il lato del quadrato, a, uguale a $5.0\,cm$. Trovare le componenti verticali e orizzontali della forza elettrostatica risultante agente sulla carica $+q$.



Soluzione: Calcoliamo l'intensità delle forze, ricordando che se il lato del quadrato è uguale ad a, allora la sua diagonale è uguale a $a\sqrt{2}$:

$$F_1 = k\frac{2q^2}{a^2} \qquad F_2 = k\tfrac{2q^2}{2a^2} = k\tfrac{q^2}{a^2} \qquad F_3 = k\frac{4q^2}{a^2}$$

da cui si deduce che

$$F_2 = \frac{F_1}{2} \qquad F_1 = \tfrac{1}{2}F_3 \qquad F_3 = 4F_2$$

Assumiamo come versi positivi quello diretto verso l'alto e a destra. Osservando i vettori disegnati in figura si ricava che F_1 ha solo componente verticale, per cui

$$F_{1x}=0 \qquad F_{1y}=-k\frac{2q^2}{a^2}$$

il vettore F_2 è diretto lungo la diagonale e forma quindi con il lato un angolo di 45°, per cui le due componenti saranno uguali

$$F_{2x}=\frac{F_2}{\sqrt{2}}=k\frac{q^2}{a^2} \qquad F_{2y}=\frac{F_2}{\sqrt{2}}=k\frac{q^2}{a^2}$$

Il terzo vettore è diretto lungo il lato ed avrà solo componente orizzontale

$$F_{3x}=k\frac{4q^2}{a^2} \qquad F_{3y}=0$$

Sommiamo ora le componenti vettorialmente

$$\begin{aligned} R_x &= 0+k\frac{q^2}{a^2}+k\frac{4q^2}{a^2}=k\frac{5q^2}{a^2}=\frac{8.99\cdot10^9\times4\times\left(1.10\cdot10^{-7}\right)^2}{\left(5.0\cdot10^{-2}\right)^2}=0.17\,N \\ R_y &= -k\frac{2q^2}{a^2}+k\frac{q^2}{a^2}+0=-k\frac{q^2}{a^2}=-\frac{8.99\cdot10^9\times\left(1.10\cdot10^{-7}\right)^2}{\left(5.0\cdot10^{-2}\right)^2}=-0.046\,N \end{aligned}$$

Exercise 14. Due cariche q_1 e q_2 sono posto rispettivamente sull'asse x nei punti $x=-a$ e $x=+a$. Trovare la relazione tra le due cariche affinché sia nulla la forza elettrostatica netta che agisce su una terza carica $+Q$ posta nel punto $x=\frac{a}{2}$.

Soluzione: Se la forza totale è nulla, allora le due forze prodotte da q_1e q_2 devono essere uguali in modulo e contrarie in verso. Pertanto,

$$F_1=k\frac{q_1Q}{\frac{9}{4}a^2}=F_2=k\frac{q_2Q}{\frac{1}{4}a^2}$$

da cui

$$\frac{q_1}{q_2}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{4}}=9$$

[il calcolo era riducibile al quadrato del rapporto tra le due distanze]

Exercise 15. Due piccole sfere vengono caricate positivamente con una carica totale pari a $5.0\cdot10^{-5}\,C$. Le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $1.0\,N$ essendo tenute ad una distanza di $2.0\,m$. Calcolare la carica su ciascuna sfera.

Soluzione: La somma delle due cariche è pari a $5.0\cdot10^{-5}\,C$ e il loro prodotto è ottenibile applicando la legge di Coulomb

$$1\,N=8.99\cdot10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{q_1q_2\,C^2}{4.0\,m^2}$$

per cui

$$q_1q_2=\frac{4}{8.99\cdot10^9}=4.45\cdot10^{-10}$$

ricordando le proprietà delle soluzioni delle equazioni di secondo grado $x_1+x_2=-s$ e $x_1x_2=p$, si possono ottenere le singole cariche risolvendo l'equazione

$$Q^2-5.0\cdot10^{-5}Q+4.45\cdot10^{-10}=0$$

da cui $q_1=1.2\cdot10^{-5}$ e $q_2=3.8\cdot10^{-5}$.

Exercise 16. Due sfere conduttrici identiche caricate con segno opposto si attraggono con una forza di $0.108\,N$ essendo tenute ad una distanza di $50.0\,cm$. Le sfere vengono improvvisamente collegate con un filo conduttore, che viene poi rimosso. Alla fine le sfere si respingono con una forza elettrostatica di $0.0360\,N$. Trovare le cariche iniziali delle sfere.

Soluzione: Prima del collegamento il prodotto delle due cariche vale:

$$q_1q_2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.108\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2m^2}} = -3.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$

dopo il collegamento le due cariche sono uguali ma di segno opposto

$$Q^2 = \frac{Fd^2}{k} = \frac{0.0360\,N \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{N}{C^2m^2}} = 1.0 \cdot 10^{-12}\,C^2$$

da cui

$$Q = 1.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$

nel collegamento ogni carica sarà pari al valor medio delle due,

$$Q = \frac{q_1 + q_2}{2}$$

per cui

$$q_1 + q_2 = 2.0 \cdot 10^{-6}\,\mu C$$

componendo le due informazioni, si ha

$$\begin{cases} q_1 + q_2 & = & 2.0 \cdot 10^{-6} \\ q_1q_2 & = & -3.0 \cdot 10^{-12} \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$Q^2 - 2.0 \cdot 10^{-12}Q \pm 3.0 \cdot 10^{-12} = 0$$

si ottengono due possibili coppie di soluzioni

$$q_1 = 3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$
$$q_1 = -3.0 \cdot 10^{-6}\,C \qquad q_2 = -1.0 \cdot 10^{-6}\,C$$

Exercise 17. Due cariche $+1.0\,\mu C$ e $-3.0\,\mu C$ vengono poste a una distanza di $10\,cm$. Stabilire dove collocare una terza carica in modo che su di essa non agisca alcuna forza.

Soluzione: Se sulla terza carica non deve agire alcuna forza, allora $F_1 = -F_2$. La carica q_3 può avere segno positivo o negativo. Nel primo caso q_1 eserciterà una forza repulsiva e q_2 attrattiva. Se q_3 è negativa si avrà una condizione invertita. Se q_3 è posta tra le due cariche non si verifica in ogni caso la condizione richiesta perché il verso delle due forze risulta concorde e la somma diversa da zero. La carica q_3 deve pertanto essere esterna alle due cariche e in particolare alla sinistra della carica q_1 che ha valore minore, poiché in questo caso è possibile disporre q_3 ad una distanza inferiore a quella da q_2. Poniamo il riferimento nella carica q_1 e indichiamo con x la distanza tra q_1 e q_3. La distanza tra q_2 e q_3 sarà quindi $10 + x$. La somma delle forze esercitate dalle due cariche su q_3 deve essere nulla e poiché le due forze hanno verso contrario si può scrivere

$$\frac{1q_3}{x^2} = \frac{3q_3}{(10+x)^2}$$

dividendo per q_3 e risolvendo si ha

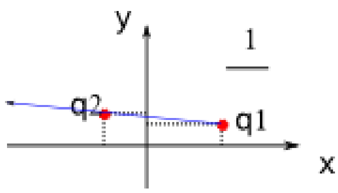
$$\frac{(10+x)^2}{x^2} = 3$$

estraendo la radice quadrata si ha

$$\frac{(10+x)}{x} = \sqrt{3}$$

da cui $x = 14\,cm$.

Exercise 18. Le cariche e le coordinate di due particelle nel piano xy sono $q_1 = +3.0\,\mu C$, $x_1 = 3.5\,cm$, $y_1 = 0.50\,cm$, e $q_2 = -4.0\,\mu C$, $x_2 = -2.0\,cm$, $y_2 = 1.5\,cm$. Calcolare l'intensità e la direzione della forza elettrostatica su q_2. Stabilire la posizione di una terza carica $q_3 = +4.0\,\mu C$ affinché la forza elettrostatica netta su $q_2$sia nulla.



Soluzione: La figura mostra la posizione delle due cariche in base alle coordinate nel piano cartesiano. Calcoliamo l'intensità della forza mediante la legge di Coulomb dopo aver calcolato la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_q q_2}^2 = (3.5+2)^2 + (0.5-1.5)^2 = 31.25\,cm^2$$

$$F = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{3.0 \cdot 10^{-6} \times 4.0 \cdot 10^{-6}}{31.25 \cdot 10^{-4}} = 36\,N$$

lungo la direzione congiungente che forma un angolo con l'asse x

$$\theta = \arctan\left(-\frac{2}{11}\right) = -10°$$

la carica q_3 deve essere posta a sinistra della carica q_2 e sulla congiungente le due cariche, poiché esercita su q_2 una forza attrattiva così come q_1. Dovrà pertanto risultare $F_{1-2} = -F_{3-2}$, e quindi in valore assoluto $F_{3-2} = 36\,N$. Calcoliamo quindi la distanza tra le due cariche

$$\overline{q_3 q_2} = \sqrt{\frac{8.99 \cdot 10^9 \times 4.0 \cdot 10^{-6} \times 4.0 \cdot 10^{-6}}{36}} = 6.7\,cm$$

applicando i teoremi sui triangoli rettangoli, si può ottenere l'incremento in ascissa e ordinata rispetto al punto in cui è posta la carica q_2:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 6.7 \times \cos(-10°) = 6.6 \\ \Delta y &= 6.7 \times \sin(-10°) = 1.2 \end{aligned}$$

Pertanto le coordinate del punto in cui si trova q_3 saranno

$$\begin{aligned} x_{q_3} &= -8.6\,cm \\ y_{q_3} &= 2.7\,cm \end{aligned}$$

Exercise 19. Due cariche puntiformi libere $+q$ e $+4q$ si trovano ad una distanza L l'una dall'altra. Una terza carica viene posta in modo che l'intero sistema sia in equilibrio. Trovare segno, valore e posizione della terza carica.

Soluzione: L'unica possibilità affinché tutte le cariche risultino in equilibrio è che la terza carica sia negativa e posta tra le due. In queste modo si possono contrastare le forze repulsive delle due cariche positive. (È possibile verificare graficamente mediante i vettori delle forze questa condizione). Tutte le tre cariche devono stare in equilibrio, pertanto devono annullarsi tutte le coppie di forze che agiscono su ogni carica. Tenendo conto dei segni si ha

$$\begin{cases} -F_{13} + F_{12} = 0 \\ -F_{23} + F_{12} = 0 \\ -F_{13} - F_{23} = 0 \end{cases}$$

sommando la prima e la terza, cambiata di segno, si ha la condizione

$$F_{12} + F_{23} = 0$$

e sostituendo i valori assegnati e indicando con x la distanza tra la carica 1 e la 3 e $L-x$ la distanza tra la carica 2 e la 3

$$\frac{4q^2}{L^2} = \frac{-4qq_3}{(L-x)^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = -\frac{q(L-x)^2}{L^2}$$

per ricavare la distanza incognita utilizziamo la prima relazione tra le forze

$$-\frac{qq_3}{x^2} = \frac{4q^2}{L^2}$$

da cui si ricava

$$q_3 = \frac{4qx^2}{L^2}$$

confrontando le due relazioni

$$-\frac{q(L-x)^2}{L^2} = \frac{4qx^2}{L^2}$$

risolvendo, si ottiene

$$(L-x)^2 = 4x^2$$

svolgendo si ha l'equazione

$$3x^2 + 2Lx - L^2 = 0$$

da cui si ottiene

$$x = \frac{1}{3}L$$

e la terza carica sarà

$$q_3 = \frac{-4q\frac{1}{9}L^2}{L^2} = -\frac{4q}{9}$$

Exercise 20. Quanto dovrebbero valere due cariche positive uguali che, poste sulla Terra e sulla Luna, fossero in grado di neutralizzare la loro attrazione gravitazionale? È necessario conoscere la distanza Terra-Luna? Quante tonnellate di idrogeno ionizzato sarebbero necessarie per avere la carica calcolata?

Soluzione: L'attrazione dovuta alla forza gravitazionale tra le due cariche, essendo poste su Terra e Luna corrisponde all'attrazione tra le masse dei due astri

$$F = G\frac{m_T m_L}{R^2}$$

dove R è la distanza Terra-Luna. La forza repulsiva elettrica è espressa da

$$F = k\frac{q^2}{R^2}$$

affinché le forze siano uguali deve valere

$$Gm_T m_L = kq^2$$

e come si può osservare la distanza R non interviene in tale relazione. Ora

$$q = \sqrt{\frac{Gm_T m_L}{k}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \times 5.98 \cdot 10^{24} \times 7.36 \cdot 10^{22}\,[kg^2]}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}}} = 5.7 \cdot 10^{13}\,C$$

Se la carica è quella di un protone (idrogeno ionizzato) allora vale $1.602 \cdot 10^{-19}\,C$ e quindi il numero dei protoni è

$$n^\circ = \frac{5.7 \cdot 10^{13}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 3.6 \cdot 10^{32}\,protoni$$

e nota la massa di un protone si ha

$$m = 3.6 \cdot 10^{32} \times 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg = 600\,ton$$

Exercise 21. Una certa carica Q viene divisa in due parti q e $Q - q$. Trovare la relazione tra Q e q affinché le due frazioni, poste ad una distanza data, producano la massima repulsione elettrostatica.

Soluzione: La forza elettrostatica tra le due cariche è

$$F = k\frac{q\,(Q-q)}{r^2}$$

Dati r e k, il massimo di F sarà il massimo del prodotto $qQ - q^2$. Dal punto di vista algebrico questo è un polinomio di 2° grado nella lettera q, che si rappresenta mediante una parabola rivolta verso il basso per la presenza del coefficiente negativo del termine quadrato. Il suo massimo coincide con il vertice della parabola, cioè

$$V \equiv F_{max}\left(\frac{Q}{2}; \frac{Q^2}{2}\right)$$

per cui avremo $q = \frac{Q}{2}$.

Exercise 22. Due cariche Q vengono fissate su due vertici opposti di un quadrato. Due cariche q vengono poste sugli altri due vertici. Se la forza elettrica risultante su Q è nulla, trovare la relazione tra q e Q. Valutare se è possibile scegliere q in modo che la forza elettrica risultante su ogni carica sia nulla.

Soluzione: Se la forza risultante su Q è nulla, allora q deve avere carica di segno opposto e le forze esercitate dalle due cariche q sulla Q sono la componente orizzontale e verticale della forza equilibrante la forza repulsiva tra le due cariche Q. Calcoliamo la forza repulsiva tra le due cariche Q, supposto l il lato del quadrato

$$F = k\frac{Q^2}{2l^2}$$

tale forza è uguale e opposta alla equilibrante data dalla somma delle forze prodotte dalle due cariche q, poste a 90°rispetto alla carica Q

$$F = \sqrt{2\left(\frac{kqQ}{l^2}\right)} = k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

La somma delle due forze è nulla, pertanto

$$k\frac{Q^2}{2l^2} = -k\frac{qQ}{l^2}\sqrt{2}$$

riducendo, si ottiene

$$\frac{Q}{2} = -q\sqrt{2}$$

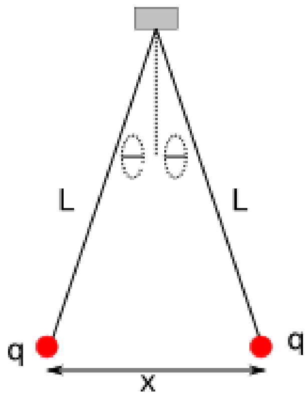
da cui

$$Q = -2\sqrt{2}q$$

Exercise 23. Due palline uguali di massa m sono appese con fili di seta di lunghezza L e hanno carica q (vedi figura). Si assuma che l'angolo θ sia così piccolo che la $\tan\theta$ possa essere sostituita con $\sin\theta$. Mostrare che. in questa approssimazione, all'equilibrio si ha

$$x = \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dove x è la distanza tra le palline. Se $L = 120\,cm$, $m = 10\,g$ e $x = 5.0\,cm$, trovare il valore di q.



Soluzione: Nell'approssimazione indicata la sferetta cade, sotto l'azione del suo peso, lungo la congiungente le due cariche, perché se $\tan\theta \cong \sin\theta$, allora l'altezza del triangolo isoscele è circa il suo lato obliquo. Ciò consente di poter considerare la forza elettrica e quella di richiamo del pendolo come parallele e allineate lungo la congiungente delle cariche. Pertanto, se la forza elettrica equilibra la componente parallela della forza peso si ha

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = mg\sin\theta$$

ma per quanto detto il seno dell'angolo è dato dal rapporto tra il cateto opposto e l'ipotenusa

$$\sin\theta = \frac{\frac{x}{2}}{L} = \frac{x}{2L}$$

sostituendo, si ha

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} = \frac{mgx}{2L}$$

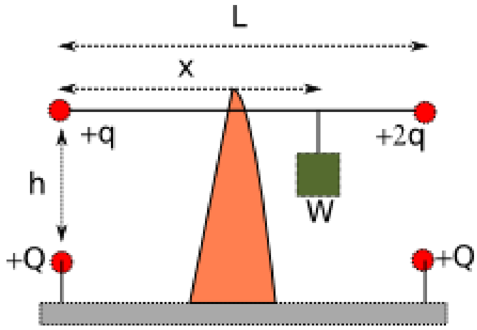
risolvendo rispetto a x

$$x = \sqrt[3]{\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}}$$

Se ora sostituiamo i valori numerici assegnati, si ha

$$q=\sqrt{\frac{mgx^3 4\pi\varepsilon_0}{2L}}=\sqrt{\frac{0.01\,kg\times 9.81\,\frac{m}{s^2}\times 0.05^3\,m^3\times 4\pi\times 8.85\cdot 10^{-12}\,\frac{C}{Nm^2}}{2.40\,m}}=2.4\cdot 10^{-8}\,C$$

Exercise 24. La figura mostra una lunga asticella di materiale isolante, senza massa, imperniata al centro e bilanciata con un peso W posto alla distanza x dal suo estremo sinistro. Alle estremità sinistra e destra dell'asticella sono poste le cariche q e $2q$ rispettivamente, mentre sotto ognuna di queste cariche è fissata una carica positiva Q a una distanza h. Calcolare la posizione x dove deve essere appeso W affinché l'asticella sia bilanciata.



Soluzione: L'asta non può subire moti traslatori sotto l'effetto delle forze essendo imperniata su un sostegno. Dobbiamo pertanto considerare i momenti delle forze agenti in grado di far ruotare l'asta attorno al perno. Le forze che agiscono sono quelle elettriche F_{qQ}, F_{2qQ}, F_{q2q} e quella gravitazionale dovuta al peso W. Il momento di una forza è definito come il prodotto vettoriale della forza per il suo braccio, cioè della distanza tra il punto di applicazione della forza e il centro di rotazione. La forza F_{q2q} tra le due cariche poste sull'asta è diretta parallelamente all'asta stessa e pertanto il suo momento sarà nullo. Consideriamo solo le forze che agiscono verticalmente. Le forze elettriche, repulsive, sono dirette verso l'alto, mentre la forza gravitazionale è diretta verso il basso. Poiché l'asta è in equilibrio la somma dei momenti deve essere nulla. Calcoliamo i momenti delle singole forze agenti e sommiamoli:

$$k\frac{2qQ}{h^2}\frac{L}{2}+k\frac{2qQ}{h^2}\left(-\frac{L}{2}\right)-W\left(x-\frac{L}{2}\right)=0$$

dove i segni positivi sono stati presi per i versi destra e alto, e negativi sinistra e in basso. Risolvendo rispetto ad x

$$x=\frac{L}{2}+k\frac{qQ}{h^2W}\frac{L}{2}=\frac{L}{2}\left(1+k\frac{qQ}{h^2W}\right)$$

2. Quantizzazione della carica (cariche viste come multipli di una carica elementare)

Exercise 25. In un cristallo di sale uno ione di sodio (Na^+, di carica $+e$) cede uno dei suoi elettroni a uno ione vicino di cloro (Cl^-, di carica $-e$). Lo ione positivo di sodio e quello negativo di cloro si attraggono per effetto della forza elettrostatica. Se gli ioni distano $2.82\cdot 10^{-10}\,m$, trovare la forza di attrazione.

Soluzione: risolviamo ancora applicando la legge di Coulomb, sapendo che la carica $e=1.602\cdot 10^{-19}\,C$

$$F_e=8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\left(1.602\cdot 10^{-19}\right)^2\,C^2}{\left(2.82\cdot 10^{-10}\right)^2\,m^2}=2.90\cdot 10^{-9}\,N$$

Exercise 26. Un neutrone vie pensato come la riunione di un quark up di carica $+\frac{2}{3}e$ e due quark down di carica $-\frac{e}{3}$ ciascuno. Se i quark down si trovano a una distanza di $2.6\cdot 10^{-15}\,m$ all'interno del neutrone, trovare la forza repulsiva tra essi.

Soluzione: (I quark formano il neutrone perché sono legati da una forza molto più intensa di quella elettrica che agisce a distanze molto piccole ed è quindi in grado di vincere la repulsione coulombiana). La forza repulsiva tra i quark down sarà

$$F_e=8.99\cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\times\frac{\frac{1}{9}\left(1.602\cdot 10^{-19}\right)^2\,C^2}{\left(2.6\cdot 10^{-15}\right)^2\,m^2}=3.8\,N$$

Exercise 27. Trovare la carica totale in coulomb di $75.0\,kg$ di elettroni.

Soluzione: È necessario pertanto conoscere la massa degli elettroni per determinare il loro numero e quindi la carica complessiva; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg$. Il numero degli elettroni sarà

$$n_e = 75\,kg \times \frac{1}{9.11 \cdot 10^{-31}}\frac{1}{kg} = 8.23 \cdot 10^{31}$$

la carica complessiva sarà

$$q = 8.23 \cdot 10^{31} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = -1.31 \cdot 10^{13}\,C$$

Exercise 28. Determinare i megacoulomb di carica positiva (o negativa) presenti in 1.00 moli di gas neutro molecolare di idrogeno.

Soluzione: Una mole di idrogeno contiene un numero di atomi pari al numero di Avogadro, cioè $6.02 \cdot 10^{23}$. La massa totale è pari a $1.00797\,g$. Gli atomi di idrogeno possiedono una carica positiva e una negativa. Pertanto la quantità di carica sarà

$$q = 2 \times 6.02 \cdot 10^{23} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 96440\,C = 0.19\,MC$$

Exercise 29. La forza elettrostatica tra due ioni identici separati da una distanza di $5.0 \cdot 10^{-10}\,m$ è di $3.7 \cdot 10^{-9}\,N$. Trovare la carica di ciascuno ione e il numero di elettroni mancanti a ciascuno ione.

Soluzione: Essendo gli ioni identici, la carica di ciascuno sarà data da

$$q = \sqrt{\frac{Fr^2}{k_0}} = \sqrt{\frac{3.7 \cdot 10^{-9}\,N \times (5.0 \cdot 10^{-10})\,m^2}{8.99 \cdot 10^9}} = 3.21 \cdot 10^{-19}\,C$$

Sia n il numero di elettroni mancanti per ogni ione. Allora, $ne = q$, da cui

$$n = \frac{q}{e} = \frac{3.21 \cdot 10^{-19}\,C}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 2$$

Exercise 30. L'atmosfera terrestre è continuamente bombardata da protoni generati dai raggi cosmici in qualche parte dello spazio. Se i protoni passassero tutti attraverso l'atmosfera, ogni metro quadrato di superficie terrestre riceverebbe una media di 1500 protoni al secondo. Trovare la corrente elettrica corrispondente sulla superficie della Terra.

Soluzione: Consideriamo la Terra di forma perfettamente sferica; in tal caso la sua superficie è espressa da $4\pi R^2$, cioè

$$S = 4\pi \times \left(6.37 \cdot 10^6\right)^2\,m^2 = 5.01 \cdot 10^{14}\,m^2$$

Se ogni m^2 riceve 1500 protoni al secondo avremo un numero di protoni al secondo pari a

$$n = 1500\,\frac{1}{m^2 s} \times 5.01 \cdot 10^{14}\,m^2 = 7.65 \cdot 10^{17}\,s^{-1}$$

la carica complessiva nell'unità di secondo, cioè la corrente, sarà

$$i = 7.65 \cdot 10^{17}\,s^{-1} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 0.122\,A$$

Exercise 31. Una lampadina da $100\,W$ è sottoposta a una tensione di $120\,V$ e ha una corrente di $0.83\,A$ nel suo filamento. Calcolare il tempo necessario a una mole di elettroni ad attraversare la lampadina.

Soluzione: Una corrente di $0.83\,A$ corrisponde a una carica che passa ogni secondo pari a $0.83\,C$. Una tale carica è determinata dalla somma di

$$n_e = \frac{0.83\,C}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 5.2 \cdot 10^{18}$$

una mole contiene $6.02 \cdot 10^{23}$ elettroni, e in un giorno vi sono $t_{sec} = 24 \times 3600 = 86400\,s$, per cui

$$\Delta t = \frac{6.02 \cdot 10^{23}}{5.2 \cdot 10^{18}} = 115769\,s = \frac{115769}{86400} = 1.34\,giorni$$

Exercise 32. Calcolare la quantità di carica positiva (in coulomb) presente in un bicchiere d'acqua. Si assuma che il volume dell'acqua contenuta nel bicchiere sia $250\,cm^3$.

Soluzione: L'acqua pura ha una densità pari a $1\,g/cm^3$, per cui in $250\,cm^3$ di acqua avremo una massa di $250\,g$. L'acqua è una molecola composta da due atomi di idrogeno e uno di ossigeno (H_2O) e una mole di acqua corrisponde a $18\,g$. Nel bicchiere avremo quindi

$$n_{moli} = \frac{250}{18} = 14\,moli$$

cioè avremo

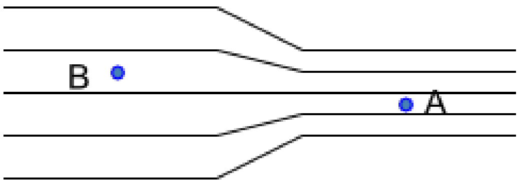
$$n_{molec} = 14 \times 6.02 \cdot 10^{23} = 8.4 \cdot 10^{24}$$

L'idrogeno ha una carica positiva e l'ossigeno ne ha 8, per un totale di 10 cariche positive. Il loro numero complessivo sarà quindi $8.4 \cdot 10^{25}$ e la loro carica complessiva sarà

$$q = 8.4 \cdot 10^{25} \times 1.602 \cdot 10^{-19} = 1.34\,10^7\,C$$

3. CAMPO ELETTRICO

Exercise 33. In figura sono rappresentate le linee di forza di un campo elettrico separate tra loro a sinistra da uno spazio doppio rispetto a destra. Se nel punto A, $E_A = 40\,N/C$, trovare la forza che agisce su un protone posto in quel punto e determinare poi l'intensità del campo nel punto B.

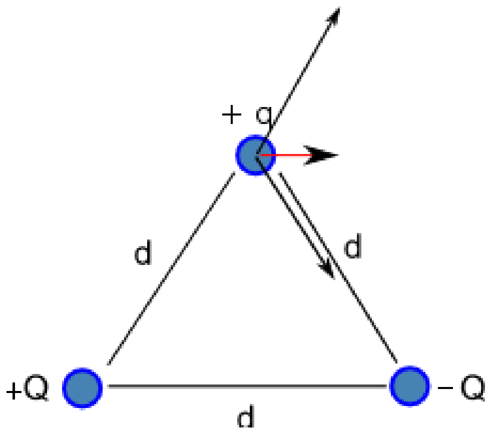


Soluzione: Il campo elettrico è definito come il rapporto tra la forza elettrica e la carica di prova sulla quale agisce tale forza. Pertanto,

$$F = Eq = Ee^+ = 40\,\frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 6.4 \cdot 10^{-18}\,N$$

Nel punto B, avendo le linee di campo una separazione doppia, l'intensità del campo elettrico sarà la metà di quella in A, cioè $E_B = 20\,\frac{N}{C}$.

Exercise 34. In figura, tre cariche sono disposte a formare un triangolo equilatero. Si determini la direzione e il verso della forza che agisce sulla carica $+q$ per effetto dell'azione delle altre due.



Soluzione: La carica $+Q$ eserciterà su $+q$ una forza repulsiva diretta lungo la congiungente le due cariche verso l'alto; la carica $-Q$ eserciterà una forza di uguale intensità ma attrattiva, verso il basso. Essendo i due vettori di uguale modulo, la forza risultante sarà diretta verso destra (come mostrato in figura).

3.1. Campo generato da una carica puntiforme.

Exercise 35. Trovare il valore di una carica puntiforme scelta in modo che il suo campo elettrico a una distanza di $1.00\,m$ valga $1.00\,N/C$.

Soluzione: L'esercizio richiede solo di applicare la definizione di campo elettrico generato da una carica puntiforme, cioè $E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, da cui, risolvendo rispetto a q, si ha

$$Q = \frac{Er^2}{k_0} = \frac{1.00\,\frac{N}{C} \times 1.00\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 1.11 \cdot 10^{-10}\,C$$

[un modo sicuro per evitare errori nell'uso delle formule inverse è quello di introdurre sempre le unità di misura e verificare che l'unità del risultato sia quella prevista]

Exercise 36. Trovare l'intensità di una carica puntiforme il cui campo elettrico, a $50\,cm$, ha l'intensità di $2.0\,N/C$.

Soluzione: Esercizio analogo al precedente, per cui

$$Q = \frac{Er^2}{k_0} = \frac{2.0\,\frac{N}{C} \times 0.25\,m^2}{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}} = 5.6 \cdot 10^{-11}\,C$$

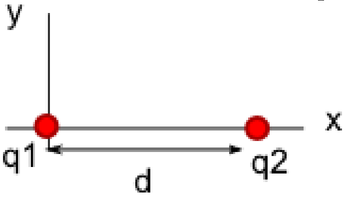
Exercise 37. Due cariche opposte e di uguale intensità pari a $2.0 \cdot 10^{-7}\,C$ sono poste a una distanza di $15\,cm$. Trovare l'intensità e la direzione di **E** nel punto di mezzo tra le due cariche.

Soluzione: Il campo generato da una carica positiva è radiale e con verso uscente dalla carica; viceversa, il campo generato da una carica negativa è sempre radiale, ma entrante. Nel punto di mezzo, pertanto, i due campi si sommano e avranno la direzione della congiungente le due cariche.

$$E_{tot} = E_+ + E_- = 2 \times \frac{8.99 \cdot 10^9\,\frac{Nm^2}{C^2} \times 2.0 \cdot 10^{-7}\mathrm{C}}{\left(7.5 \cdot 10^{-2}\right)^2\,m^2} = 6.4 \cdot 10^5\,\frac{N}{C}$$

(le due cariche formano un dipolo elettrico; la soluzione proposta non fa uso delle formule relative a un dipolo elettrico, ma si basa sulle proprietà note dei campi elettrici e delle linee di forza ad essi associate).

Exercise 38. Nella disposizione in figura due cariche puntiforme di intensità $q_1 = -5q$ e $q_2 = +2q$ sono separate da una distanza d. Trovare il punto (o i punti= in cui il campo elettrico dovuto alle due cariche è nullo.



Soluzione: Per determinare il campo generato dalle due cariche applichiamo il principio di sovrapposizione, il quale stabilisce che il campo risultante è la somma vettoriale dei campi generati dalle singole cariche. La carica q_1 è posta nell'origine del sistema di riferimento. La soluzione andrà cercata ad una distanza maggiore di d, perché solo in questa semiretta i due vettori campo elettrico hanno versi contrari (ricordiamo che le linee di campo escono da una carica positiva ed entrano in una negativa). Calcoliamo la somma dei due campi, lungo l'asse orizzontale, e la uguagliamo a zero, indicando con x la distanza incognita alla quale i campi si annullano.

$$k_0 \frac{-5q}{|d+x|^2} + k_0 \frac{2q}{x^2} = 0$$

risolvendo e dividendo per $k_0 q$, si ha

$$-5x^2 + 2\left(d^2 + x^2 + 2dx\right) = 0$$

da cui

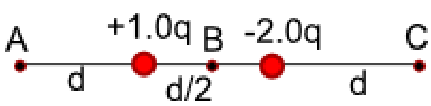
$$3x^2 - 4dx - 2d^2 = 0$$

le cui soluzioni saranno

$$x = \frac{2d \pm d\sqrt{10}}{3}$$

per le osservazioni precedenti, la soluzione sarà $x = d\left(\frac{2+\sqrt{10}}{3}\right) = 1.7d$.

Exercise 39. Nella figura le cariche $+1.0q$ e $-2.0q$ sono poste a una distanza d l'una dall'altra. Trovare **E** nei punti A, B, C.



Soluzione: Calcoliamo il campo totale prodotto dalle due cariche nel punto A

$$E_A = k_0 \frac{q}{d^2} + k_0 \frac{-2q}{4d^2} = k_0 \frac{q}{2d^2}$$

diretto verso sinistra,
Calcoliamo ora nel punto B

$$E_B = k_0 \frac{4q}{d^2} + k_0 \frac{8q}{d^2} = k_0 \frac{12q}{d^2}$$

verso destra (entrambi i campi sono diretti verso destra e si sommano)
Campo nel punto C

$$E_C = k_0 \frac{q}{4d^2} + k_0 \frac{-2q}{d^2} = -k_0 \frac{7q}{4d^2}$$

verso sinistra, campi in versi opposti.

Exercise 40. Due cariche puntiformi di intensità $q_1 = 2.0 \cdot 10^{-8}\,C$ e $q_2 = -4.0 q_1$ sono distanti tra loro $50\,cm$. Trovare il punto sull'asse che le congiunge in cui il campo è nullo.

Soluzione: Anche in questo caso il punto non può stare sul segmento avente per estremi le due cariche, perché in tutti questi punti i due campi hanno lo stesso verso. Fissiamo il riferimento nella carica q_1 e indichiamo con x la distanza a partire dal riferimento.

$$E_{tot} = k_0 \frac{2.0 \cdot 10^{-8}}{|x|^2} - k_0 \frac{8.0 \cdot 10^{-8}}{|x - 0.5|^2} = 0$$

dividendo per $2k_0 \cdot 10^{-8}$ e svolgendo si ottiene

$$(x - 0.5)^2 - 4x^2 = 0$$

da cui

$$x^2 - x + 0.25 - 4x^2 = 0$$

cioè

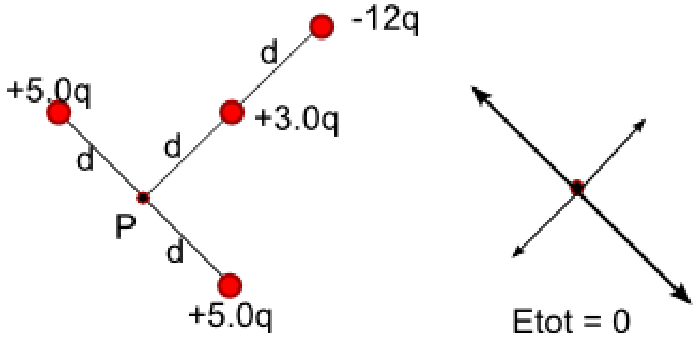
$$3x^2 + x - 0.25 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{6} = \begin{matrix} \frac{1}{6} = 0.17\,cm \\ \\ -0.5\,cm \end{matrix}$$

per quanto detto, la soluzione accettabile sarà $x = 0.5\,cm$, alla sinistra di q_1.

Exercise 41. Trovare il campo elettrico nel punto P con la distribuzione di cariche mostrata in figura.



Soluzione: Abbiamo tre cariche positive con linee di campo uscenti dalle cariche e una carica negativa con linee entranti. Lo schema a fianco della figura indica, non in scala, i vettori campo elettrico. Dallo schema è chiaro che il campo risultante è uguale alla somma dei campi prodotti dalle cariche $+3.0q$ e $-12q$, perché gli altri due si annullano in P. Lo stesso vale per i campi prodotti dalle altre due cariche perché il rapporto tra le cariche è 4 e quello tra il quadrato delle distanze da P è pure uguale a 4. Si ottiene anche dal calcolo

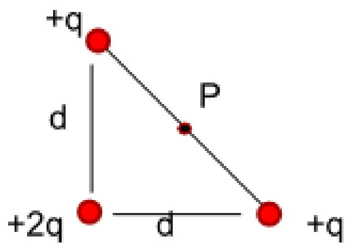
$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{d^2} - \frac{12}{4d^2} \right) = 0$$

Exercise 42. Ad ogni vertice di un triangolo equilatero di lato $20\,cm$ è collocato un elettrone. Trovare il modulo del campo elettrico nei punti medi dei lati.

Soluzione: il campo totale è quello prodotto dall'elettrone che sta di fronte ad ogni lato e che ha come estremi due elettroni. La sua distanza dal punto medio è pertanto pari all'altezza del triangolo equilatero, cioè $10\sqrt{3} = 17\,cm$.

$$E = 8.99 \cdot 10^9 \, \frac{Nm^2}{C^2} \times \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,C}{0.17^2\,m^2} = 5.0 \cdot 10^{-8}\,\frac{N}{C}$$

Exercise 43. Calcolare la direzione e l'intensità del campo elettrico nel punto P in figura



Soluzione: Le cariche sono disposte nei vertici di un triangolo rettangolo isoscele e, per le proprietà di tale figura, il punto P, posto nel punto medio dell'ipotenusa è anche il piede dell'altezza ad essa relativa. La lunghezza dell'ipotenusa è, per il th. di Pitagora uguale a $d\sqrt{2}$ e l'altezza ad essa relativa è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa. Tutte le cariche sono positive e i campi sono tutti uscenti. Nel punto P i campi generati dalle due cariche $+q$ saranno uguali e con versi opposti e la loro somma sarà, pertanto, nulla. Il campo totale è quindi quello generato dalla carica $2q$

$$E = k_0 \frac{2q}{\left(d\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 d^2}$$

la direzione è quella dell'altezza relativa all'ipotenusa e il verso è quello uscente.

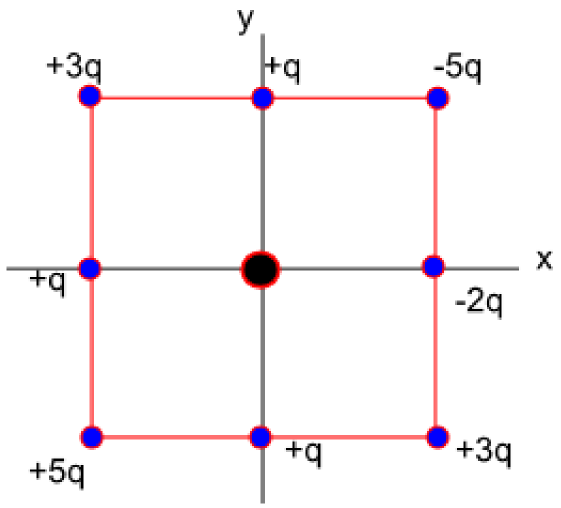
Exercise 44. Tre cariche sono poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato a. Agli estremi del segmento di base vi sono due cariche uguali a $+1.0\,\mu C$; nel vertice opposto è collocata una carica incognita Q. Trovare il valore di q affinché il campo elettrico generato dalle tre cariche nel baricentro del triangolo sia nullo.

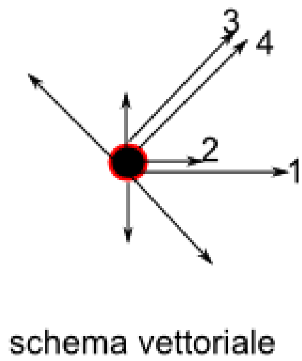
Soluzione: Calcoliamo il campo generato nel baricentro che dista da ogni carica due terzi dell'altezza, cioè $\frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$$E = 8.99 \cdot 10^9 \frac{1.0 \cdot 10^{-6}}{\frac{a^2}{3}} = \frac{26970}{a^2}$$

I due vettori formano un angolo di 120° e il loro vettore somma sarà pure uguale allo stesso valore (disegnando i due vettori uguali e applicando la regola del parallelogramma si ottiene un rombo, la cui diagonale maggiore è appunto il vettore somma. La carica Q deve essere pertanto uguale alle due cariche poste alla base.

Exercise 45. In figura, quattro cariche sono ai vertici di un quadrato e altre quattro cariche sono poste nei punti intermedi dei lati del quadrato. La distanza tra le cariche adiacenti lungo il perimetro del quadrato è d. Trovare intensità e direzione del campo elettrico nel centro del quadrato.





Soluzione: Come si vede dalla figura a destra i campi le cariche $+3q$ e $+q$ producono campi nel centro del quadrato di uguale intensità ma di segno opposto, annullandosi reciprocamente. Il campo elettrico sarà quindi dato dalla somma dei vettori dei campi prodotti dalle cariche $\pm 5q$ e $+q$, $-2q$.

$$E_{1+2} = k_0 \left(\frac{q}{\frac{d^2}{4}} + \frac{2q}{\frac{d^2}{4}} \right) = k_0 \left(\frac{4q + 8q}{d^2} \right) = \frac{12qk_0}{d^2}$$

il campo è diretto lungo l'asse x;

$$E_{3+4} = 2k_0 \frac{5q}{\frac{d^2}{2}} = 20k_0 \frac{q}{d^2}$$

diretto lungo la diagonale del quadrato formante un angolo di 45° con l'asse x. Per trovare il modulo del vettore risultante, possiamo trovare le componenti dei due vettori lungo gli assi x, y. Il campo E_{1+2} ha solo la componente x; il campo E_{3+4} forma con l'asse x un angolo di 45°, per cui le sue componenti saranno entrambe uguali a $\frac{20}{\sqrt{2}}$. Sommando le componenti otteniamo il vettore risultante

$$\begin{aligned} E_{ris}^x &= \frac{k_0 q}{d^2} \left(\frac{20}{\sqrt{2}} + 12 \right) = 26 \frac{k_0 q}{d^2} \\ E_{ris}^y &= \frac{k_0 q}{d^2} \frac{20}{\sqrt{2}} = 14 \frac{k_0 q}{d^2} \end{aligned}$$

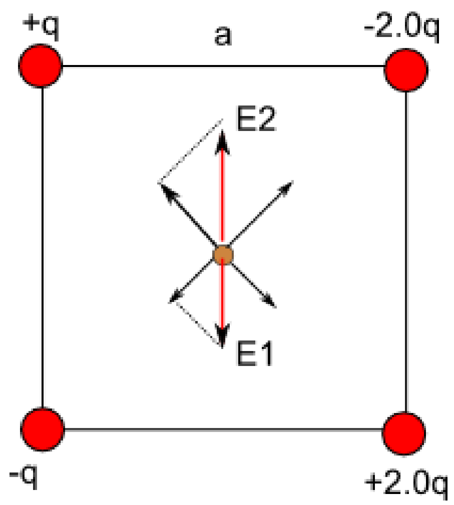
Il modulo del vettore risultante sarà

$$E_{ris} = \sqrt{26^2 + 14^2} = 29.5 \frac{k_0 q}{d^2}$$

l'angolo che si tale forma con l'asse orizzontale sarà

$$\alpha = \arctan \left(\frac{14}{26} \right) = 28°$$

Exercise 46. Determinare l'intensità e la direzione del campo elettrico nel punto centrale di un quadrato. Si assuma $q = 1.0 \cdot 10^{-8}\, C$ e $a = 5.0\, cm$.



Soluzione: (Proponiamo un metodo risolutivo basato quasi esclusivamente sulla geometria della disposizione delle cariche e sulle proprietà della stessa e delle figure formate dai vettori campo elettrico). La figura mostra la disposizione delle cariche e i vettori campo elettrico (in rosso le risultanti). I moduli dei campi generati dalle cariche di valore doppio hanno un valore doppio. I vettori risultanti, in rosso, avranno modulo uno doppio dell'altro (infatti, raddoppiando il lato di un quadrato, raddoppia pure la sua diagonale). Il campo elettrico risultante sarà quindi diretto lungo il semiasse verticale positivo e avrà valore uguale alla differenza tra i due campi, cioè al modulo del campo E_1. La distanza delle quattro cariche dal centro del quadrato è $d = 5\frac{\sqrt{2}}{2}\,cm = 3.5\,cm$

$$E_1 = 8.99 \cdot 10^9 \times \left(\frac{1.0 \cdot 10^{-8}\,C}{0.035^2\,m^2}\right) \times \sqrt{2} = 1.04 \cdot 10^5\,\frac{N}{C}$$

Example 47. Tre cariche positive eguali $q_1 = q_2 = q_3 = q$ sono fisse nei vertici di un triangolo equilatero di lato l. Calcolare la forza elettrica agente su ognuna delle cariche e il campo elettrostatico nel centro del triangolo.

Soluzione: Per calcolare la forza che agisce su una delle cariche, ad esempio su q_3, calcoliamo i campi $\mathbf{E}_1$, e $\mathbf{E}_2$ prodotti da q_1, e q_2 nel punto P_3 (la carica q_3 funge da carica di prova). Essendo q_3 equidistante da q_1 e q_2, in modulo

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

I due campi sono disposti simmetricamente rispetto all'asse y e quindi le loro componenti lungo l'asse x, eguali ed opposte, si annullano nella somma; invece le componenti lungo l'asse y, eguali e concordi, sommandosi danno il modulo

$$E = E_{1,y} + E_{2,y} = \frac{2q\cos 30^\circ}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$$

lo stesso risultato si può ottenere da

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos 60^\circ$$

La forza $\mathbf{F}$ che agisce su $q_3 = q$ vale

$$F = q_3 E = \frac{q\sqrt{3}}{4\pi\varepsilon_0 l^2} u_y$$

Il vincolo che tiene ferma ciascuna carica deve esercitare una forza eguale e contraria. Il centro C del triangolo equilatero è equidistante dai vertici, per cui i moduli dei campi $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ generati dalle tre cariche eguali nel centro sono eguali. I tre vettori sono disposti come i lati di un triangolo equilatero e quindi

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = 0$$

Il campo nel centro è nullo. Se ponessimo in C una carica, essa non risentirebbe di alcuna forza e resterebbe in equilibrio (instabile).

4. Campo elettrico generato da un dipolo elettrico

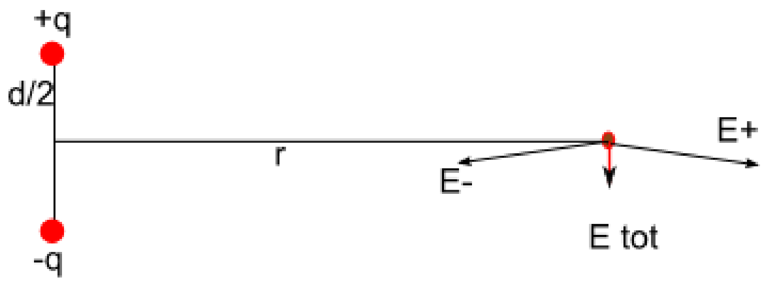
Un dipolo elettrico è una disposizione di due cariche della stessa intensità, ma di segno opposto, separate da una distanza fissa d.

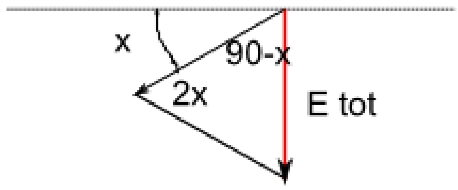
Exercise 48. Calcolare il momento di dipolo elettrico di un elettrone e di un protone posti a una distanza di $4.30\,nm$.

Soluzione: Il momento di dipolo è un vettore il cui modulo è dato dal prodotto qd, cioè tra la carica e la distanza che le separa e la cui direzione è quella della retta congiungente, lungo la quale viene calcolata la distanza. Il momento caratterizza una tale configurazione e il campo elettrico da esso generato è considerato in punti che si trovano a distanza molto maggiori della separazione tra le cariche.
Il protone e l'elettrone hanno cariche uguali ma di segno opposto e il momento di dipolo sarà

$$p = qd = 1.602 \cdot 10^{-19}\,C \times 4.30 \cdot^{-9}\ m = 6.89 \cdot 10^{-28}\,Cm$$

Exercise 49. Calcolare l'intensità e la direzione del campo elettrico generato da un dipolo elettrico, in un punto P situato a una distanza $r \gg d$ lungo l'asse perpendicolare al segmento che unisce le cariche.





Soluzione: l'approssimazione indicata è quella che caratterizza il calcolo del campo generato da un dipolo. In questo caso il punto non lungo l'asse del dipolo, ma lungo l'asse della distanza che separa le due cariche. Indichiamo con x l'angolo che il vettore E_- forma con l'asse; la figura mostra il modello geometrico con i valori degli angoli. Pertanto il campo E_{tot} sarà calcolabile applicando il teorema dei seni

$$\frac{E_-}{\sin(90-x)} = \frac{E_{tot}}{\sin 2x}$$

da cui

$$E_{tot} = E_- \frac{2\sin x \cos x}{\cos x} = 2E_- \sin x$$

ma $\sin x = \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{4}+r^2\right)}}$; calcoliamo ora il campo elettrico nel punto P, sapendo che la distanza di P dalle cariche è determinata applicando il teorema di Pitagora $dist^2 = \frac{d^2}{4} + r^2$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\frac{d^2}{4} + r^2}$$

da cui

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2q}{\frac{d^2}{4} + r^2} \times \frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{\left(\frac{d^2}{4} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

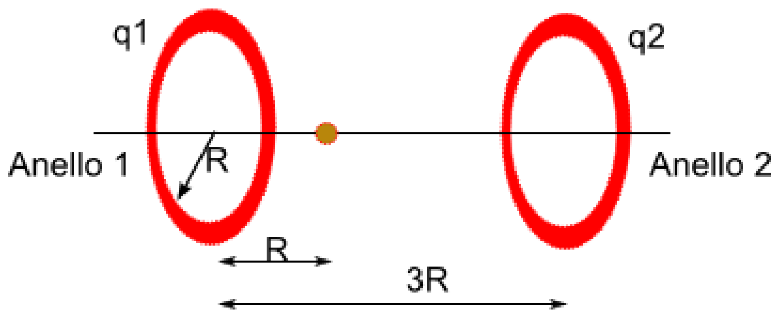
applicando l'approssimazione indicata $r \gg d$, si può riscrivere

$$E_{tot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd}{r^3}$$

il campo sarà diretto, come mostrato in figura, parallelamente alla retta congiungente le due cariche.

5. Campo elettrico generato da una carica lineare

Exercise 50. La figura mostra due anelli di raggio R non conduttori paralleli e normali a un asse su cui sono centrati. L'anello 1 ha carica puntiforme q_1 e l'anello 2 ha carica uniforme q_2. La distanza tra gli anelli è $3R$. Si osserva campo elettrico nullo nel punto P sull'asse a distanza R dall'anello 1. Trovare il rapporto tra le due cariche.



Soluzione: Il campo elettrico generato da una distribuzione lineare di carica su un anello isolante è dato da

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0 \left(z^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dove z è la distanza lungo l'asse, $d^2 = z^2 + R^2$ è la distanza di ogni segmento di anello dal punto P. per l'anello 1, avremo, applicando il teorema di Pitagora,

$$d_1^2 = 2R^2$$

mentre per l'anello 2

$$d_2 = 5R^2$$

il campo totale sarà quindi

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 R}{\left(2R^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q_2 R}{\left(5R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

il campo si annulla se

$$\frac{q_1}{2\sqrt{2}R^2} = \frac{2q_2}{5\sqrt{5}R^2}$$

da cui

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{5\sqrt{5}R^2} \times 2\sqrt{2}R^2 = 0.51$$

Exercise 51. Trovare la distanza lungo l'asse centrale di un anello di raggio R r carica uniforme, alla quale l'intensità del campo elettrico raggiunge un massimo.

Soluzione: [Questo esercizio è risolvibile solo da coloro che hanno già affrontato lo studio dell'analisi matematica]. La funzione $E(z)$ che esprime il campo elettrico in funzione della distanza z assume un valore di massimo quando la sua derivata si annulla. Pertanto,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{z}{\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right) = 0$$

riscriviamo

$$\frac{d}{dz}\left(z\left(z^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$\left(z^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}z\left(z^2+R^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z = 0$$

$$\left(z^2+R^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left[1 - \frac{3z^2}{z^2+R^2}\right] = 0$$

ma $z^2 + R^2$ è sempre positivo, per cui

$$1 - \frac{3z^2}{z^2+R^2} = \frac{z^2+R^2-3z^2}{z^2+R^2} = 0$$

una frazione è nulla se lo è il numeratore

$$2z^2 = R^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R}{\sqrt{2}}$$

Exercise 52. Un elettrone viene fissato sull'asse centrale dell'anello di carica q e raggio R. Si mostri che la forza elettrostatica esercitata sull'elettrone può farlo oscillare attorno al centro dell'anello con una frequenza angolare di

$$\omega = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

dove q è la carica dell'anello ed m la massa dell'elettrone.

Soluzione: Il campo elettrico in un punto sull'asse dell'anello carico uniformemente è dato da

$$E = \frac{qz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Se la carica dell'anello q è positiva, nei punti sopra l'anello il campo è diretto verso l'alto e in quelli sotto verso il basso. Assumiamo come positiva la direzione verso l'alto. La forza che agisce su un elettrone sull'asse è

$$F = -\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0\left(z^2+R^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

se consideriamo $z \ll R$, allora si può riscrivere

$$F = -\frac{eqz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$

L'elettrone ha una carica negativa e la forza elettrica è attrattiva e tende a tirare l'elettrone verso il punto di equilibrio $z = 0$. Dalla relazione si osserva, inoltre, che il modulo della forza è direttamente proporzionale a z, e tale forza può essere vista come una forza elastica del tipo $F = -kx$, come se l'elettrone fosse collegato a una molla con costante elastica $k = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$. L'elettrone si muoverà, quindi di moto armonico semplice con frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 m R^3}}$$

Exercise 53. Un disco di raggio $2.5\,cm$ ha densità di carica superficiale di $5.3\,\mu C/m^2$ sulla faccia superiore. Trovare il modulo del campo elettrico generato dal disco nel punto sul suo asse centrale a distanza $z = 12\,cm$ dal disco.

Soluzione: Il campo elettrico generato da un disco con una distribuzione uniforme della carica è espresso da

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right)$$

dove σ è la carica superficiale, R il raggio del disco e z la distanza sull'asse del disco dove viene calcolato il campo. Sostituendo

$$E = \frac{5.3 \cdot 10^{-6}\,\frac{C}{m^2}}{2 \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}\left(1 - \frac{0.12\,m}{\sqrt{0.12^2 + 0.025^2}\,m}\right) = 6293\,\frac{N}{C}$$

Exercise 54. Un elettrone viene lasciato libero da fermo in un campo elettrico uniforme di intensità $2.00 \cdot 10^4\,N/C$. Calcolare l'accelerazione dell'elettrone, trascurando la gravità.

Soluzione: Il campo elettrico genera una forza

$$F = eE = 1.602 \cdot 10^{-19}\,C \times 2.00 \cdot 10^4\,\frac{N}{C} = 3.20 \cdot 10^{-15}\,N$$

l'accelerazione sarà quindi, dalla seconda legge di Newton,

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3.20 \cdot 10^{-15}\,N}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 3.51 \cdot 10^{15}\,\frac{m}{s^2}$$

Exercise 55. Un elettrone viene accelerato verso est a $1.80 \cdot 10^9\,\frac{m}{s^2}$ da un campo elettrico. Determinare l'intensità e la direzione del campo elettrico.

Soluzione: Nota la massa dell'elettrone, è possibile conoscere la forza che ha prodotto tale accelerazione e da essa, si ottiene poi il campo.

$$E = \frac{F}{e} = \frac{m_e a}{e} = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \times 1.80 \cdot 10^9\,\frac{m}{s^2}}{1.602 \cdot 10^{-19}\,C} = 1.02 \cdot 10^{-2}\,\frac{N}{C}$$

l'elettrone viene accelerato verso est, la forza è repulsiva e il campo è pertanto generato da una carica negativa ed è diretto nella stessa direzione, ma in verso opposto.

Exercise 56. Calcolare il modulo della forza dovuta a un dipolo elettrico di momento $3.6 \cdot 10^{-29}\,C \cdot m$, agente su un elettrone distante $25\,nm$ dal centro del dipolo sul suo asse. Questa distanza si può considerare grande rispetto alle dimensioni del dipolo.

Soluzione: Il campo elettrico generato da un dipolo è dato da $E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{z^3}$, dove $p = qd$, d distanza tra le due cariche che formano il dipolo, è il momento di dipolo e z la distanza presa sull'asse del dipolo stesso. La forza è data da $F = Ee$, dove e è la carica dell'elettrone. Allora

$$F = \frac{1.602 \cdot 10^{-19}\,C}{2\pi \times 8.85 \cdot 10^{-12}\,\frac{C^2}{Nm^2}}\frac{3.6 \cdot 10^{-29}\,C \cdot m}{\left(25 \cdot 10^{-9}\,m\right)^3} = 6.64 \cdot 10^{-15}\,N$$

Exercise 57. In aria umida si provoca una scarica (le molecole si ionizzano) quando il campo elettrico raggiunge il valore $3.0 \cdot 10^6\,N/C$. Trovare, in quel campo, l'intensità della forza elettrostatica su un elettrone e su uno ione mancante di un singolo elettrone.

Soluzione: La forza elettrica è data da $F = Ee$, quindi

$$F = 3.0 \cdot 10^6 \, \frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19} \, C = 4.8 \cdot 10^{-13} \, N$$

le secondo caso la forza sarà la stessa perché lo ione ha un eccesso di una carica positiva, il cui valore è uguale a quello dell'elettrone.

Exercise 58. Una particella α, nucleo dell'atomo di elio, ha una massa di $6.64 \cdot 10^{-27} \, kg$ e una carica uguale a $+2e$. Trovare l'intensità e la direzione del campo elettrico tale da bilanciare il suo peso.

Soluzione: Il peso della particella α è bilanciato dalla forza esercitata dal campo elettrico in verso opposto se

$$E = \frac{F_g}{2e} = \frac{6.64 \cdot 10^{-27} \, kg \times 9.81 \, \frac{m}{s^2}}{2 \times 1.602 \cdot 10^{-19} \, C} = 2.03 \cdot 10^{-7} \, \frac{N}{C}$$

Exercise 59. Un ammasso di nuvole cariche produce un campo elettrico nell'aria vicino alla superficie terrestre. Una particella con carica $-2.0 \cdot 10^{-9} \, C$ subisce una forza elettrostatica tendente verso il basso di $3.0 \cdot 10^{-6} \, N$ quando viene posta in questo campo. Trovare (a) l'intensità del campo elettrico; (b) l'intensità e la direzione della forza elettrostatica esercitata su un protone posto in questo campo; (c) la forza gravitazionale esercitata sul protone; (d) il rapporto tra la forza elettrostatica e la forza gravitazionale.

Soluzione: (a) L'intensità del campo elettrico è data da

$$E = \frac{F}{e} = \frac{3.0 \cdot 10^{-6} \, N}{2.0 \cdot 10^{-9} \, C} = 1.5 \cdot 10^3 \, \frac{N}{C}$$

(b) la carica di un protone è uguale a quella di un elettrone ed è pari a $1.602 \cdot 10^{-19} \, C$; in questo campo la forza sarà

$$F = Ee^+ = 1.5 \cdot 10^3 \, \frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19} \, C = 2.4 \cdot 10^{-16} \, N$$

tale forza sarà diretta verso l'alto, cioè sarà repulsiva
(c) la forza gravitazionale esercitata sul protone è

$$F_G = mg = 1.67 \cdot 10^{-27} \, kg \times 9.81 \, \frac{m}{s^2} = 1.6 \cdot 10^{-26} \, N$$

(d) il rapporto tra le due forze è dato da

$$\frac{F_e}{F_G} = \frac{2.4 \cdot 10^{-16} \, N}{1.6 \cdot 10^{-26} \, N} = 1.5 \cdot 10^{10}$$

Exercise 60. Un campo elettrico **E** con un'intensità media di circa $150 \, N/C$ è diretto verso il basso nell'atmosfera vicino alla superficie terrestre. Si vuole ■far galleggiare■ in questo campo una sfera di zolfo con peso $4.4 \, N$, caricando la sfera. Trovare la carica (segno e intensità) necessaria e indicare perché l'esperimento non può riuscire.

Soluzione: Se la sfera deve ■galleggiare■ allora la forza prodotta dal campo elettrico deve essere pari al suo peso. Quindi, da $E = \frac{F}{q}$, avremo

$$q = \frac{F}{E} = \frac{4.4 \, N}{150 \, \frac{N}{C}} = 0.029 \, C$$

essendo il campo diretto verso il basso, la carica sorgente ha segno positivo e la carica della sfera dovrà avere segno negativo per subire una forza attrattiva verso l'alto.
Esprimiamo il campo elettrico come $E = \frac{F}{q} = k_0 \frac{Q}{r^2}$ e la massa della sfera attraverso la sua densità

$$\rho_{zolfo} = \frac{m}{V} = \frac{\frac{4.4 \, N}{9.8 \, \frac{m}{s^2}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{0.11}{r^3}$$

ma la densità della zolfo è $\rho_{zolfo} = 2100 \, \frac{kg}{m^3}$, per cui

$$r = \sqrt[3]{\frac{0.11}{2100}} = 0.04 \, m$$

e il campo elettrico sarà

$$E = k_0 \frac{Q}{r^2} = 8.99 \cdot 10^9 \times \frac{0.029}{(0.04)^2} = 1.62 \cdot 10^{11} \, \frac{N}{C}$$

un'intensità troppo alta per un campo atmosferico.

Exercise 61. Trovare l'accelerazione di un elettrone in un campo elettrico uniforme di $1.40 \cdot 10^6\, N/C$ e il tempo affinché l'elettrone, partendo da fermo, raggiunga una velocità pari a un decimo di quella della luce. Trovare infine la distanza percorsa durante questo intervallo di tempo.

Soluzione: La risoluzione richiede l'utilizzo delle leggi della cinematica del moto uniformemente accelerato. Il campo elettrico produce sull'elettrone una forza sull'elettrone di carica e

$$F = Ee = 1.40 \cdot 10^6\, \frac{N}{c} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\, C = 2.24 \cdot 10^{-13}\, N$$

La seconda legge di Newton afferma che l'accelerazione è direttamente proporzionale alla forza applicata e inversamente proporzionale alla massa del corpo accelerato

$$F = ma \quad \rightarrow \quad a = \frac{F}{m_e} = \frac{2.24 \cdot 10^{-13}\, N}{9.11 \cdot 10^{-31}\, kg} = 2.46 \cdot 10^{17}\, \frac{m}{s^2}$$

se l'elettrone parte da fermo, $v_i = 0$, supponendo che il moto sia uniformemente accelerato, la velocità finale è data da

$$v_f = v_i + at$$

sostituendo i valori e considerando la velocità della luce $c = 3.00 \cdot 10^8\, \frac{m}{s}$, si ha

$$t = \frac{v_f}{a} = \frac{3.00 \cdot 10^7\, \frac{m}{s}}{2.46 \cdot 10^{17}\, \frac{m}{s^2}} = 1.22 \cdot 10^{-10}\, s$$

e la distanza percorsa sarà

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0.5 \times 2.46 \cdot 10^{17}\, \frac{m}{s^2} \times \left(1.22 \cdot 10^{-10}\, s\right)^2 = 1.83 \cdot 10^{-3}\, m$$

Exercise 62. Una goccia d'acqua sferica di $1.20\, \mu m$ di diametro viene mantenuta in equilibrio nell'aria calma con un campo elettrico atmosferico $E = 462\, N/C$, tendente verso il basso. Trovare il peso della goccia e il numero di elettroni che determinano la sua carica in eccesso.

Soluzione: Il campo elettrico di una carica positiva è uscente e tale carica, generatrice del campo, attrae la carica in eccesso negativa verso l'alto. Se la goccia rimane in equilibrio, allora tale forza è equilibrata dal peso della goccia stessa, per cui

$$F_e = P = mg$$

La massa della goccia si può ricavare dal suo volume e dalla densità dell'acqua

$$m = \rho V = 1000\, \frac{kg}{m^3} \times \frac{4}{3}\pi \left(0.60 \cdot 10^{-6}\, m\right)^3 = 9.05 \cdot 10^{-16}\, kg$$

il peso sarà pertanto

$$P = 9.05 \cdot 10^{-16}\, kg \times 9.81\, \frac{m}{s^2} = 8.88 \cdot 10^{-15}\, N$$

Possiamo ora ricavare la carica in eccesso sulla goccia conoscendo il campo elettrico e la forza da esso prodotta

$$q = \frac{F_e}{E} = \frac{8.88 \cdot 10^{-15}\, N}{462\, \frac{N}{C}} = 1.92 \cdot 10^{-17}\, C$$

il numero di elettroni sarà dato da

$$n = \frac{1.92 \cdot 10^{-17}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 120$$

Exercise 63. In un dato istante le componenti della velocità di un elettrone che si muove tra due piatti carichi e paralleli sono $v_x = 1.5 \cdot 10^5\, m/s$ e $v_y = 3.0 \cdot 10^3\, m/s$. Se il campo elettrico tra i due piatti è dato da $\mathbf{E} = (120\, N/C)\, \mathbf{j}$, trovare l'accelerazione dell'elettrone e la sua velocità quando la sua coordinata x è variata di $2.0\, cm$.

Soluzione: Il campo elettrico è diretto lungo l'asse y. La forza che accelera l'elettrone è data da

$$F = Ee = 120\,\frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\,C = 1.92 \cdot 10^{-17}\,N$$

diretta lungo l'asse verticale. L'accelerazione è pertanto diretta verso il basso

$$a = \frac{F}{m} = \frac{1.92 \cdot 10^{-17}\,N}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = \left(-2.11 \cdot 10^{13}\,\frac{m}{s^2}\right)\mathbf{j}$$

la variazione della velocità riguarderà la sola componente verticale. L'elettrone percorrerà $2.0\,cm$ in un tempo

$$t = \frac{s}{v_x} = \frac{0.020\,m}{1.5 \cdot 10^5\,\frac{m}{s}} = 1.33 \cdot 10^{-7}\,s$$

la velocità verticale diverrà

$$v_{yf} = v_{yi} + at = 3.0 \cdot 10^5\,\frac{m}{s} - 2.11 \cdot 10^{13}\,\frac{m}{s^2} \times 1.33 \cdot 10^{-7}\,s = -2.51 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$$

Exercise 64. Due grandi piatti di rame paralleli sono posti a una distanza di $5.0\,cm$ e instaurano un campo elettrico uniforme tra loro. Un elettrone viene rilasciato dal piatto carico negativamente nello stesso momento in cui un protone viene rilasciato dal piatto carico positivamente. Si trascuri l'azione tra le particelle e si determini la loro distanza dal piatto positivo quando si incrociano.

Soluzione: il protone emesso dal piatto positivo viene attratto dal piatto negativo e viceversa per l'elettrone. Il campo elettrico che determina la forza elettrica è lo stesso per entrambi. Le due particelle hanno la stessa carica ma si differenziano per la massa. La forza attrattiva è la stessa per entrambe le particelle per cui

$$Ee^- = m_e a_e \qquad Ee^+ = m_p a_p$$

da cui

$$\frac{a_e}{a_p} = \frac{m_p}{m_e} = \frac{1.67 \cdot 10^{-27}\,kg}{9.11 \cdot 10^{-31}\,kg} = 1.83 \cdot 10^3$$

le due particelle a parità di tempo percorreranno, quindi, distanze diverse; dalle loro leggi orarie si ottiene

$$s_e = \frac{1}{2}a_e t^2 \qquad s_p = \frac{1}{2}a_p t^2$$

il rapporto tra le distanze percorse è pari a $\frac{s_e}{s_p} = \frac{a_e}{a_p} = 1.83 \cdot 10^3$ mentre $s_e + s_p = 5.00$; sostituendo si ha

$$1831 s_p = 5.00 \qquad s_p = 2.73 \cdot 10^{-3}\,cm = 27\,\mu m$$

Exercise 65. Un pendolo viene sospeso al piatto più alto di due grandi piatti orizzontali. Il pendolo è composto da una sferetta isolante di massa m e carica $+q$ e da un filo isolante di lunghezza l. Trovare il periodo del pendolo se tra i due piatti si instaura un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$ caricando il piatto superiore (a cui è appeso il pendolo) negativamente e quello inferiore positivamente.

Soluzione: Sul pendolo agirà, oltre alla forza di gravità, anche la forza attrattiva del piatto superiore. Tale forza è data da $F = Eq$; il pendolo subirà quindi una accelerazione verso l'alto pari a $a = \frac{Eq}{m}$, diretta quindi come la gravità ma nel verso contrario. Pertanto il periodo di oscillazione sarà

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{Eq}{m}}}$$

Exercise 66. Un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, diretto verso l'alto, di intensità $2.00 \cdot 10^3\,N/C$, si instaura tra due piatti orizzontali caricando positivamente il piatto inferiore e negativamente quello superiore. I piatti hanno una lunghezza $L = 10.0\,cm$ e sono separati da una distanza $d = 2.00\,cm$. Un elettrone viene proiettato tra i due piatti dall'estremità sinistra di quello inferiore. La velocità iniziale v_0 dell'elettrone forma un angolo $\theta = 45°$ con il piatto inferiore e ha un'intensità di $6.00 \cdot 10^6\,m/s$. Determinare se l'elettrone colpirà uno dei due piatti e, in caso affermativo, quale piatto e a quale distanza dall'estremità sinistra.

Soluzione: In assenza del campo elettrico, l'elettrone percorrerebbe una traiettoria parabolica con gittata pari a

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{\left(6.00 \cdot 10^6\right)^2 \times 1}{9.81} = 3.67 \cdot 10^{12}\, m$$

e urterebbe il piatto superiore. Il campo elettrico diretto verso l'alto produce una forza che tende a portare l'elettrone verso l'alto; pertanto l'elettrone urterà il piatto superiore. Il moto verticale è determinato dall'azione della forza di gravità alla quale si oppone il campo elettrico. L'accelerazione verticale sarà

$$a = \frac{Ee}{m} - g = \frac{2.00 \cdot 10^3\, \frac{N}{C} \times 1.602 \cdot 10^{-19}\, C}{9.11 \cdot 10^{-31}\, kg} - 9.81\, \frac{m}{s^2} = 3.51 \cdot 10^{14}\, \frac{m}{s}$$

Poniamo l'origine delle nella posizione iniziale dell'elettrone e assumiamo come asse x quello orizzontale con verso positivo a destra e come asse y quello verticale e verso positivo in alto. Dalla cinematica conosciamo le equazioni che descrivono questo moto

$$x = v_0 \cos\theta t \qquad y = v_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} a t^2$$
$$v_y = v_o \sin\theta - at$$

Troviamo prima la distanza massima percorsa dall'elettrone in verticale. Se fosse minore di d, non colpirebbe il piatto superiore. Se fosse maggiore di d lo colpirebbe in un punto corrispondente a una distanza $x < L$. La massima coordinata verticale si ha quando $v_y = 0$, cioè $v_o \sin\theta - at = 0$, da cui $t = \frac{v_o \sin\theta}{a}$ e la distanza massima

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_o^2 \sin^2\theta}{a^2} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2a} = \frac{\left(6.00 \cdot 10^6\right)^2 \times \frac{1}{2}}{2 \times 3.51 \cdot 10^{14}} = 2.56 \cdot 10^{-2}\, cm$$

e ciò mostra che effettivamente l'elettrone urta il piatto superiore. Troviamo ora il tempo impiegato a percorre la distanza d. Essendo

$$\begin{aligned} d &= v_o \sin\theta t - \frac{1}{2} a t^2 \\ 2d &= 2 v_o \sin\theta t - a t^2 \end{aligned}$$

da cui

$$a t^2 - 2 v_o \sin\theta t + 2d = 0$$

dove $v_0 \sin\theta = 6.00 \cdot 10^6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4.24 \cdot 10^6$; sostituendo i valori e risolvendo rispetto a t, si ha

$$t = \frac{4.24 \cdot 10^6 \pm \sqrt{\left(4.24 \cdot 10^6\right)^2 - 2 \times 3.51 \cdot 10^{14} \times 0.02}}{3.51 \cdot 10^{14}} = \frac{4.24 \cdot 10^6 \pm 1.98 \cdot 10^6}{3.51 \cdot 10^{14}}$$

considerando solo la soluzione differenza $t = 6.43 \cdot 10^{-9}\, s$. In questo intervallo di tempo la distanza x percorsa è

$$x = v_0 \cos\theta \times t = 6.00 \cdot 10^6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 6.43 \cdot 10^{-9} = 2.73\, cm$$

6. Dipolo in un campo elettrico

Exercise 67. Un dipolo elettrico costituito da cariche di intensità $1.50\, nC$ separate da $6.20\, \mu m$ viene immerso in un campo elettrico di intensità pari a $110\, N/C$. Trovare il valore del momento di dipolo e la differenza tra le energie potenziali corrispondenti a orientamenti del dipolo parallelo e antiparallelo al campo.

Soluzione: Il momento di dipolo $p = qd$, è dato da

$$p = 1.50 \cdot 10^{-9}\, C \times 6.20 \cdot 10^{-6}\, m = 9.30 \cdot 10^{-15}\, C \cdot m$$

l'energia potenziale di un dipolo è data dal prodotto scalare tra il vettore campo elettrico e il momento di dipolo; il prodotto scalare può essere scritto come

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE\cos\theta$$

essa ha, pertanto, il suo valore massimo quando $\theta = 0$, cioè vettori paralleli, e minimo quando $\theta = 90°$, cioè vettori antiparalleli.

$$\Delta U = 2pE = 2 \times 9.30 \cdot 10^{-15}\, C \cdot m \times 110\, \frac{N}{C} = 2.05 \cdot 10^{-12}\, J$$

Exercise 68. Un dipolo elettrico è costituito dalle cariche $+2e$ e $-2e$ separate da una distanza di $0.78\,nm$. Esso viene immesso in un campo elettrico di intensità pari a $3.4\cdot10^{6}\,N/C$. Determinare il valore del momento torcente che agisce sul dipolo quando il momento di dipolo è parallelo, ortogonale e opposto al campo elettrico.

Soluzione: Il momento torcente di un dipolo elettrico è data dal prodotto vettoriale tra il momento di dipolo e il campo elettrico che genera la coppia di forze torcenti: $\overrightarrow{\tau}=\mathbf{p}\times\mathbf{E}$. Il momento di dipolo è dato da

$$p=qd=2\times1.602\cdot10^{-19}\times0.78\cdot10^{-9}=2.50\cdot10^{-28}\,C\cdot m$$

Calcoliamo il momento torcente nei tre casi indicati
momento di dipolo parallelo al campo $\theta=0$, $\tau=2.50\cdot10^{-28}\,C\cdot m\times3.4\cdot10^{6}\times0=0$
momento di dipolo ortogonale al campo $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\tau=2.50\cdot10^{-28}\,C\cdot m\times3.4\cdot10^{6}\times1=8.5\cdot10^{-22}\,J$
momento di dipolo opposto al campo $\theta=\pi$, $\tau=2.50\cdot10^{-28}\,C\cdot m\times3.4\cdot10^{6}\times0=0$