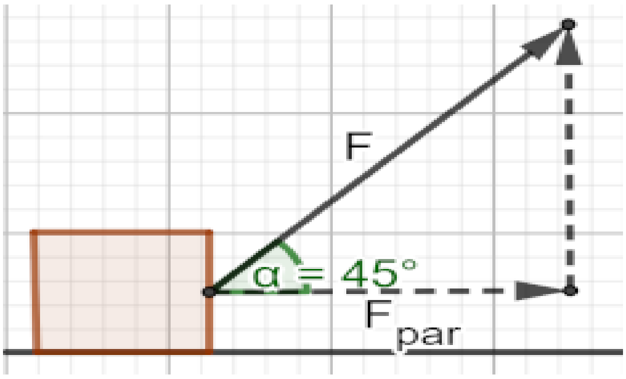
Lavoro ed Energia

Esercizi discussi e svolti dal prof. Gianluigi Trivia (scritto con Lyx)

Lavoro

Esercizio 1. Un uomo spinge un blocco di $30\,kg$ per $10\,m$ lungo un piano orizzontale a velocità costante con un a forza inclinata di 45° sull'orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico è $0,20$; trovare il lavoro che l'uomo fa sul blocco.



Soluzione. Il lavoro di una forza è dato dal prodotto scalare tra la forza applicata e lo spostamento compiuto sotto l'azione della forza stessa. In questo caso la forza che sposta il blocco è quella parallela alla direzione del moto (la componente perpendicolare è equilibrata dal peso del blocco). Poiché il corpo si muove di moto rettilineo uniforme (velocità costante), per la seconda legge della dinamica, la componente orizzontale di forza e parallela alla direzione del moto, è equilibrata dalla forza d'attrito che agisce nel verso opposto. Tale forza è data da

$$F_{at} = \mu P_{\perp} = 0,20 \times 30\,kg \times 9,81\,\frac{m}{s^2} = 58,9\,N = F_{par}$$

Il lavoro sarà quindi

$$W = F_{par}\Delta s = 58,9\,N \times 10\,m = 589\,J$$

ENERGIA CINETICA

Esercizio 2. Determinare l'energia cinetica posseduta da un razzo, completo del suo carico, di massa complessiva $2.9 \times 10^5\,kg$ quando raggiunge la velocità di fuga di $11.2\,km/s$.

Basta applicare la definizione di energia cinetica, con velocità di $11.2\,\frac{km}{s} = 11200\,\frac{m}{s}$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{2.9 \times 10^5\,kg \cdot \left(11200\,\frac{m}{s}\right)^2}{2} = 1.82 \times 10^{13}\,J$$

Esercizio 3. Un elettrone di conduzione (massa $m = 9.11 \times 10^{-31}\,kg$), che viaggia nel rame a una temperatura prossima allo zero assoluto, ha un'energia cinetica di $6.7 \times 10^{-19}\,J$. Trovare la sua velocità.

Applichiamo la relazione che definisce l'energia cinetica, risolvendola rispetto alla velocità:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

da cui,

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.7 \times 10^{-19}\,J}{9.11 \times 10^{-31}\,kg}} = 1.2 \times 10^6\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 4. Un'esplosione a livello del suolo lascia un cratere di diametro proporzionale all'energia dell'esplosione elevata a $\frac{1}{3}$: il cratere prodotto dall'esplosione di $1\,megaton$ di TNT ha il diametro di $1\,km$. Se un cratere di impatto ha un diametro di $50\,km$, calcolare l'energia cinetica spesa in questo impatto in megaton di TNT.

Soluzione. Traducendo quanto descritto nel problema in linguaggio matematico, si ha $d \propto \sqrt[3]{K}$. Se l'energia $K = 10^6\,ton\,TNT$, produce un diametro di $1\,km$, allora un diametro di $50\,km$ sarà stato prodotto da un'energia

$$K \propto d^3 \propto 50^3 \propto 1,25 \cdot 10^5\,Megaton\,TNT$$

Esercizio 5. Un protone (massa $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\,kg$) è accelerato in un acceleratore lineare. In ogni stadio gli viene impressa un'accelerazione, in linea retta, di $3.6 \cdot 10^{15}\,m/s^2$. Se un protone entra in uno stadio, di lunghezza totale $3.5\,cm$, con velocità iniziale di $2.7 \cdot 10^7\,m/s$, trovare la sua velocità all'uscita dallo stadio e il guadagno in energia cinetica dovuto all'accelerazione.

Il moto nei singoli tratti può essere considerato come moto uniformemente accelerato; le leggi di tale moto consentono di calcolare la velocità all'uscita dal tratto lineare

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

risolvendo, sostituendo i valori dati, si ha

$$v_f = \sqrt{(2.7 \cdot 10^7)^2\,\frac{m^2}{s^2} + 2 \cdot 3.6 \cdot 10^{15}\,\frac{m}{s^2} \cdot 3.5 \cdot 10^{-2}\,m} = 3.1 \cdot 10^7\,\frac{m}{s}$$

Il guadagno in energia cinetica è dato da

$$\Delta K = \frac{1}{2}m\left(v_f^2 - v_i^2\right) = 0.5 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27}\,kg\left[\left(3.1 \cdot 10^7\right)^2 - \left(2.7 \cdot 10^7\right)^2\right]\frac{m}{s} = 1.9 \cdot 10^{-13}\,J$$

Esercizio 6. Un padre che corre con il figlio ha un'energia cinetica pari alla metà di quella del figlio, la cui massa è metà di quella del padre. Questi accresce la propria velocità di $1\,m/s$, arrivando così ad avere la stessa energia cinetica del figlio. Determinare le loro velocità iniziali.

Esercizio di interpretazione del testo. Indichiamo con m_p la massa del padre e m_f quella del figlio. Sappiamo che $m_p = 2m_f$; chiamiamo poi K_p, K_f le energie cinetiche del padre e del figlio e $v_{i,p}$, v_f le rispettive velocità iniziali. Allora confrontando le energie cinetiche iniziali si ha

$$K_p = \frac{1}{2}K_f$$

cioè

$$\frac{1}{2}m_p v_{i,p}^2 = \frac{1}{4}m_f v_f^2$$

sostituendo la relazione tra le masse, si ha

$$m_f v_{i,p}^2 = \frac{1}{4}m_f v_f^2$$

da cui si ricava che

$$v_f = 2v_{i,p}$$

Dopo l'incremento di velocità da parte del padre, entrambi hanno la stessa energia cinetica

$$K_p = K_f \qquad cioè \qquad \frac{1}{2}m_p v_{f,p}^2 = \frac{1}{2}m_f v_f^2$$

sempre sostituendo la relazione tra le masse e

$$m_f v_{f,p}^2 = \frac{1}{2}m_f v_f^2$$

si ha, indicando con $v_{f,p} = v_{i,p} + 1$, la velocità finale del padre

$$(v_{i,p} + 1)^2 = \frac{1}{2}v_f^2$$

Ma introducendo la relazione tra le velocità iniziali del padre e del figlio, si avrà

$$(v_{i,p} + 1)^2 = \frac{4v_{i,p}^2}{2}$$

cioè

$$v_{i,p} + 1 = \sqrt{2}v_{i,p}$$

Risolvendo, si ha

$$v_{i,p}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 1$$

Da cui

$$\begin{aligned} v_{i,p} &= 2.4\,\frac{m}{s} \\ v_f &= 4.8\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

Esercizio 7. Da quale altezza dovrebbe cadere un'automobile per acquistare un'energia cinetica uguale a quella che avrebbe se viaggiasse alla velocità di $100\,\mathrm{km/h}$?

Soluzione. Trasformiamo prima la velocità in $\mathrm{m/s}$. $v = \frac{100}{3,6} = 27,8\,\mathrm{m/s}$. Dovendo raggiungere la velocità calcolata al termine della caduta, sapendo che $v_f = \sqrt{2gh}$, avremo

$$h = \frac{v_f^2}{2g} = \frac{27,8^2}{2 \times 9,81} = 39,4\,m$$

Esercizio 8. Un proiettile di $30\,g$ che viaggia inizialmente alla velocità di $500\,{}^{m}\!/_{s}$ penetra per $12\,cm$ in un blocco di legno. Trovare la forza media esercitata.

Soluzione. L'energia cinetica iniziale del proiettile è

$$K_i = \frac{1}{2} \times 30 \cdot 10^{-3} \times 500^2 = 3750\,J$$

Se il proiettile si ferma all'interno del blocco di legno, la sua energia cinetica finale sarà nulla. Pertanto la variazione di energia cinetica è uguale al lavoro compiuto dalla forza frenante

$$\Delta K = W = F\Delta s$$

da cui

$$F = \frac{\Delta K}{\Delta s} = \frac{3750\,J}{0,12\,m} = 31250\,N$$

Esercizio 9. Determinare l'energia cinetica associata alla rivoluzione della Terra attorno al Sole, sapendo che la Terra ha una massa $m_T = 5.98 \cdot 10^{24}\,kg$, il raggio medio dell'orbita terrestre $R = 1.50 \cdot 10^{11}\,m$ e il tempo di rivoluzione $T = 3.16 \cdot 10^{7}\,s$.

Soluzione. calcoliamo la velocità lineare della Terra nella sua orbita di rivoluzione

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 1.50 \cdot 10^{11}\,m}{3.16 \cdot 10^{7}\,s} = 29825\,\frac{m}{s}$$

L'energia cinetica sarà pertanto

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5.98 \cdot 10^{24}\,kg \cdot (29825)^2\,\frac{m}{s} = 2.7 \cdot 10^{33}\,J$$

Lavoro ed energia cinetica

Esercizio 10. Un oggetto di $102\,kg$ sta inizialmente muovendosi in linea retta alla velocità di $53\,m/s$. Per arrestarlo con una decelerazione di $2.0\,m/s^2$ determinare l'intensità della forza necessaria, la distanza percorsa durante il rallentamento e il lavoro fatto dalla forza rallentante.

Soluzione. La forza decelerante può essere ottenuta dalla seconda legge di Newton

$$F = ma = 102\,kg \cdot 2.0\,\frac{m}{s^2} = 204\,N$$

Il corpo, prima di fermarsi, ha un'energia cinetica di

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \cdot 102\,kg \cdot \left(53\,\frac{m}{s}\right)^2 = 143259\,J$$

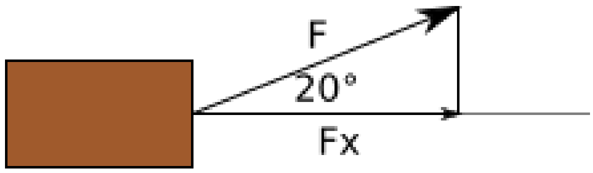
Il lavoro necessario ad arrestare il corpo è dato dalla variazione dell'energia cinetica del corpo

$$W = K_{fin} - K_{ini} = -143259\,J$$

La distanza sarà quindi

$$s = \frac{W}{F} = \frac{143259\,J}{204\,N} = 702\,m$$

Esercizio 11. Per spingere una cassa di $50\,kg$ su un pavimento privo di attrito un facchino applica una forza di $210\,N$ in una direzione inclinata di $20°$ sopra l'orizzontale. Durante lo spostamento di $3.0\,m$ trovare il lavoro fatto sulla cassa dal facchino; sulla cassa dal peso proprio della cassa e dalla forza normale esercitata dal pavimento sulla cassa. Determinare infine il lavoro totale sulla cassa.

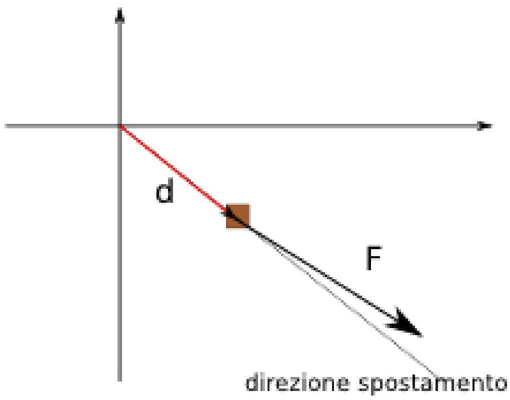


Soluzione. La figura sopra descrive il modo in cui si deve scomporre il vettore che descrive la forza applicata. Solo la componente F_x compie lavoro nello spostamento orizzontale (sul pavimento) della cassa; la componente verticale forma un angolo retto con la direzione dello spostamento e il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento risulta in questo caso nullo. Calcoliamo il lavoro fatto dal facchino tramite la forza F_x

$$W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} = Fs \cdot \cos 20° = 210\,N \cdot 3\,m \cdot \cos 20° = 592\,J$$

Le altre forze, essendo perpendicolari allo spostamento non compiono alcun lavoro mentre la cassa si sposta sul pavimento e il lavoro totale sarà pertanto quello del facchino (si trascura infatti l'attrito).

Esercizio 12. Un blocco di ghiaccio galleggiante è spinto lungo un molo diritto, per uno spostamento $\overrightarrow{d} = (15\,m)\,\overrightarrow{i} - (12\,m)\,\overrightarrow{j}$ da una corrente di marea che esercita sul blocco una forza $\overrightarrow{F} = (210\,N)\,\overrightarrow{i} - (150\,N)\,\overrightarrow{j}$. Trovare il lavoro sviluppato dall'acqua sul blocco nel corso dello spostamento.



Soluzione. La figura rappresenta, rispetto ad un piano cartesiano arbitrario, i vettori forza e spostamento. In questo caso è necessario calcolare la componente della forza lungo lo spostamento. Lo spostamento forma un angolo rispetto all'orizzontale (asse x) (prendiamo positivo il verso orario)

$$\beta_{spos} = \tan \frac{12}{15} = 38.7°$$

mentre la forza forma con l'orizzontale un angolo

$$\beta_F = \tan \frac{150}{210} = 35.5°$$

L'angolo tra i due vettori sarà pertanto di

$$\alpha = 38.7^\circ - 35.5^\circ = 3.2^\circ$$

Calcoliamo ora il modulo dello spostamento e della forza

$$s = \sqrt{144 + 225} = 19.2\,m \qquad F = \sqrt{210^2 + 150^2} = 258\,N$$

Il lavoro sarà pertanto

$$W = Fs\cos\alpha = 258\,N \cdot 19.2\,m \cdot \cos 3.2^\circ = 4946\,J$$

Esercizio 13. Un protone, partendo dallo stato di riposo, è accelerato in un ciclotrone a una velocità finale di $3.0 \cdot 10^6\,m/s$. Calcolare il lavoro, in eV, sviluppato sul protone dalla forza elettrica acceleratrice.

Soluzione 14. La variazione di energia cinetica del protone è legata alla variazione di velocità. L'energia cinetica iniziale è nulla, essendo la particella a riposo, mentre l'energia cinetica finale vale

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = 0.5 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot \left(3.0 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}\right)^2 = 7.5 \cdot 10^{-15}\,J$$

il fattore di trasformazione da Joule a elettronvolt è

$$1\,eV = 1.6 \cdot 10^{-19}\,J$$

per cui

$$K_f = \frac{7.5 \cdot 10^{-15}\,J}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\frac{J}{eV}} = 4.7 \cdot 10^3\,eV = 47\,keV$$

Esercizio 15. Una manichetta antincendio viene srotolata tirando orizzontalmente l'estremo libero su una superficie senza attrito alla velocità costante di $2.3\,m/s$. La massa di $1\,m$ di manichetta è $0.25\,kg$. Calcolare l'energia cinetica fornita per svolgere $12\,m$ di manichetta.

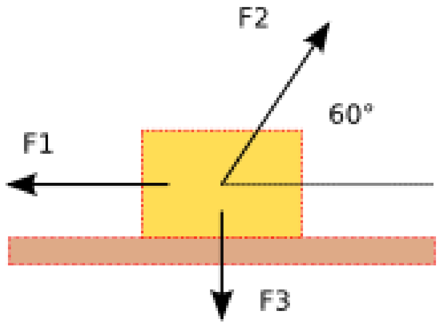
Soluzione. La massa totale della manichetta che viene srotolata è

$$m = 0.25\,\frac{kg}{m} \cdot 12\,m = 3\,kg$$

L'energia cinetica fornita è

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3\,kg \cdot \left(2.3\,\frac{m}{s}\right)^2 = 7.9\,J$$

Esercizio 16. La figura mostra tre forze applicate a un blocco che scivola su un piano lubrificato di $3.00\,m$ verso sinistra. I loro moduli sono: $F_1 = 5.00\,N$, $F_2 = 9.00\,N$, $F_3 = 3.00\,N$. Calcolare il lavoro netto svolto sulla cassa dalle tre forze durante lo spostamento.



Soluzione. La cassa si muove lungo la direzione orizzontale scorrendo senza attrito sul piano. Calcoliamo la risultante delle tre forze lungo la direzione orizzontale, supponendo positivo lo spostamento verso sinistra

$$\begin{aligned} F_1 &= 5.00\,N \\ F_2 &= \frac{9.00}{2} = -4.50\,N \\ F_3 &= 0\,N \end{aligned}$$

dove F_{2x} è calcolata tenendo conto che la sua proiezione sulla direzione orizzontale descrive un triangolo rettangolo metà di un triangolo equilatero, avente come lato F_2 e come semi lato F_{2x}. La risultante sarà allora

$$F = 0.50\,N$$

cioè la cassa si sposta verso sinistra sotto l'azione di una forza di modulo $0.5\,N$. Il lavoro netto è

$$W = Fs = 0.50\,N \cdot 3.00\,m = 1.50\,J$$

Esercizio 17. Una forza agisce su un corpo puntiforme di $3.0\,kg$ in modo tale che la posizione del corpo in funzione del tempo è data dalla espressione $x = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3$, con x in metri e t in secondi. Trovare il lavoro sviluppato dalla forza da $t = 0$ a $t = 4.0\,s$.

Soluzione. Il lavoro compiuto da una forza si traduce in variazione della sua energia cinetica, in questo caso. Calcoliamo quindi l'energia cinetica nei due istanti di tempo indicati, determinando la velocità con la quale il corpo si muove. La velocità è calcolabile tramite il limite del rapporto incrementale della funzione, cioè la derivata prima della stessa

$$\frac{ds}{dt} = v = 3t^2 - 8t + 3$$

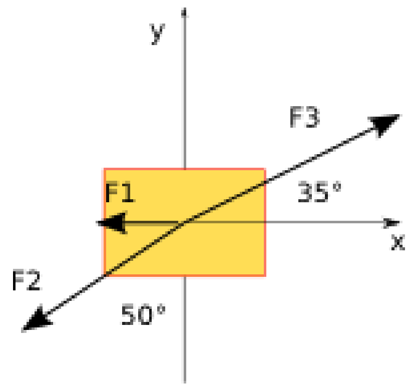
e nei due momenti indicati

$$\begin{aligned} v\,(0) &= 3\,\frac{m}{s} \\ v\,(4) &= 19\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

a queste velocità corrisponde una variazione dell'energia cinetica

$$W = \triangle E = \frac{1}{2}m\left(v^2\,(4) - v^2\,(0)\right) = \frac{1}{2} \cdot 3.0\,kg \cdot (361 - 9) = 528\,\mathrm{J}$$

Esercizio 18. In figura sono mostrate dall'alto tre forze orizzontali che agiscono su un corpo inizialmente fermo, ma che ora si muove su un piano privo di attrito. I moduli delle forze sono: $F_1 = 3.00\,N$, $F_2 = 4.00\,N$, $F_3 = 10.0\,N$. Trovare il lavoro svolto sul corpo dalle tre forze durante uno spostamento di $4.00\,m$.



Soluzione. il corpo si muove nel piano xy. Calcoliamo le componenti delle forze lungo i due assi

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -3.00\,N & F_{1y} &= 0 \\ F_{2x} = -4.00 \cdot \cos 40° &= -3.06\,N & F_{2y} &= -4.00 \cdot \cos 50° = -2.57\,N \\ F_{3x} = 10.0 \cdot \cos 35° &= 8.19\,N & F_{3y} &= 10.0 \cdot \cos 55° = 5.74\,N \end{aligned}$$

La forza risultante avrà componenti

$$\begin{aligned} F_x &= 2.13\,N \\ F_y &= 3.17\,N \end{aligned}$$

Il modulo della forza risultante è

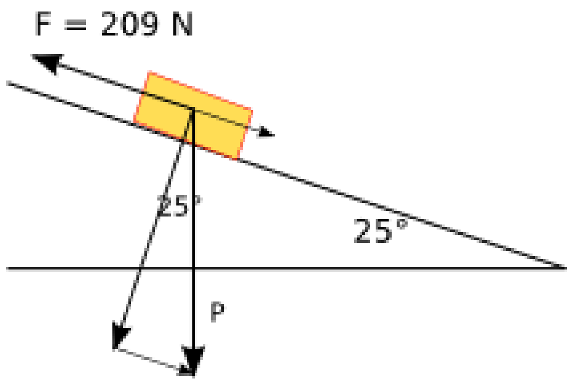
$$F = \sqrt{2.13^2 + 3.17^2} = 3.82\,N$$

Il lavoro sarà pertanto

$$W = 3.82\,N \cdot 4.00\,m = 15.28\,J$$

Lavoro svolto dalla forza peso

Esercizio 19. Per spingere una cassa di $25.0\,kg$ su un piano privo di attrito inclinato di $25°$ rispetto al piano orizzontale, si applica una forza di $209\,N$ parallela al piano inclinato. Trovare il lavoro sulla cassa per uno spostamento di $1.50\,m$ lungo il piano inclinato fatto dalla forza parallela, dal peso della cassa e dalla forza normale esercitata dal piano inclinato. Indicare infine il lavoro totale sviluppato sulla cassa.



Soluzione. Il peso della cassa vale $P = mg = 25.0\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 245\,N$. La componente parallela è

$$P_{par} = 245 \cdot \sin 25° = 104\,N$$

e la componente perpendicolare sarà

$$P_{per} = 245 \cdot \cos 25° = 222\,N$$

Per lo spostamento di $1.5\,m$, la forza applicata, presa con verso positivo, compie un lavoro (in questo caso la direzione dei due vettori, forza e spostamento, è la stessa)

$$W_F = 209\,N \cdot 1.5\,m = 314\,J$$

la forza esercitata dal piano inclinato sulla cassa è perpendicolare allo spostamento e il suo lavoro è pertanto nullo; il peso compie un lavoro resistente

$$W_P = 245\,N \cdot 1.5 \cdot \cos 115° = -155\,J$$

Il lavoro complessivo è quindi

$$W_{tot} = 314 - 155 = 159\,J$$

Esercizio 20. Un blocco di ghiaccio di $45\,kg$ scivola in basso lungo un piano inclinato lungo $1.5\,m$ e alto $0.91\,m$. Uno scaricatore spinge dal basso contro il blocco con una forza parallela al piano inclinato in modo da obbligarlo a scendere a velocità costante. Trovare la forza esercitata dallo scaricatore, il lavoro sviluppato sul ghiaccio dallo scaricatore, dal peso del blocco dalla forza normale esercitata dal piano sul blocco e dalla forza risultante.

Soluzione. in questo caso le informazioni che descrivono l'inclinazione del piano non sono assegnate mediante un angolo, ma sono desumibili dal rapporto tra altezza e lunghezza del piano stesso. Lo scaricatore si oppone parzialmente alla caduta del ghiaccio, impedendo che questa sia descritta da un moto uniformemente accelerato. Infatti il ghiaccio scivola con moto rettilineo uniforme. Il peso del blocco è

$$P = mg = 45\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 441\,N$$

Le sue componenti, parallele e perpendicolari, al piano inclinato sono;

$$\begin{aligned} P_{par} &= P\frac{h}{l} = 441\,N \cdot \frac{0.91\,m}{1.5\,m} = 268\,N \\ P_{per} &= \sqrt{P^2 - P_{par}^2} = \sqrt{441^2 - 268^2} = 350\,N \end{aligned}$$

Se il ghiaccio scende con moto rettilineo uniforme, la sua accelerazione è nulla; cioè il ghiaccio dopo una prima breve fase di caduta accelerata, scende senza più accelerazione per l'azione dello scaricatore; tale forza dovrà essere pertanto $F = -268\,N$. Tale scaricatore compirà un lavoro (forza e spostamento sono paralleli)

$$W = Fs = -268\,N \cdot 1.5\,m = -402\,N$$

Il peso compie lavoro solo nella sua componente parallela e sarà uguale al precedente, ma non resistente. La componente perpendicolare compie un lavoro nullo, essendo tale forza perpendicolare allo spostamento. Il lavoro della forza risultante sarà pure nullo, essendo la forza risultante, componente parallela della forza peso più la forza esercitata dallo scaricatore, nulla.

Esercizio 21. Un elicottero recupera dall'oceano un astronauta di $72\,kg$, sollevandolo di $15\,m$ sospeso a un cavo, con un'accelerazione pari a $g/10$. Trovare il lavoro fatto sull'astronauta dall'elicottero e dal suo peso. Determinare poi l'energia cinetica e la velocità dell'astronauta immediatamente prima di raggiungere l'elicottero.

Soluzione. Sull'astronauta agiscono due forze, la tensione del cavo e il peso. La risultante è una forza diretta verso l'alto che produce una accelerazione $g/10$. Il peso dell'astronauta è

$$P = mg = 72\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} = 706\,N$$

L'elicottero, attraverso il cavo, esercita una forza che, oltre a sovrastare il peso, sposta l'astronauta verso l'alto.

$$T + P = ma = 72\,kg \cdot 0.98\,\frac{m}{s^2} = 71\,N$$

La tensione sarà

$$T = 706 + 71 = 777\,N$$

Il lavoro compiuto dall'elicottero sarà quindi

$$W = 777\,N \cdot 15\,m = 11655\,J$$

Il peso compie invece un lavoro resistente

$$W = -706\,N \cdot 15\,m = -10590\,J$$

Se l'astronauta era inizialmente fermo, l'energia cinetica da esso acquistata è pari al lavoro svolto dalla forza risultante, cioè

$$K = 71\,N \cdot 15\,m = 1065\,J$$

La velocità si calcola dalla relazione che esprime l'energia cinetica, risolvendola rispetto a v:

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1065\,J}{72\,kg}} = 5.4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 22. Un blocco di massa M, partendo da fermo, viene calato verticalmente per mezzo di una fune con accelerazione costante, diretta verso il basso, pari a $g/4$. Trovare, quando è calato di una distanza d, i valori del lavoro fatto sul blocco dalla fune e dal suo peso. Determinare poi l'energia del blocco e la sua velocità.

Soluzione. In questo caso la fune compie un lavoro resistente atto ad impedire al blocco di cascare con accelerazione g. La forza risultante produce un'accelerazione $\frac{g}{4}$. Il peso del blocco è

$$P = Mg$$

il lavoro da esso compiuto è

$$W = Mgd$$

La tensione sarà

$$T = -P + M\frac{g}{4} = -\frac{3}{4}Mg$$

Il lavoro da essa compiuto è

$$W = -\frac{3}{4}Mgd$$

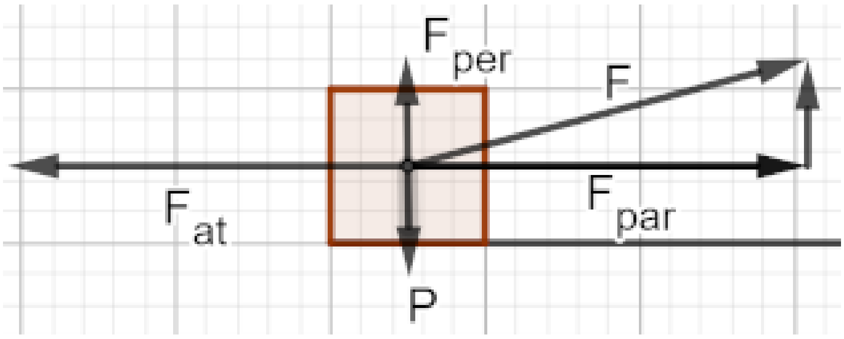
L'energia cinetica è pari al lavoro compiuto dalla forza risultante:

$$K = \frac{1}{4}Mgd$$

e la velocità è

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{4}Mgd}{M}} = \sqrt{\frac{gd}{2}}$$

Esercizio 23. Un blocco di massa $m = 3,57\,kg$ è trascinato a velocità costante su un piano orizzontale per un tratto $d = 4,06\,m$ da una fune che esercita una forza costante di modulo $F = 7,68\,N$ inclinata di un angolo $\theta = 15,0°$ sull'orizzontale. Calcolare (a) il lavoro totale compiuto sul blocco; (b) il lavoro fatto dalla fune sul blocco; (c) il lavoro fatto dalle forze di attrito sul blocco; (d) il coefficiente di attrito tra blocco e piano.



Soluzione. Il blocco si muove a velocità costante e ciò comporta che la forza d'attrito, in modulo, è pari alla componente parallela della forza applicata al blocco (vedi figura). Calcoliamo F_{par} sapendo che l'angolo che F forma con l'orizzontale è di 15°

$$F_{par} = 7,68 \times \cos 15,0° = 7,42\,N = F_{at}$$

(a) Il lavoro totale è quindi nullo perché il lavoro della componente parallela è opposto a quello della forza d'attrito dinamico, $W_{par} = -W_{at}$; il peso non compie lavoro perché è diretto perpendicolarmente allo spostamento. (b) Il lavoro fatto dalla fune è

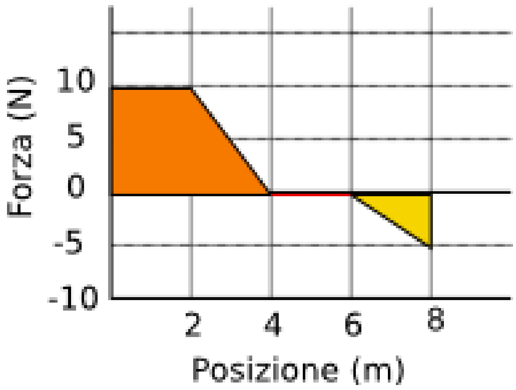
$$W_{par} = 7,42 \times 4,06\,m = 30,1\,J$$

il lavoro delle forze di attrito per quanto detto è $w_{at} = -30,1\,J$; (c) calcoliamo il coefficiente di attrito

$$\mu = \frac{F_{at}}{N} = \frac{7,42}{3,57 \times 9,81} = 0,22$$

Lavoro svolto da una forza variabile

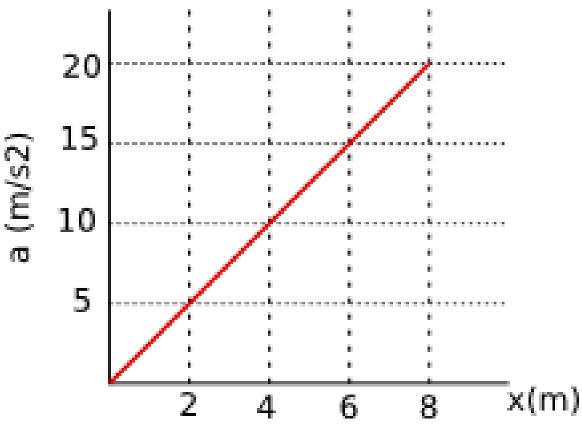
Esercizio 24. Un blocco pesante $5.0\,kg$ si muove in linea retta su una superficie orizzontale priva di attrito sotto l'azione di una forza che varia con la posizione come mostrato nella figura. Trovare il lavoro compiuto da tale forza per uno spostamento del blocco dall'origine al punto $x = 8.0\,m$.



Il lavoro è dato dal prodotto della forza per lo spostamento, intesi vettorialmente. Nel caso qui descritto, la forza è variabile e il lavoro da essa compiuto può essere ottenuto, sottraendo l'area compresa tra i due poligoni colorati e l'asse orizzontale, posti uno al di sopra e l'altro al di sotto della linea della zero (il secondo, inteso come lavoro resistente)

$$W = \frac{(4+2)\cdot 10}{2} - \frac{2\cdot 5}{2} = 25\,J$$

Esercizio 25. Una massa di $10\,kg$ si sposta lungo l'asse x. Il grafico sotto rappresenta la sua accelerazione in funzione della sua posizione. Trovare il lavoro netto fatto sulla massa durante lo spostamento da $x = 0$ a $x = 8.0\,m$.



Soluzione. Dal grafico è possibile osservare che lungo gli 8 metri, l'accelerazione media è pari a $10\,m/s^2$. Il lavoro compiuto è pertanto

$$F = max = 10\,Kg \cdot 10\,\frac{m}{s^2} \cdot 8\,m = 800\,N$$

Potenza

Esercizio 26. La cabina di un montacarichi, con massa a pieno carico di $3.0 \times 10^3\,kg$, sale di $210\,m$ in $23\,s$, a velocità costante. Determinare la potenza media sviluppata dal cavo sulla cabina.

Soluzione. Portando la cabina verso l'alto si compie un lavoro che accresce l'energia potenziale della cabina e del suo contenuto

$$U = 3.0 \cdot 10^3 kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times 210\,m = 6.2 \cdot 10^6\,J$$

La potenza sviluppata è

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{6.2 \cdot 10^6\,J}{23\,s} = 268435\,W$$

Esercizio 27. Trovare la potenza media assorbita da una sciovia che in $60\,s$ trasporta su un dislivello di $150\,m$, a velocità costante, 100 sciatori del peso medio di $70\,kg$.

Il lavoro compiuto in un campo gravitazionale non dipende dal percorso compiuto, ma solo dal punto iniziale e finale, cioè dal dislivello. La massa complessiva che deve essere trasportata è

$$M = 100 \times 70\,kg = 7000\,kg$$

Il lavoro complessivo, che si traduce in energia potenziale è

$$U = 7000\,kg \times 9.8\,\frac{m}{s^2} \times 150\,m = 1.03 \times 10^7\,J$$

La potenza sviluppata è pertanto

$$P = \frac{1.03 \times 10^7\,J}{60\,s} = 171500\,W$$

Esercizio 28. La cabina di un ascensore, con massa di $4500\,kg$ e carico utile massimo di $1800\,kg$, sale a pieno carico alla velocità di $3.8\,m/s$. Quale potenza occorre per tenere questa velocità?

Soluzione. La potenza è il lavoro compiuto nell'intervallo di tempo, cioè $P = \frac{W}{\Delta t}$; ma $W = Fs$, da cui sostituendo si ha

$$P = Fv$$

Pertanto è possibile calcolare la potenza in questa situazione, prendendo come massa, quella complessiva a pieno carico, $m = 4500 + 1800\,kg$; inoltre, il lavoro viene fatto dal motore che deve contrastare la forza peso dell'ascensore

$$P = 6300\,k \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 3.8\,\frac{m}{s} = 234612\,Watt \simeq 235\,kW$$

Esercizio 29. Una particella soggetta a una forza $\overrightarrow{F} = (4.0\,N)\,\overrightarrow{i} - (2.0\,N)\,\overrightarrow{j} + (9.0\,N)\,\overrightarrow{k}$ si sposta, in un certo istante, alla velocità $\overrightarrow{v} = -\,(2.0\,m/s)\,\overrightarrow{i} + (4.0\,m/s)\,\overrightarrow{k}$. Calcolare la potenza istantanea con cui la forza produce lavoro sulla particella; in un altro momento la velocità ha soltanto la componente secondo $\overrightarrow{j}$.

Soluzione. la situazione è assai simile alla precedente; la differenza consiste nella trattazione vettoriale delle grandezze. La potenza è una grandezza scalare; il prodotto tra la forza e la velocità è pertanto scalare, cioè $F \cdot v \cdot \cos\theta$.

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{(4.0)^2 + (-2.0)^2 + (9.0)^2} = 11\,N \\ v &= \sqrt{(-2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.47\,\frac{m}{s} \end{aligned}$$

calcoliamo ora il prodotto scalare tra le componenti, (trascuriamo per comodità di scrittura le unità di misura)

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = [(-2.0i \cdot 4.0i) + (-2.0i \cdot (-2.0)\,j) + (-2.0i \cdot 9.0k) + (4.0i + 4.0k) + (-2.0j \cdot 4.0k) + (9.0k \cdot 4.0k)]$$

ora, l'angolo tra due versori uguali è 0° e quindi $\cos 0° = 1$, mentre quello tra versori diversi è sempre 90° e quindi $\cos 90° = 0$

$$P = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = -8 + 36 = 28\,W$$

Esercizio 30. Un blocco di $100\,kg$ è trascinato a velocità costante di $5.0\,m/s$ su un pavimento orizzontale da una forza di $122\,N$ diretta con angolo di 37° sopra il piano orizzontale. Trovare la potenza.

Soluzione. Calcoliamo la potenza applicando il prodotto scalare tra le velocità e la forza, conoscendo l'angolo che essi formano. Da $P = Fv\cos\varphi$, si ha

$$P = 122\,N \cdot 5.0\,\frac{m}{s} \cdot \cos 37° = 487\,W$$

Esercizio 31. Un oggetto di $2.0\,kg$ accelera uniformemente da fermo alla velocità di $10\,m/s$ in $3.0\,s$. Trovare il lavoro compiuto in questo intervallo di tempo.

Soluzione. "Modalità «cinematica": I dati ci consentono di calcolare l'accelerazione uniforme a cui è stato sottoposto l'oggetto; applicando, poi, la seconda legge di Newton, è possibile ottenere la forza applicata che compie questo lavoro.

$$a = \frac{(10-0)\,\frac{m}{s}}{3\,s} = 3.3\,\frac{m}{s^2}$$

Troviamo ora la forza applicata

$$F = ma = 2.0\,kg \cdot 3.3\,\frac{m}{s^2} = 6.7\,N$$

Serve poi calcolare la distanza percorsa

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0.5 \cdot 3.3\,\frac{m}{s} \cdot 9\,s^2 = 15\,m$$

Il lavoro sarà

$$L = Fs = 6.7\,N \cdot 15\,m = 100\,J$$

È possibile ottenere tale informazione ricordando il teorema dell'energia cinetica, secondo il quale, il lavoro compiuto è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo; in questo caso, essendo la velocità iniziale nulla, anche l'energia cinetica iniziale è nulla, quindi

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} m \left(v_f^2 - v_i^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot 2.0\, kg \cdot 100 = 100\, J$$

Esercizio 32. Una forza di $5.0\, N$ agisce su un corpo di $15\, kg$ che si trova inizialmente in quiete. Calcolare il lavoro fatto dalla forza in tre secondi e la potenza sviluppata dalla forza.

Soluzione. La forza produce sul corpo una accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5.0\, N}{15\, kg} = 0.33\, \frac{m}{s^2}$$

partendo da fermo, il corpo in tre secondi avrà una velocità

$$v = at = 0.33\, \frac{m}{s^2} \cdot 3\, s = 1.0\, \frac{m}{s}$$

Il lavoro fatto dalla forza sarà

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} \cdot 15.0\, kg \cdot 1^2\, \frac{m^2}{s^2} = 7.5\, J$$

La potenza sviluppata sarà

$$P = Fv = 5.0\, N \cdot 1\, \frac{m}{s} = 5.0\, W$$

Esercizio 33. La cabina di un montacarichi a pieno carico, di massa complessiva $1200\, kg$, deve salire di $54\, m$ in $3.0\, min$. Il contrappeso ha massa $950\, kg$. Trovare la potenza richiesta al motore quando il cavo solleva la cabina. (Supporre che la velocità sia sempre costante).

Soluzione. Il montacarichi ha una massa maggiore del contrappeso, per cui tende a cadere verso il basso come se la sua massa fosse la differenza tra le due. Possiamo quindi calcolare il lavoro del motore contrario alla forza peso

$$L = mgh = 250\, kg \cdot 9.8\, \frac{m}{s^2} \cdot 54\, m = 132300\, J$$

Tale lavoro deve essere speso in $3\, m = 180\, s$, per cui

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{132300\, J}{180\, s} = 735\, W$$

Esercizio 34. La forza richiesta per rimorchiare una barca a velocità costante è proporzionale alla velocità. Se per una velocità di $4\, km/h$ occorre una potenza di $10\, kW$, trovare la potenza necessaria per una velocità di $12\, km/h$.

Soluzione. La potenza può essere espressa dalla relazione $P = F \cdot v$, dove v è la velocità del corpo sul quale si compie lavoro. Se la forza è proporzionale alla velocità, la potenza sarà allora proporzionale al quadrato della velocità; quindi

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 9$$

La potenza cercata sarà quindi

$$P_1 = 9 \cdot 10\,kW = 90\,kW$$

Esercizio 35. Un corpo di massa di $0.30\,kg$, che scivola su una superficie orizzontale priva di attrito, è attaccato all'estremità libera di una molla orizzontale avente costante $k = 500\,N/m$, fissata all'altro lato. Al passaggio per la sua posizione di equilibrio, la massa possiede una energia cinetica di $10\,J$. Trovare la potenza con cui la molla sviluppa lavoro sulla massa quando questa passa per la sua posizione di equilibrio.

Soluzione. Nella condizione di equilibrio, la forza che trascina il corpo è pari alla forza di richiamo della molla; se, in tale situazione, il corpo possiede una energia cinetica di $10\,J$, allora avrà una velocità istantanea pari a

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10\,J}{0.30\,kg}} = 8.2\,\frac{m}{s}$$

Nella condizione di equilibrio il lavoro esterno fatto sul corpo e quello fatto dalla molla sono tra loro opposti, pertanto la potenza sarà pari a zero.