CALCOLO DEGLI INTEGRALI

ESERCIZI SVOLTI DAL PROF. GIANLUIGI TRIVIA

INTEGRALI INDEFINITI

1. Integrazione diretta

1.1. Principali regole di integrazione.

(1) Se $F'(x) = f(x)$, allora $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ dove C è una costante arbitraria.
(2) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ dove A è una costante
(3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$
(4) Se $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ ed $u = \phi(x)$, allora $\int f(u)\,du = F(u) + C$

1.2. Tavola degli integrali elementari (immediati).

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, più in generale
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ con $n \neq -1$
$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -$ ar
$\int \sin x dx = -\cos x dx + C$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

1.3. Integrali risolvibili con le regole di integrazione e formule di integrazione.

Exercise 1. $\int 5a^2x^6 dx =$

Soluzione: $= 5a^2\int x^6 dx = 5a^2\frac{x^7}{7} + C$

Exercise 2. $\int \left(6x^2 + 8x + 3\right) dx =$

Soluzione: $= \int 6x^2 dx + \int 8x dx + \int 3 dx = \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + \frac{3x}{1} + C = 2x^3 + 4x^2 + 3x + C$

Exercise 3. $\int [x(x+a)(x+b)]\,dx =$

Soluzione: $= \int \left[x^3 + (a+b)x^2 + abx\right] dx = \int x^3 dx + (a+b)\int x^2 dx + ab\int x dx = \frac{x^4}{4} + (a+b)\frac{x^3}{3} + ab\frac{x^2}{2} + C$

Exercise 4. $\int \left(a + bx^3\right)^2 dx =$

Soluzione: $= \int \left(a^2 + 2abx^3 + b^2x^6\right) dx = a^2\int dx + 2ab\int x^3 dx + b^2\int x^6 dx = a^2x + ab\frac{x^4}{2} + b^2\frac{x^7}{6} + C$

Exercise 5. $\int \sqrt{2px}dx =$

Soluzione: $= \int (2px)^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{2p}\int x^{\frac{1}{2}}dx = \sqrt{2p}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{2p}x^{\frac{3}{2}} + C$

Exercise 6. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} =$

Soluzione: $= \int x^{-\frac{1}{n}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{-\frac{1}{n}+1} + C = n\frac{x^{-\frac{1}{n}+1}}{n-1} + C$

Exercise 7. $\int (\sqrt{x}+1)(x - \sqrt{x} + 1)\,dx =$

Soluzione: $= \int \left(x^{\frac{3}{2}} - x + x^{\frac{1}{2}} + x - x^{\frac{1}{2}} + 1\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + x + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + C$

Exercise 8. $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2-2\right)}{\sqrt[3]{x^2}} dx =$

Soluzione: $= \int \left(x^4 - x^2 - 2\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} dx = \int \left(x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) dx = \int x^{\frac{10}{3}} dx - \int x^{\frac{4}{3}} dx - 2\int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{3}{13} x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C$

Exercise 9. $\int \frac{dx}{x^2+7} dx =$

Soluzione: $= \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan \frac{x}{\sqrt{7}} + C$

Exercise 10. $\int \frac{dx}{x^2-10} =$

Soluzione: $= \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}} \right| + C$

Exercise 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} =$

Soluzione: $= \ln \left| x + \sqrt{4+x^2} \right| + C$

Exercise 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} =$

Soluzione: $= \arcsin \frac{x}{2\sqrt{2}} + C = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4} + C$

Exercise 13. $\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx =$

Soluzione: $= \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2} \cdot \sqrt{2+x^2}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2} \cdot \sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} - \ln \left| \sqrt{2+x^2} \right| + C$

Exercise 14. $\int \tan^2 x dx =$

Soluzione: applicando la formula goniometrica, $= \int \left(\frac{1}{\cos^x} - 1\right) dx = \tan x - x + C$

Exercise 15. $\int 3^x e^x =$

Soluzione: $= \int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln 3e} + C = \frac{(3e)^x}{1 + \ln 3} + C$

1.4. **Integrazione per introduzione sotto il segno di differenziale.** La regola 4), se$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ e $du = \phi(x)$ allora $\int f(u)\,du = F(u) + C$ estende notevolmente la tavola degli integrali elementari, in quanto essa rimane valida anche nel caso in cui la variabile indipendente sia una funzione derivabile. In particolare

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-\frac{1}{2}}\,d(5x-2) = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C$$

ciò equivale anche ad operare la sostituzione $5x - 2 = u$, da cui, differenziando, $5dx = du$.

Exercise 16. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}dx =$

Soluzione: riscriviamo il numeratore come $2x + 3 = 2x + 1 + 2$, avremo

$$= \int \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)dx = \int dx + \int \frac{2dx}{2x+1} = x + \int \frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln(2x+1) + C$$

Exercise 17. $\int \dfrac{1-3x}{3+2x} =$

Soluzione: $\displaystyle= \int \frac{1}{2x+3}dx - \int \frac{3x}{2x+3}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - 3\int \frac{x}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx = \tfrac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int \frac{x+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)}dx =$

$$= \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}\int dx + \frac{9}{4}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}\ln|2x+3| - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4}\ln|3+2x| - \frac{3}{2}x + C$$

Exercise 18. $\int \dfrac{x^2+1}{x-1}dx =$

Soluzione: $\displaystyle= \int \frac{x^2-1+2}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}dx + 2\int \frac{dx}{x-1} = \int (x+1)\,dx + 2\ln|x-1| = \frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1| + C$

Exercise 19. $\int \dfrac{x^2+5x+7}{x+3}dx =$

Soluzione: $\displaystyle= \int \frac{x^2+6x+9-x-2}{x+3}dx = \int \frac{(x+3)^2}{x+3}dx - \int \frac{x+3-1}{x+3}dx = \int (x+3)\,dx - \int dx + \int \frac{dx}{x+3} = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x +$

Exercise 20. $\int \dfrac{x}{(x+1)^2}dx =$

Soluzione: $\displaystyle= \int \frac{x+1}{(x+1)^2}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx = \ln|x+1| - \int (x+1)^{-2}\,dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$

Exercise 21. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx =$

Soluzione: $\displaystyle= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1} + C$

Exercise 22. $\int \dfrac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx =$

Soluzione: $\displaystyle= \int \frac{\sqrt{x}}{x}dx + \int \frac{\ln x}{x}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int \ln x\,(d\ln x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{2}\ln^2 x + C$

Exercise 23. $\int \frac{dx}{3x^2+5} =$

Soluzione: $= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt{15}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right) + C$

Exercise 24. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}dx =$

Soluzione: applichiamo $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$ e avremo

$$= \int \frac{x^2+4}{x^2+4}dx + \int \frac{2-5x}{x^2+4}dx = x + 2\int \frac{dx}{x^2+4} - 5\int \frac{x}{x^2+4}dx = x + \arctan\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx = x + \arctan\frac{x}{2} - \frac{5}{2}\ln\left|x^2+4\right| + C$$

Exercise 25. $\int \frac{x}{\sqrt{7-8x^2}}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{dx}{\sqrt{5}\sqrt{\frac{7}{5}-x^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\frac{\sqrt{5}}{7}x + C$

Exercise 26. $\int \frac{x}{\sqrt{8x^2+7}}dx =$

Soluzione: $\int \frac{dx}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{7}{8}}}dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{7}{8}}\right| + C$

Exercise 27. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}dx =$

Soluzione: $= \frac{1}{3}\int \frac{2x}{3x^2-2}dx - 5\int \frac{dx}{3x^2-2} = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x^2-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\ln\left|3x^2-2\right| - \frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{2}{3}}}{x+\sqrt{\frac{2}{3}}}\right| + C$

Exercise 28. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}dx =$

Soluzione: $3\int \frac{1}{5x^2+7}dx - \int \frac{2x}{5x^2+7}dx = 3\int \frac{1}{5x^2+7}dx - \frac{1}{5}\int \frac{10x}{5x^2+7}dx = \frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{7}}\arctan\sqrt{\frac{5}{7}}x - \frac{1}{5}\ln\left|5x^2+7\right| + C$

Exercise 29. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \sqrt{x^2-4} - 3\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{x^2-4}\right| + C$

Exercise 30. $\int \frac{x}{x^2-5}dx =$

Soluzione: $= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-5}dx = \frac{1}{2}\ln\left|x^2-5\right| + C$

Exercise 31. $\int \frac{x^2}{x^6+1}dx =$

Soluzione: sapendo che $d\left(x^3\right) = 3x^2dx$, si ha $= \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{\left(x^3\right)^2+1} = \frac{1}{3}\arctan x^3 + C$

Exercise 32. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx =$

Soluzione: sapendo che $d\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, si può scrivere

$$= \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \left(\arcsin x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arcsin x\right) = \frac{2}{3}\left(\arcsin x\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

Exercise 33. $\int \frac{x-\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{x}{1+4x^2}dx - \int \frac{\sqrt{\arctan 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x}{1+4x^2}dx - \int \left(\arctan 2x\right)^{\frac{1}{2}} d\left(\arctan 2x\right) = \frac{1}{8}\ln\left(1+4x^2\right) - \frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}} 2$

Exercise 34. $\int 4^{2-3x}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{d\left(4^{2-3x}\right)}{-3\ln 4} = \frac{4^{2-3x}}{3\ln 4} + C$

Exercise 35. $\int \left(e^x - e^{-x}\right)dx =$

Soluzione: $= \int e^x dx - \int e^{-x}dx = e^x + e^{-x} + C$

Exercise 36. $\int e^{-\left(x^2+1\right)}xdx =$

Soluzione: Siccome $d\left(x^2+1\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int e^{-\left(x^2+1\right)}d\left(x^2+1\right) = -\frac{1}{2}e^{-\left(x^2+1\right)} + C$$

Exercise 37. $\int x \cdot 7^{x^2}dx =$

Soluzione: siccome $d\left(x^2\right) = 2xdx$, avremo

$$= \frac{1}{2}\int 2 \cdot 7^{x^2} d\left(x^2\right) = \frac{7^x}{2\ln 7} + C$$

Exercise 38. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx =$

Soluzione: ancora, poiché $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}dx$, avremo $= -\int e^{-\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) = -e^{\frac{1}{x}} + C$

Exercise 39. $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{d\left(e^x-1\right)}{e^x-1}dx = \ln\left|e^x-1\right| + C$

Exercise 40. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} =$

Soluzione: $= \int \frac{d\left(e^x\right)}{\sqrt{1-e^{2x}}} = \arcsin e^x + C$

Exercise 41. $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx =$

Soluzione: $= \sqrt{2}\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}d\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$

Exercise 42. $\int \left(\cos x + \sin x\right)^2 dx =$

Soluzione: applicando la proprietà fondamentale della goniometria, si ha

$$= \int \left(1 + 2\sin 2x\right)dx = \int dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x d\left(2x\right) = x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

Exercise 43. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx =$

Soluzione: essendo $d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$, si ha

$$= 2\int \cos\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right) = 2\sin\sqrt{x} + C$$

Exercise 44. $\int \frac{\sin\left(\ln x\right)}{x}dx =$

Soluzione: ancora, essendo $d\left(\ln x\right) = \frac{dx}{x}$, si ha $= \int \sin\left(\ln x\right)d\left(\ln x\right) = -\cos\left(\ln x\right) + C$

Exercise 45. $\int \sin^2 x dx$

Soluzione: ricordando le formule di bisezione, si può riscrivere l'integrale

$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{4}\int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Exercise 46. $\int \cos^2 x dx$

Soluzione: sempre per le formule di bisezione

$$= \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\int \cos 2x d\left(2x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Exercise 47. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{2}} =$

Soluzione: $= 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} = 2\ln\left|\tan\frac{x}{4}\right| + C$

Exercise 48. $\int \frac{xdx}{\cos^2 x^2} =$

Soluzione: ancora, poiché $d\left(x^2\right) = 2xdx$, si ha

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\cos^2 x^2} = \frac{1}{2}\tan x^2 + C$$

Exercise 49. $\int x\sin\left(1-x^2\right)dx =$

Soluzione: poiché $d\left(1-x^2\right) = -2xdx$, si ha $= -\frac{1}{2}\int \sin\left(1-x^2\right)d\left(1-x^2\right) = \frac{1}{2}\cos\left(1-x^2\right) + C$

Exercise 50. $\int \tan xdx$

Soluzione: $= \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C$ (ancora, $-\sin xdx = d(\cos x)$)

Exercise 51. $= \int \frac{dx}{\sin x\cos x} =$

Soluzione: ricordando le formule di duplicazione $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ si ha

$$2\int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \ln|\tan x| + C$$

Exercise 52. $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2xdx =$

Soluzione: essedno $d\left(\cos^2 x\right) = -\sin 2x$, si ha $= -\frac{1}{3}\int \sqrt{1+3\cos^2 x}d\left(1+3\cos^2 x\right) = -\frac{2}{9}\left(1+3\cos^2 x\right)^{\frac{3}{2}} + C$

Exercise 53. $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}dx =$

Soluzione: poiché $d[\tan x] = \frac{1}{\cos^2 x}dx$, si ha $= \int \sqrt{\tan x}d(\tan x) = \frac{2}{3}\tan^{\frac{3}{2}} + C$

Exercise 54. $\int \frac{1+\sin 3x}{\cos^2 3x}dx$

Soluzione: $= \int \frac{1}{\cos^2 3x}dx + \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x)}{\cos^2 3x} - \frac{1}{3}\int \left(\cos^{-2} 3x\right)d(\cos 3x) = \frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{\cos 3x} + C$

Exercise 55. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx =$

Soluzione: $= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3-4}{x^4-4x+1}dx = \frac{1}{4}\ln\left|x^4-4x+1\right| + C$, (il numeratore è, infatti, la derivata del denominatore)

Exercise 56. $\int \frac{1-x}{1+\sqrt{x}}dx$

Soluzione: operando in $\mathbb{R}$ si può scomporre il numeratore e ottenere
$$= \int \frac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{(1+\sqrt{x})} dx = \int dx - \int x^{\frac{1}{2}} dx = x - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Exercise 57. $\int x e^{-x^2} dx =$

Soluzione: $= -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d\left(-x^2\right) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$

Exercise 58. $\int \frac{x^3-1}{x+1} dx =$

Soluzione: $= \int \frac{x^3+1-2}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x+1} dx - 2\int \frac{1}{x+1} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2\ln|x+1| + C$

Exercise 59. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}} =$

Soluzione: $= 2\int e^{-\dfrac{x}{2}} d\left(\frac{x}{2}\right) = -2e^{-\frac{x}{2}} + C$

Exercise 60. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x} dx =$

Soluzione: poiché $d(x+\cos x) = 1-\sin x$, avremo che il numeratore è la derivata del denominatore, per cui $= \ln|x+\cos x| + C$

Exercise 61. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x} =$

Soluzione: essendo $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, avremo
$$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} + C$$

Exercise 62. $\int \frac{dx}{e^x+1} =$

Soluzione: $= \int \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} dx = \int dx - \int \frac{e^x}{e^x+1} dx = x - \ln|e^x+1| + C$

Exercise 63. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}} dx =$

Soluzione: poiché $d\left(\sin^2 x\right) = \sin x \cos x dx$, si può riscrivere
$$= \int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sqrt{2-\left(\sin^2 x\right)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + C$$

Exercise 64. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x} =$

Soluzione: $= \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2+\tan^2 x} dx = \int \frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tan \frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$

2. Integrali risolti con il metodo della sostituzione di variabile

Molti degli integrali precedenti si potevano anche risolvere con tale metodo, così come gli integrali che seguiranno potranno essere risolti anche con altri metodi.

Exercise 65. $\int x\,(2x+5)^{10}\,dx =$

Soluzione: introduciamo la sostituzione $t = 2x+5$ o $x = \frac{t-5}{2}$, da cui $dx = \frac{dt}{2}$; l'integrale diviene

$$= \int \frac{t-5}{4}\cdot t^{10}dt = \frac{1}{4}\int t^{11}dt - \frac{5}{4}\int t^{10}dt = \frac{1}{48}t^{12} - \frac{5}{44}t^{11} = \frac{1}{48}(2x+5)^{12} - \frac{5}{44}(2x+5)^{11} + C$$

Exercise 66. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}} =$

Soluzione: introduciamo la sostituzione $2x+1 = \frac{1}{t^2}$ o $2x = \frac{1}{t^2}-1$, da cui $2dx = -\frac{2}{t^3}dt$, cioè $dx = -\frac{1}{t^3}dt$ e otteniamo

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^3}}{\frac{1-t^2}{2t^2}\cdot\frac{1}{t}}dt = \int -\frac{1}{t^3}\cdot\frac{2t^3}{1-t^2}dt = 2\int\frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right| + C$$

Exercise 67. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}} =$

Soluzione: sostituisco $\sqrt{e^x-1} = t$, cioè $e^x = t^2+1$ da cui $e^x dx = 2tdt$ e quindi $dx = \frac{2t}{t^2+1}dt$. Avremo

$$= \int \frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}dt = 2\int\frac{dt}{t^2+1} = 2\arctan t = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Exercise 68. $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx =$

Soluzione: $= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{2\ln 2 + \ln x}\frac{dx}{x}$, sostituiamo $\ln x = t$ e $\frac{1}{x}dx = dt$ e avremo

$$= \int \frac{\ln 2 + t}{2\ln 2 + t}dt = \int \frac{2\ln 2 + t}{2\ln 2 + t}dt - \int \frac{\ln 2}{2\ln 2 + t}dt = t - \ln|2(2\ln 2 + t)| = \ln x - \ln|2\ln 4x| + C$$

Exercise 69. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$

Soluzione: sostituiamo $\sqrt{e^x+1} = t$, cioè $e^x = t^2-1$ e $e^x dx = 2tdt$ e avremo

$$= \int \frac{\left(t^2-1\right)2t}{t}dt = 2\int\left(t^2-1\right)dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t = 2t\left(\frac{t^2}{3}-1\right) = 2\sqrt{e^2+1}\left[\frac{(e^x+1)}{3}-1\right] + C$$

Exercise 70. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx =$

Soluzione: sostituendo $\sqrt{\cos x} = t$, $\cos^2 x = t^4$, $\sin^2 x = 1 - t^4$, da cui $-\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}dx = dt$, avremo

$$= 2\int \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \cdot \sin^2 x dx = -2\int \left(1 - t^4\right) dt = -2t + \frac{2}{5}t^5 = -2\sqrt{\cos x} + \frac{2}{5}(\cos x)^{\frac{5}{2}}\, dx + C$$

Exercise 71. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

Soluzione: sostituzione con funzione goniometrica: $x = \sin t$, da cui $dx = \cos t dt$, si ha

$$= \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cos t dt = \int \sin^2 t dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

Exercise 72. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} =$

Soluzione: poniamo $x = \sec t$, $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t} - 1} = \tan t$ e $dx = \sec t \cdot \tan t dt$, pertanto

$$= \int \frac{\sec t \cdot \tan t}{\sec t \cdot \tan t}dt = t = \arccos x + C$$

Exercise 73. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx =$

Soluzione: poniamo $x = \frac{1}{t}$ da cui $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ e avremo

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\frac{4t^2-1}{t^2}}} = -\int \frac{t}{\sqrt{4t^2-1}}dt = -\frac{1}{8}\int \frac{d\left(4t^2-1\right)}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{4}\sqrt{4t^2-1} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$$

Exercise 74. $\int \sqrt{1-x^2}dx =$

Soluzione: introduciamo la sostituzione $x = \sin t$, $x^2 = 1 - \cos^2 t$ e $dx = \cos t dt$ e l'integrale diviene

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int \cos 2t d(2t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$$

3. Integrazione per parti

Dalla formula della derivata del prodotto di due funzioni $D[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ si ottiene, integrando entrambi i membri $f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) + \int f(x) \cdot g'(x)$ da cui $\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$, dove $f'(x)$ è riconosciuta come la derivata di una funzione nota $f(x)$.

Exercise 75. $\int \ln x dx =$

Soluzione: Poniamo $f = \ln x$ e $1dx = dg$ con $g = x$; avremo

$$x \ln x - \int \frac{x}{x}dx = x \ln x - x + C$$

Exercise 76. $\int x \sin x dx =$

Soluzione: Ponoamo $x = f$ e $dg = \sin x\text{dx}$ e avremo

$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C$$

Exercise 77. $\int \frac{x}{e^x} dx =$

Soluzione: Poniamo $f = x$ e $dg = e^{-x}dx$ e avremo

$$= -\frac{x}{e^x} + \int \frac{1}{e^x} dx = -\frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = -\frac{1+x}{e^x} + C$$

Exercise 78. $\int x^2 e^{3x} dx =$

Soluzione: Poniamo $f = x^2$e $dg = e^{3x}dx$ e otterremo

$$= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{1}{3}\int 2xe^{3x}dx =$$

iteriamo il procedimento $f = 2x$ e $dg = e^{3x}dx$ e avremo

$$= \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{3}\left[\frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right] = \frac{1}{3}x^2 e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C$$

Exercise 79. $\int x \sin x \cos x dx =$

Soluzione: applichiamo le formule goniometriche $= \frac{1}{2}\int x \sin 2x dx$ e poniamo $x = f$ e $\sin 2x dx = dg$

$$= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C$$

Exercise 80. $\int x^2 \ln x dx =$

Soluzione: ponendo $f = \ln x$ e $x^2 dx = dg$ avremo

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$$

Exercise 81. $\int \ln^2 x dx =$

Soluzione: ponendo $f = \ln^2 x$ e $dx = dg$ avremo

$$= x\ln^2 x - \int 2x\cdot\frac{\ln x}{x}dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

Exercise 82. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx =$

Soluzione: ponendo $f = \ln x$ e $dg = \frac{dx}{x^3}$ si ha

$$= -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{4x^2} + C$$

Exercise 83. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx =$

Soluzione: ponendo $f=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ e $dg=dx$ si ha

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+1\right)}{\sqrt{x^2+1}} = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{x^2+1}+C$$

Exercise 84. $\int \frac{x}{\sin^2 x}dx =$

Soluzione: ponendo $f=x$ e $dg=\frac{dx}{\sin^2 x}$ si ottiene

$$= -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x - \ln|\sin x| + C$$

Exercise 85. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx =$

Soluzione: ponendo $f=x$ e $dg=\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$ si ottiene

$$= -\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{2\sin x}dx = -\frac{x}{\sin x} + \frac{1}{2}\ln|\tan x| + C$$

Exercise 86. $\int e^x \sin x dx =$

Soluzione: ponendo $f=\sin x$ e $dg=e^x dx$ si ottiene $= e^x\sin x - \int e^x \cos x dx =$ iteriamo ora la procedura ponendo nuovamente $f=\cos x$ e $dg=e^x dx$ si ottiene

$$\int e^x \sin x dx = e^x\sin x - \left(-e^x\cos x + \int e^x \sin x dx\right) = e^x \sin x + e^x\cos x - \int e^x \sin x dx$$

sommando ora i due integrali e dividendo a metà entrambi i membri, si ottiene

$$2\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(e^x\sin x + e^x \cos x\right) + C$$

Exercise 87. $\int \sin(\ln x)\,dx =$

Soluzione: ponendo $f=\sin(\ln x)$ e $dg=dx$ si ottiene $= x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\,dx =$, ponendo ora nuovamente $f=\cos(\ln x)$ e $dg=dx$ si ha $x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$; avremo pertanto

$$\int \sin(\ln x)\,dx = x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x) - \int \sin(\ln x)\,dx$$

risolvendo rispetto a $\int \sin(\ln x)\,dx$ si ottiene

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \frac{x\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)}{2} + C$$

4. Integrali di funzioni razionali fratte e irrazionali

Exercise 88. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5} =$

Soluzione: il polinomio al denominatore può essere riscritto come $(x+1)^2+4$, da cui

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$$

Exercise 89. $\int \frac{dx}{3x^2-3x+1} =$

Soluzione: riscriviamo il denominatore

$$= \int \frac{dx}{3\left(x^2 - 2\cdot\frac{x}{6} + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{36}\right)} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\sqrt{11}} = \frac{2}{\sqrt{11}}\arctan\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$$

Exercise 90. $\int \frac{xdx}{x^2-7x+13} =$

Soluzione: poniamo $2x-7=t$ e $dx = \frac{dt}{2}$ e avremo

$$= \int \frac{\frac{t+7}{2}}{\left(\frac{t+7}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{t+7}{2}\right) + 13}\cdot\frac{dt}{2} = \int \frac{t+7}{t^2+3}dt = \int \frac{t}{t^2+3}dt + 7\int \frac{dt}{t^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+3\right)}{t^2+3} + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|4x^2-28x+52\right| + \frac{7}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-7}{\sqrt{3}} + C$$

Exercise 91. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx =$

Soluzione: poniamo $2x-4=t$ e $dx = \frac{dt}{2}$ e otteniamo

$$= \int \frac{\frac{3}{2}(t+4)-2}{\frac{(t+4)^2}{4} - 4\frac{t+4}{2} + 5}\cdot\frac{t}{2}dt = \int \frac{3t+4}{2}\cdot\frac{4}{t^2+4}\frac{dt}{2} = \int \frac{3t}{t^2+4}dt + 4\int\frac{dt}{t^2+4} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d\left(t^2+4\right)}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{3}{2}\ln\left|t^2+4\right| + 2\arctan\frac{t}{2} = \frac{3}{2}\ln\left|4x^2-16x+20\right| + 2\arctan(x-2) + C$$

Exercise 92. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} =$

Soluzione: riscriviamo il polinomio al denominatore in modo da ottenere la differenza di due quadrati

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(1+\frac{9}{16}\right) - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16} - \left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{4x-3}{5}\right) + C$$

Exercise 93. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}dx =$

Soluzione: $= 3\int \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+1}}dx = 3\int \frac{d(x-2)}{\sqrt{(x-2)^2+1}} = \ln\left|(x-2) + \sqrt{x^2-4x+5}\right| + C$

Exercise 94. $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Soluzione: poniamo $x=\frac{1}{t}$ e $dx=-\frac{1}{t^2}$ e avremo

$$=-\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}=-\ln\left|t+\sqrt{t^2-1}\right|=-\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1-x^2}\right|=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|+C$$

Exercise 95. $\int \sqrt{x-x^2}dx=$

Soluzione: riscriviamo completando il quadrato $=\int \sqrt{\dfrac{1}{4}-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}dx=$ poniamo ora $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin t$ da cui $\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cos t$ e $dx=\frac{1}{2}\cos t dt$. Avremo

$$\frac{1}{4}\int \cos^2 t dt=\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2t}{2}=\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}\sin 2t=\frac{1}{8}\arcsin\left(2x-1\right)+\frac{1}{8}\left(2x-1\right)\sqrt{1-\left(2x-1\right)^2}+C$$

Exercise 96. $\int \dfrac{xdx}{x^4-4x^2+3}=$

Soluzione: $=\int \dfrac{xdx}{\left(x^2-2\right)^2-1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d\left(x^2-2\right)}{\left(x^2-2\right)^2-1}=\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x^2-3}{x^2-1}\right|+C$

Exercise 97. $\int \dfrac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}=$

Soluzione: $=\int \dfrac{e^x dx}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\displaystyle\int \frac{d\left(e^x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(e^x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|e^x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right|+C$

Exercise 98. $\int \dfrac{\ln x dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}=$

Soluzione: $=\int \dfrac{\ln x+2}{\sqrt{5-\left(\ln x+2\right)^2}}d\left(\ln x+2\right)-\displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{5-\left(\ln x+2\right)^2}}d\left(\ln x+2\right)$ Introduciamo la sostituzione $\ln x+2=t$ con $x=e^{t-2}$ e $dx=e^{t-2}dt$ e avremo

$$=\int \frac{t}{\sqrt{5-t^2}}dt-2\int \frac{1}{\sqrt{5-t^2}}dt=-\frac{1}{2}\int \frac{d\left(5-t^2\right)}{\sqrt{5-t^2}}-2\int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}}=-\sqrt{5-t^2}-2\arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}=-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}-2\arcsin \frac{2+}{}$$

Exercise 99. $\int \dfrac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx=$

Soluzione: Applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati. Data una frazione algebrica razionale $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se $Q\left(x\right)=\left(x-a\right)^{\alpha}....\left(x-l\right)^{\lambda}$ dove $a,...l$ sono le radici reali differenti del polinomio e $\alpha,...,\lambda$ numeri naturali che indicano la molteplicità delle radici, allora è ammissibile la decomposizione della frazione nella forma

$$\frac{P\left(x\right)}{Q\left(x\right)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{\left(x-a\right)^2}+...+\frac{A_\alpha}{\left(x-a\right)^\alpha}+...+\frac{L_1}{x-l}+\frac{L_2}{\left(x-l\right)^2}+...+\frac{L_\lambda}{\left(x-l\right)^\lambda}$$

I coefficienti indeterminati al numeratore si calcolano riducendo allo stesso denominatore i due membri dell'identità sopra eguagliando i coefficienti dei termini di uguale grado.

$$= \int \frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6}dx + \int \frac{3}{(x-2)(x-3)}dx =$$

risolviamo il secondo integrale con il metodo indicato riscrivendo

$$\frac{3}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

da cui

$$3 = A(x-3) + B(x-2) = x(A+B) - (3A+2B)$$

avremo, pertanto, eguagliando i coefficienti di pari grado

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -3A-2B=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-3 \\ B=3 \end{cases}$$

l'integrale diverrà

$$= \int dx - 3\int \frac{dx}{x-2} + 3\int \frac{dx}{x-3} = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

Exercise 100. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)}dx$

Soluzione: applichiamo il metodo sopra indicato riscrivendo la frazione

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-4}$$

da cui $2x^2+41x-91 = A\left(x^2-7x+12\right) + B\left(x^2-5x+4\right) + C\left(x^2-4x+3\right)$ svolgendo e ordinando il polinomio si ha

$$2x^2+41x-91 = x^2(A+B+C) + x(-7A-5B-4C) + (12A+4B+3C)$$

avremo quindi il sistema

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ -7A-5B-4C=41 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases} \quad 1^a+3^a+2^a \quad \begin{cases} A+B+C=2 \\ 6A=-48 \\ 12A+4B+3C=-91 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A=-8 \\ B=10-C \\ -96+40-C=-91 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=-8 \\ B=-25 \\ C=35 \end{cases}$$

l'integrale diviene

$$= -8\int \frac{dx}{x-1} - 25\int \frac{dx}{x-3} + 35\int \frac{dx}{x-4} = \ln\left|\frac{x-4}{(x^2-4x+3)}\right| + C$$

Exercise 101. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2} =$

Soluzione: riscriviamo la frazione come $\frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ ed eguagliando i numeratori avremo

$$1 = A\left(x^2+2x+1\right) + B\left(x^2+x\right) + Cx \qquad 1 = (A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A+B+C=0 \\ A=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-1 \end{cases}$$

l'intgegrale diviene

$$=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{d\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^{2}}=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$$

Exercise 102. $\int\frac{x^{4}-6x^{3}+12x^{2}+6}{x^{3}-6x^{2}+12x-8}dx=$

Soluzione: riscriviamo il numeratore come $x^{4}-6x^{3}+12x^{2}-8x+6+8x=x\left(x-2\right)^{3}+6+8x$ e osserviamo che il denominatore è lo sviluppo del cubo di un binomio; otterremo

$$=\int\frac{x\left(x-2\right)^{3}}{\left(x-2\right)^{3}}dx+\int\frac{8x+6}{\left(x-2\right)^{3}}dx=\int xdx+\int\frac{8x+6}{\left(x-2\right)^{3}}dx=$$

risolviamo il secondo integrale riscrivendo la frazione come $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^{2}}+\frac{C}{(x-2)^{3}}=\frac{8x+6}{(x-2)^{3}}$ ed eguagliando i numeratori si ha

$$8x+6=A\left(x^{2}-4x+4\right)+B\left(x-2\right)+C\qquad 8x+6=Ax^{2}+x\left(-4A+B\right)+\left(4A-2B+C\right)$$

otterremo le costanti risolvendo il sistema

$$\begin{cases}A=0\\-4A+B=8\\4A-2B+C=6\end{cases}\quad\begin{cases}A=0\\B=8\\C=22\end{cases}$$

l'integrale diviene pertanto

$$=\frac{x^{2}}{2}+8\int\frac{d\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^{2}}+22\int\frac{d\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)^{3}}=\frac{x^{2}}{2}-\frac{8}{x-2}-\frac{11}{\left(x-2\right)^{2}}=\frac{x^{4}-4x^{3}+4x^{2}-16x+10}{2\left(x-2\right)^{2}}+C$$

Exercise 103. $\int\frac{dx}{\left(x^{2}-4x+3\right)\left(x^{2}+4x+5\right)}=$

Soluzione: scomponiamo e riscriviamo i denominatori $=\int\frac{dx}{\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left[\left(x-2\right)^{2}+1\right]}=$ poniamo ora $x=t+2$ e $dx=dt$

$$=\int\frac{dt}{\left(t+1\right)\left(t-1\right)\left(t^{2}+1\right)}=\int\frac{dt}{t^{4}-1}=\int\frac{dt}{\left(t^{2}+1\right)^{2}-2\left(t^{2}+1\right)}$$

poniamo ora $t=\tan z$ da cui $t^{2}+1=\frac{1}{\cos^{2}z}$ e $dt=\frac{1}{\cos^{2}z}dz$ e otteremo

$$=-\int\frac{\frac{1}{\cos^{2}z}dz}{\frac{1}{\cos^{4}z}-\frac{z}{\cos^{2}z}}=\int\frac{\cos^{2}z}{\cos2z}dz=-\int\frac{1+\cos2z}{2\cos2z}dz=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(2z\right)}{\cos2z}-\frac{1}{2}z=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan2z+\sec z\right|-\frac{1}{2}z+C=$$

$$=-\frac{1}{4}\ln\left|\tan2z+\sec z\right|-\frac{1}{2}z=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t}{1-t^{2}}+\sqrt{t^{2}+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan t=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-4}{1-\left(x-2\right)^{2}}+\sqrt{x^{2}+4x+5}\right|-\frac{1}{2}\arctan\left(x-2\right)+C$$

Exercise 104. $\int\frac{x^{3}}{\sqrt{x-1}}dx=$

Soluzione: in questo caso applichiamo la sostituzione $x=t^{2}+1$ da cui $dx=2tdt$ e otteniamo

$$=\int\frac{\left(t^{2}+1\right)}{t}2tdt=2\left(\int t^{6}dt+3\int t^{4}dt+3\int t^{2}dt+\int dt\right)=\frac{2}{7}t^{7}+\frac{6}{5}t^{5}+2t^{3}+2t=$$

$$\frac{2}{7}\left(x-1\right)^{\frac{7}{2}}+\frac{6}{5}\left(x-1\right)^{\frac{5}{2}}+2\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}}+2\left(x-1\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

5. Integrali di funzioni goniometriche

Exercise 105. $\int \cos^3 x dx =$

Soluzione: $= \int \cos^2 x d(\sin x) = \int \left(1-\sin^2 x\right) d(\sin x) = \int d(\sin x) - \int \sin^2 x d(\sin x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$

Exercise 106. $\int \sin^3 \dfrac{x}{2} \cos^5 \dfrac{x}{2} =$

Soluzione: $= \dfrac{1}{2}\int \sin^2 \dfrac{x}{2} \cos^4 \dfrac{x}{2} d\left(\sin^2 \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\int \sin^2 \dfrac{x}{2}\left(1+\sin^4 \dfrac{x}{2} - 2\sin^2 \dfrac{x}{2}\right) d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin^2 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\int \sin^6 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\int \sin^4 \frac{x}{2} d\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\sin^4 \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin^8 \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\sin^6 \frac{x}{2} + C$$

Exercise 107. $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x} dx =$

Soluzione: applichiamo le formule parametriche della goniometria per le quali $\cos x = \frac{1-t^2}{1-t^2}$ e $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ dove $t = \tan\frac{x}{2}$. Avremo quindi $x = 2\arctan t$ e $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$. L'integrale diviene

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{3+5\frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = 2\int \frac{dt}{8-2t^2} = \int \frac{dt}{4-t^2} = \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} =$$

riscriviamo la frazione $\dfrac{1}{(2-t)(2+t)} = \dfrac{A}{2-t} + \dfrac{B}{2+t}$ e confrontando i numeratori $1 = t(A-B) + 2(A+B)$. A, B si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} A-B=0 \\ 2A+2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=\frac{1}{4} \end{cases}$$

e l'integrale diviene

$$= \int \frac{dt}{(2-t)(2+t)} = \frac{1}{4}\left(\int \frac{dt}{2-t} + \int \frac{dt}{2+t}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\tan\frac{x}{2}}{2-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

Exercise 108. $\int \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} dx =$

Soluzione: utilizziamo la definizione di tangente come rapporto tra il seno e il coseno dello stesso angolo

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} dx = -\ln|\cos x - \sin x| + C$$

Exercise 109. $\int \dfrac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx =$

Soluzione: $= \int \dfrac{d\left(\sin^2 x\right)}{1+\sin^2 x} = \ln\left|1+\sin^2 x\right| + C$

Exercise 110. $\int \sqrt{3-2x-x^2} dx =$

Soluzione: riscriviamo, completando il quadrato, $= \int \sqrt{-(x+1)^2 + 4dx}$; operiamo ora la sostituzione $x = 2\sin t - 1$ e $dx = 2\cos t dt$, avremo

$$= \int \sqrt{4\left(1-\sin^2 t\right)} \cdot 2\cos t dt = 4\int \cos^2 dt = 2\int (1+\cos 2t) dt = 2\int dt + 2\int \cos 2t dt = 2t + \sin 2t =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C$$