Esercizi di Analisi Matematica

Parte 1

LIMITI

Diamo prima una rapida introduzione teorica.

1. Limite di una funzione

Si dice che la funzione $f(x) \to A$ per $x \to a$ (dove A, a sono numeri) oppure che

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (cioè dipendente da ε) tale che

$$\|f(x) - A\| < \varepsilon \quad per \quad 0 < \|x - a\| < \delta$$

Analogamente si definisce

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A$$

se $\|f(x) - A\| < \varepsilon$ per $\|x\| > N(\varepsilon)$.

Si usa anche la notazione

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

che significa che $\|f(x)\| > E$ per $0 < \|x - a\| < \delta(E)$, dove E è un numero arbitrario positivo.

Se i limiti $\lim_{x\to a} f_1(x)$ e $\lim_{x\to a} f_2(x)$ esistono, hanno luogo i seguenti teoremi:

(1) $\lim_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x)$
(2) $\lim_{x\to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x)$
(3) $\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f_1(x)}{\lim_{x\to a} f_2(x)}$ dove $\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0$

Sono di uso frequente i seguenti limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2.71828...$$

Risolviamo ora i seguenti esercizi:

2. Limiti del rapporto tra due polinomi per $x \to \infty$:

si procede dividendo il numeratore e il denominatore per x^n, dove n è il grado superiore di questi due polinomi.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = 1$ in quanto i termini con x al denominatore tendono a 0 al tendere di x all'infinito.

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{100x}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{100x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{100}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$ per quanto detto per l'esercizio precedente

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(3+\frac{7}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{3} = \infty$

Una modalità analoga può essere utilizzata anche per frazioni contenenti quantità irrazionali, potendo riscrivere anche le radici sotto forma di potenze con esponente razionale.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{\sqrt{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(2-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}} = 2$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x+x^{\frac{1}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)} = 2$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$

3. Limiti di funzioni razionali fratte

risolvibili mediante semplificazione della frazione. Cioè, ricordando il teorema di Ruffini, se

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

se $P(a)=Q(a)=0$, allora è utile semplificare la frazione per il polinomio $x-a$ che è un divisore comune.

(1) $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2+1}=\frac{-1+1}{1+1}=0$

(2) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-5x+10}{x^2-25}=\frac{10}{0}=\infty$

(3) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)}{(x+2)}=\frac{-2}{1}=-2$

(4) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)$ in questo caso ci troviamo in una condizione nella quale, sostituendo direttamente il valore $x=1$, dovremmo eseguire una differenza tra due infiniti, operazione non certo gestibile secondo le modalità consuete.
In tal caso sommeremo le due frazioni

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-1}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2}{1-x^3}=\frac{2}{0}=\infty$$

(5) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-10x+21}{x-3}$: scomponiamo il polinomio al numeratore, secondo le modalità del trinomio notevole

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-7)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x-7=-4$$

(6) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-9x^2+21x-4}{x-4}$: scomponiamo ancora il numeratore verificando se è divisibile per il denominatore, facendo riferimento al teorema di Ruffini: calcoliamo il polinomio al numeratore ponendo $x=4$; $P(4)=64-144+84-4=0$, cioè il resto della divisione sarà 0 e quindi il polinomio è divisibile per $x=4$, dando $\left(x^2-5x+1\right)(x-4)$, da cui

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-9x^2+21x-4}{x-4}=\lim_{x\to 4}\left(x^2-5x+1\right)=-3$$

4. Limiti con espressioni che contengono quantità irrazionali

Si possono ridurre, in molti casi, a espressioni razionali mediante l'introduzione di una nuova variabile ausiliaria.

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ le due radici hanno indice diverso, ma si possono ridurre allo stesso indice 6, applicando le proprietà delle radici, ottenendo $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[6]{(1+x)^3}-1}{\sqrt[6]{(1+x)^2}-1}$, ponendo $y^6=1+x$, e quindi per $x\to 0$ si ha $y\to 1$

$$\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{(y-1)\left(y^2+y+1\right)}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}$$

(2) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ ponendo $x=y^2$ (se $x\to 1$ allora $y\to 1$) si ha

$$\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y-1}{(y-1)(y+1)}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y+1}=\frac{1}{2}$$

questo limite si poteva anche calcolare così

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim_{x\to 64}\frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ ponendo $x=y^6$ si ha

$$\lim_{y\to 2}\frac{y^3-8}{y^2-4}=\lim_{y\to 2}\frac{(y-2)\left(y^2+2y+4\right)}{(y-2)(y+2)}=\lim_{y\to 2}\frac{y^2+2y+4}{y+2}=3$$

(4) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\frac{1}{9}$

Un altro procedimento per determinare il limite di un'espressione irrazionale consiste nel razionalizzare il numeratore o il denominatore la quantità irrazionale.

(1) $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ razionalizziamo il numeratore moltiplicando per $\left(2+\sqrt{x-3}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 7}\frac{\left(2-\sqrt{x-3}\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} &= \lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{\left(x^2-49\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}\\ \lim_{x\to 7}\frac{-\left(x-7\right)}{\left(x-7\right)\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)} &= \lim_{x\to 7}\frac{-1}{\left(x+7\right)\left(2+\sqrt{x-3}\right)}=-\frac{1}{56}\end{aligned}$$

(2) $\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$: in questo caso dobbiamo ricordare i prodotti notevoli (differenza di due cubi) per poter scomporre $x-8$:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = \lim_{x\to 8}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4=12$$

(3) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$: i due radicali hanno indici diversi; per ridurli allo stesso indice, 6, bisogna considerare il numeratore come la differenza di due cubi e il denominatore come la differenza di due quadrati, cioè

$$\begin{aligned}\sqrt{x}-1 &= \left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)\\ \sqrt[3]{x}-1 &= \left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)\end{aligned}$$

pertanto, sostiduendo nell'espressione del limite, si ottiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[6]{x^2}+\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}=\frac{3}{2}$$

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$: razionalizzaziamo il numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$$

(5) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$: anche qui razionalizziamo il denominatore:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)}=$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+6-x^2-2x+6}{\left(x^2-4x+3\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)} &=\\ \lim_{x\to 3}\frac{-4\left(x-3\right)}{\left(x-3\right)\left(x-1\right)\left(\sqrt{x^2-2x+6}+\sqrt{x^2+2x-6}\right)} &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(6) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+a}-\sqrt{x}$: razionalizziamo il numeratore di questa espressione intesa come una frazione apparente con denominatore 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0$$

(7) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x\left(x+a\right)}-x$: come sopra

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(x+a\right)-x^2}{\sqrt{x\left(x+a\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax}{x\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1\right)}=\frac{a}{2}$$

(8) $\lim_{x\to\infty}\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)$: razionalizzaziamo sempre il numeratore della frazione apparente

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt[3]{1-x^3}\right)\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\right)}{\left(x^2-x\sqrt[3]{1-x^3}+\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\right)} &= \\
\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1-x^3}{x^2-x\sqrt[3]{x^3\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}+\sqrt[3]{x^6\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}} &= \\
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}+x^2\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}} &= \\
\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2\left(1-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x^3}-1\right)^2}\right)} &= 0
\end{aligned}$$

(9) $\lim_{x\to5}\frac{3-\sqrt{4+x}}{-5+6x+4x^2-x^3}$: in questo caso dobbiamo sia scomporre il denominatore sia razionalizzare il numeratore; la scomposizione del denominatore è eseguibile con la regola di Ruffini osservando che tale polinomio dà resto zero per $x=5$ ed è quindi divisibile per $(x-5)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to5}\frac{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{-(x-5)\left(x^2+x-1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)} &= = \lim_{x\to5}\frac{5-x}{-(x-5)\left(x^2+x-1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to5}\frac{1}{\left(x^2+x-1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)} = \frac{1}{174}
\end{aligned}$$

(10) $=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}$: riscriviamo $\sin 3x=\sqrt{1-\cos^2 3x}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\sqrt{1-\cos 3x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos^2 3x}}{\sqrt{1-\cos 3x}}=\lim_{x\to0}\sqrt{\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{1-\cos 3x}}=\sqrt{2}$$

(11) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\cot x}{\sin x-\cos x}$: applichiamo le formule goniometriche

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-\cot x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\sin x\cos x(\sin x-\cos x)}=2\sqrt{2}$$

5. Limiti notevoli

5.1. Caso $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$: moltiplichiamo numeratore e denominatore per 3,

$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}$: scomponiamo $\sin^2 x=\sin x\cdot\sin x$, avremo

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to0}\sin x\frac{\sin x}{x}=0\cdot1=0$$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}\cdot\frac{2x}{5x}\cdot\frac{5x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\frac{\pi}{n}\right)$: sostituiamo ponendo $x=\frac{\pi}{n}$; per cui se $n\to\infty$, allora $x\to0$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\pi}{x}\sin x\right)=\lim_{x\to0}\left(\pi\frac{\sin x}{x}\right)=\pi$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$: applichiamo la formula goniometrica di bisezione, $\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{x^2}{4}}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$: applichiamo le formule di prostaferesi, $\sin x-\sin a=2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cos\frac{x+a}{2}=\cos a$$

(7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}$: in questo caso è possibile appilcare ancora le formule goniometriche, in particolare la definizione di tangente

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-(-\sin x+\cos x)}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(-\cos x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$: basta considerare l'uguaglianza $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0$$

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$: applichiamo le formule parametriche

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}-\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{8\left(\frac{x}{2}\right)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{4\tan^3\frac{x}{2}}{8\left(\frac{x}{2}\right)^3\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^3}\cdot\frac{1}{2\cos^3\frac{x}{2}\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}=\frac{1}{2}$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$: divido numeratore e denominatore per $6x$, 6 è il $mcm\,(2;3)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x-\sin 2x}{6x}}{\frac{x+\sin 3x}{6x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{6x}-\frac{1}{3}\frac{\sin 2x}{2x}}{\frac{x}{6x}+\frac{1}{2}\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}$$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin\pi x}$: sostituisco innanzitutto $z=1-x$, da cui $1+x=2-z$ per far tendere il limite a zero

$$\lim_{z\to 0}\frac{z(2-z)}{\sin[\pi(1-z)]}=\lim_{z\to 0}\frac{z(2-z)}{\sin[\pi z]}=\lim_{z\to 0}\frac{\pi z(2-z)}{\pi\sin\pi z}=\frac{2}{\pi}$$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$: razionalizzo il numeratore

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}=1\end{aligned}$$

5.2. Caso $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$.

- $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$: il limite notevole indica che è preferibile introdurre una nuova variabile tendente a zero, $z=1-x$, per cui se $x\to 1$ allora $z\to 0$, quindi

$$\lim_{z\to 0}z\tan\left[\frac{\pi}{2}(1-y)\right]=\lim_{z\to 0}z\tan\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}z\right]=\lim_{z\to 0}z\cot\left[\frac{\pi}{2}z\right]$$

ma la cotangente è il reciproco della tangente

$$\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}z}{\frac{\pi}{2}\cot\left[\frac{\pi}{2}z\right]}=\frac{2}{\pi}$$

- $\lim_{x\to 0}\cot 2x\cot\left[\frac{\pi}{2}-x\right]$: basta ricordare che $\cot\left[\frac{\pi}{2}-x\right]=\tan x$ e applicare il limite notevole

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{\tan 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\tan(x)}{x}\frac{2x}{2x\tan 2x}=\frac{1}{2}$$

5.3. Caso $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ o $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$.

- $\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$: introduciamo una nuova variabile in modo che tenda a zero al tendere di x a π: $z=\pi-x$, per cui

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{z}{2}\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(1-\cos\frac{z}{2}\right)}{2\frac{z}{2}}=0$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2\sin^2 x-5x^2}$: raccogliamo x^2 al numeratore e al denominatore

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2\sin^2 x-5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+1\right)}{x^2\left(2\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{x}-5\right)}=\frac{\frac{3}{2}}{-3}=-\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$: razionalizzaziamo il numeratore

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

5.4. Caso $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$ e $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}=1$.

- $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sin 3x}$: utilizziamo entrambi i due limiti notevoli presentati

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 2x}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

6. limiti con esponenziali

del tipo $\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)}=C$. Per risolvere tali limiti bisogna considerare che

(1) se esistono e sono finiti i limiti $\lim_{x\to a}[f(x)]=a$ e $\lim_{x\to a}g(x)=B$, allora $C=A^B$
(2) se $\lim_{x\to a}f(x)=A\neq 1$ e $\lim_{x\to a}g(x)=\pm\infty$, si può determinare immediatamente il risultato
(3) se $\lim_{x\to a}f(x)=1$ e $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$, si pone $f(x)=1+h(x)$, dove $h(x)\to 0$ per $x\to a$ e, quindi,

$$C=\lim_{x\to a}\left\{[1+h(x)]^{\frac{1}{h(x)}}\right\}^{h(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to a}h(x)g(x)}=e^{\lim_{x\to a}[f(x)-1]g(x)}$$

- $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}$: si ha che $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)=2$ e $\lim_{x\to 0}1+x=1$, per cui

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}=2^1=2$$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}$: si ha che $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)=\frac{1}{2}$ e $\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty$ quindi, ricordando l'andamento delle funzioni esponenziali con base tra 0 e 1, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}=0$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$: si ha che $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1$ e che $\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$, quindi procederemo secondo la terza modalità

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{-\frac{2x}{x+1}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2x}{x+1}}=e^{-2}$$

Questo limite poteva anche essere calcolato facendo riferimento al seguente limite notevole

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{k}{x}\right]^x=e^k$$

Infatti

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^{-1}}{e}=e^{-2}$$

- $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$ si ha $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)=\frac{2}{3}$ e $\lim\limits_{x\to0}x=0$ da cui

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$$

- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$: in questo caso basta scomporre il denominatore e semplificare

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$: si ha $\frac{1}{x^2}\to0$ e $\frac{2x}{x+1}\to2$ per cui

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=0$$

- $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$: si ha $\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\to\frac{3}{2}$ e $\frac{\sin x}{x}\to1$, da cui

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}=\left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$: si ha $\frac{x^2+2}{2x^2+1}\to\frac{1}{2}$ e $x^2\to\infty$, si ha

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^\infty=0$$

6.1. Caso limite notevole $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k$.

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$: basta considerare, rispetto al limite notevole, $k=-1$, per avere

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^x=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$: possiamo risolvere immediatamente

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=e^2$$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$: raccogliamo x al denominatore e semplifichiamo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{-1}{x}}{1}\right)^{-x}=e^{-1}$$

- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$: applichiamo la proprietà delle potenze

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2} &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^x\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right] &=\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x\left(1+\frac{-1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}\right)^x\cdot\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2\right] &=\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}\cdot 1 &= \frac{e^{-1}}{e^3}=e^{-4}\end{aligned}$$

6.2. caso dei limiti notevoli $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ e $\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$ $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

- $\lim_{x\to\infty}\left[\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right]$: applicando la proprietà dei logaritmi, riscriviamo

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)=\ln 2$$

- $\lim_{x\to-1}\frac{e^{(x+1)}-1}{x+1}$: basta porre $x+1=t$, da cui

$$\lim_{x\to-1}\frac{e^{(x+1)}-1}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

7. Esercizi sul significato di limite

Exercise 8. Cosa avviene per le radici dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$ se il coefficiente $a\to0$, i coefficienti b e c sono costanti e, inoltre, $b\neq0$

Soluzione:: applico la formula risolutiva

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

e calcolo il limite delle due soluzioni

$$\lim_{a\to0}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

nel caso del segno positivo, razionalizzo il numeratore

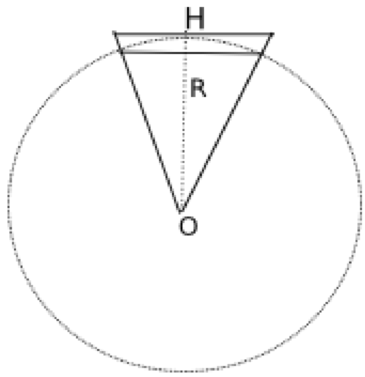
$$\lim_{a\to0}\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\lim_{a\to0}\frac{-b^2+b^2-4ac}{2a\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)}=\lim_{a\to0}\frac{-2c}{\left(\sqrt{b^2-4ac}+b\right)}=-\frac{c}{b}$$

nel caso della radice con segno negativo

$$\lim_{a\to0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\lim_{a\to0}\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\infty$$

Exercise 9. Trovare il limite dei perimetri dei poligoni regolari di n lati inscritti in un cerchio di raggio R e circoscritti intorno ad esso, quando $n\to\infty$

Soluzione:: facciamo riferimento alla figura sotto



se il poligono regolare inscritto ha n lati, allora l'angolo al centro sotteso è $\frac{2\pi}{n}$ e un suo angolo alla circonferenza $\frac{\pi}{n}$; applicando il teorema della corda (ogni corda è uguale al prodotto del diametro per il seno dell'angolo alla circonferenza) si ottiene

$$l_{inscritto} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$$

il perimetro sarà pertanto

$$2p = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

al tendere di $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} 2nR \sin \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 2R \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = 2\pi R$$

nel caso del lato circoscritto possiamo applicare il teorema dei triangoli rettangoli con un cateto R e angolo opposto $\frac{\pi}{n}$

$$l_{circos} = 2R \tan \frac{\pi}{n}$$

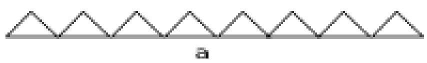
il perimetro sarà

$$2p_{circos} = 2nR \tan \frac{\pi}{n}$$

passando al limite, si ha

$$\lim_{n\to\infty} 2nR \tan \frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} 2R \frac{\tan \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = 2\pi R$$

EXERCISE 10. Il segmento $AB = a$, mostrato in figura, è diviso in n segmenti uguali e su ciascuno di essi, preso come base, è costruito un triangolo isoscele di angolo di base $\alpha = 45°$. Mostrare che il limite del perimetro della linea spezzata così ottenuta non è uguale alla lunghezza del segmento AB, malgrado che nel limite questa linea spezzata «si confonda geometricamente con AB».



Soluzione:: Calcoliamo il lato del triangolo isoscele costruito sul tratto del segmento AB, essendo tale triangolo metà di un quadrato di diagonale a/n

$$l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2n}$$

il perimetro di tale triangolo sarà

$$2p = \frac{2a\sqrt{2}}{2n} + \frac{a}{n} = \frac{a}{n}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

il perimetro complessivo è pari a $n - volte$ il valore scritto. Se n tende all'infinito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(\sqrt{2}+1\right) \cdot n = a\left(\sqrt{2}+1\right)$$

EXERCISE 11. Determinare le costanti k e b ricavate dall'equazione

$$\lim_{x\to\infty} \left(kx + b - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0$$

Soluzione:: sommiamo le frazioni presenti nella funzione

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3(k-1)+bx^2+x(k+b)-1}{x^2+1}\right)=0$$

affinché il limite tenda a zero è necessario che il grado del numeratore risulti inferiore a quello del denominatore, per cui

$$k-1=0 \qquad k=1$$
$$b=0$$

12. Infinitesimi e Infiniti

12.1. Infinitesimi. Se $\lim_{x\to a} f(x)=0$ si dice allora che la funzione $f(x)$ è *infinitesima* per $x\to a$. Si dice analogamente la funzione $f(x)$ infinitesima quando $x\to\infty$.

La somma e il prodotto di un numero finito di infinitesimi per $x\to a$ sono anche infinitesimi per $x\to a$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime per $x\to a$ e se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=C$$

dove $C\neq 0$, si dice allora che le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono *infinitesime dello stesso ordine*; se invece $C=0$ si dice allora che la funzione $f(x)$ è un *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $g(x)$.

Se

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$

si dice allora che le due funzioni sono equivalenti per $x\to a$. Ad esempio per $x\to 0$, si ha

$$\sin x\sim x \qquad \tan x\sim x$$
$$\ln(1+x)\sim \quad x$$

Il limite del rapporto tra due infinitesimi resta immutato se i termini del rapporto vengono sostituiti con infinitesimi equivalenti. In virtù di questo teorema, per trovare il limite della funzione

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

dove $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$ per $x\to a$, si possono togliere (o aggiungere) nel numeratore e nel denominatore della frazione infinitesimi di ordine superiore scelti in modo che le espressioni rimaste siano equivalenti a quelle iniziali.

12.2. Infiniti. Se per un numero grande a piacere N esiste un numero $\delta(N)$ tale che per $0<\|x-a\|a\delta(N)$ la disuguaglianza $\|f(x)\|>N$ sia soddisfatta, si dice allora che la funzione $f(x)$ è infinita per $x\to a$.

Si definiscono analogamente le funzioni $f(x)$ infinite quando $x\to\infty$. Analogamente agli infinitesimi, si introduce la nozione di infiniti di ordine diverso.

Exercise 13. Applicando il teorema relativo al rapporto tra due infinitesimi, si chiede di trovare i limiti:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot\sin 5x}{(x-x^3)^2}=3\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 5\frac{\sin 5x}{5x}=15$ essendo i termini x^4 e x^6 infinitesimi di ordine superiore
- $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}=\frac{\arcsin x}{-x}=-1$
- $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=-1$

13.1. Continuità delle Funzioni. Si dice che la funzione $f(x)$ è continua per $x=a$ (o nel punto a), se

(1) è definita per $x=a$, cioè se esiste l'immagine $f(a)$
(2) esiste il limite ed è finito per $x \to a$
(3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Se una funzione è continua in ogni punto di un campo essa si dice continua in questo campo.

Exercise 14. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & per \quad x \neq 2 \\ A & per \quad x = 2 \end{cases}$$

Scegliere il valore di $A=f(2)$ della funzione in maniera tale che la funzione $f(x)$ così completata sia continua per $x=2$.

Soluzione:: calcoliamo il limite destro e sinistro della funzione

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \\ \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \end{aligned}$$

pertanto basta porre $A=4$

Exercise 15. Il secondo membro dell'uguaglianza

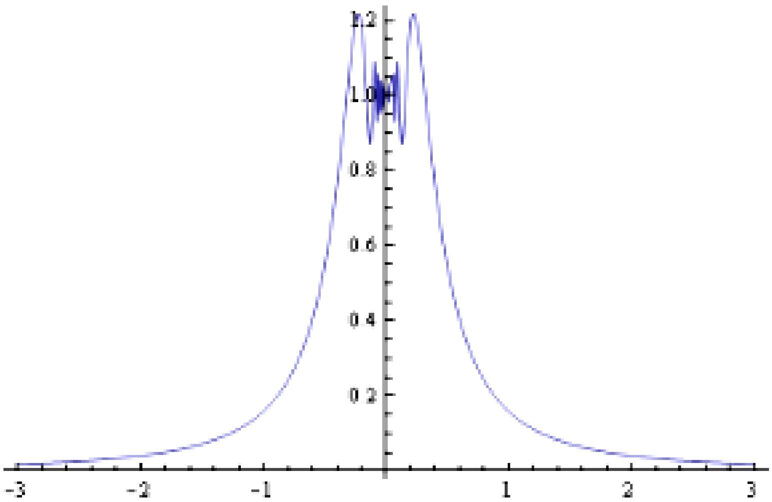
$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}$$

perde significato per $x=0$. Scegliere il valore di $f(0)$ affinché la funzione $f(x)$ risulti continua per $x=0$.

Soluzione:: calcoliamo il limite della funzione assegnata per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} 1 - x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 - 0 = 1$$

ricordando che il $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$. Pertanto basterà che $f(0)=1$.
Si osservi per rendersene conto il grafico della funzione



Exercise 16. La funzione $f(x)$ non è definita per $x=0$. Determinare $f(0)$ in modo tale che $f(x)$ sia continua per $x=0$, se

- $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{x}$: calcoliamo il limite della funzione per $x \to 0$

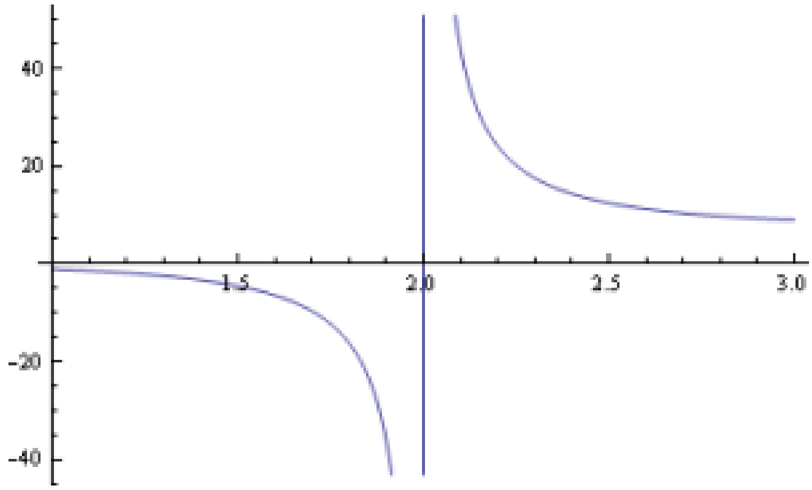
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{xe^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{2}{e^x} = 2$$

Exercise 17. Studiare la continuità delle funzioni:

- $y=\frac{x^2}{x-2}$: calcoliamo il limite della funzione per $x\to 2$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2}{x-2} &= +\infty\\ \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2}{x-2} &= -\infty\end{aligned}$$

risulta una discontinuità di 2^aspecie. La sua forma grafica nell'intorno del punto di discontinuità è mostrata in figura



- $y=\frac{1+x^3}{1+x}$: calcoliamo il limite della funzione per $x\to -1$

$$\lim_{x\to -1^\pm}\frac{1+x^3}{1+x}=\lim_{x\to -1^\pm}\frac{(1+x)\left(x^2-x+1\right)}{1+x}=3$$

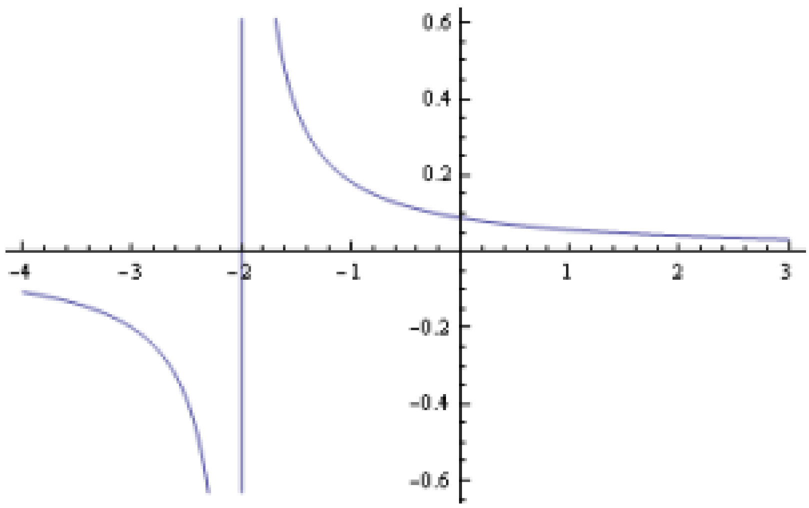
discontinuità apparente ed eliminabile.

- $y=\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$: calcoliamo il limite per $x\to\pm 2$, razionalizzando il numeratore

$$\lim_{x\to -2^\pm}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to -2^\pm}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to -2^\pm}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\pm\infty$$

$$\lim_{x\to 2^\pm}\frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}=\lim_{x\to 2^\pm}\frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\lim_{x\to 2^\pm}\frac{1}{(x+2)\left(\sqrt{7+x}+3\right)}=\frac{1}{24}$$

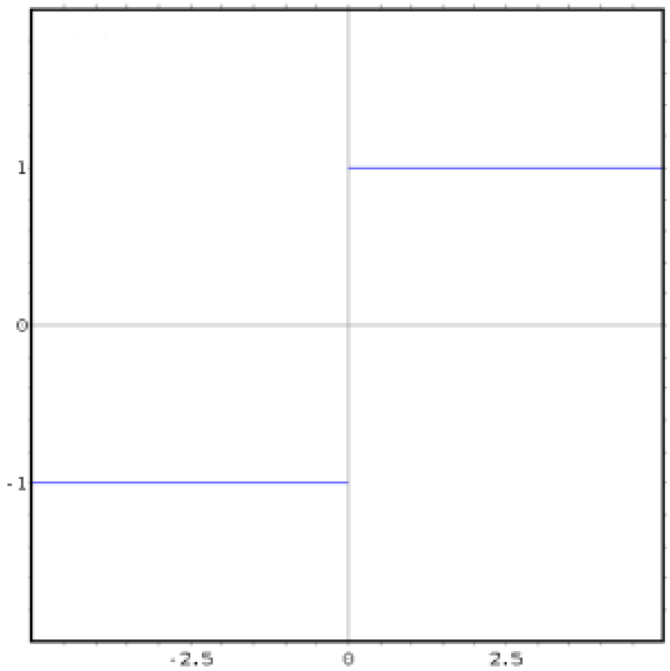
se ne deduce che per $x\to -2$ si ha una discontinuiità di seconda specie, mentre per $x\to 2$ si ha una discontinuità eliminabile come risulta dal grafico in figura



- $y=\frac{x}{|x|}$: facciamo lo studio dei limiti prima e dopo lo zero

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{|x|} &= 1\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{|x|} &= -1\end{aligned}$$

se il limite destro e sinistro esistono e sono finiti, si ha una discontinuità di prima specie. In questa funzione il salto è pari a 2, come mostrato in figura



- $y = \ln(\cos x)$: calcoliamo il limite per $x \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) = -\infty$$

con una discontinuità di seconda specie.