Esercizi di Analisi Matematica

CAPITOLO 1

LE FUNZIONI

Exercise 1.0.1. Risolvere le seguenti disuguaglianze:

(1) $\mid x-1\mid<3$
(2) $\mid x+1\mid>2$
(3) $\mid 2x+1\mid<1$
(4) $\mid x-1\mid<\mid x+1\mid$

Caso: (a): $\mid x-1\mid<3$, risolvo $\begin{cases} x-1<3 \\ x\geq 1\end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<3 \\ x<1\end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<4 \\ x\geq 1\end{cases}$ cioè $1\leq x<4$ e $\begin{cases} x>-2 \\ x<1\end{cases}$ cioè $-2<x<1$. L'unione tra le due dà la soluzione $-2<x<4$

Caso: (b): $\begin{cases} x+1>2 \\ x\geq -1\end{cases} \cup \begin{cases} -x-1>2 \\ x<-1\end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x>1 \\ x\geq -1\end{cases}$ cioè $x>1$ e $\begin{cases} x<-3 \\ x<-1\end{cases}$ cioè $x<-3$, pertanto $x<-3\cup x>1$

Caso: (c): $\begin{cases} 2x+1<1 \\ x\geq -\frac{1}{2}\end{cases} \cup \begin{cases} -2x-1<1 \\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} x<0 \\ x\geq -\frac{1}{2}\end{cases}$ cioè $-\frac{1}{2}\leq x<0$ e $\begin{cases} x>-1 \\ x<-\frac{1}{2}\end{cases}$ cioè $-1<x<-\frac{1}{2}$. pertanto $-1<x<0$

Caso: (d): in questo caso, $\begin{cases} -x+1<-x-1 \\ x<-1\end{cases} \cup \begin{cases} -x+1<x+1 \\ -1\leq x<1\end{cases} \cup \begin{cases} x-1<x+1 \\ x\geq 1\end{cases}$, si avrà quindi $\begin{cases} 0<-2 \\ x<1\end{cases}$ cioè non si hanno soluzioni e $\begin{cases} x>0 \\ -1\leq x<1\end{cases}$ cioè $0<x<1$ e $\begin{cases} 0<2 \\ x\geq 1\end{cases}$ cioè $x\geq 1$; si avrà pertanto $x>0$

1.1. Dominio e Codominio

Exercise 1.1.1. Trovare $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ se $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$

Si tratta di trovare le immagini dei valori di x indicati, sostituendo all'incognita il valore indicato:

$f(-1)=(-1)^3-6\cdot(-1)^2+11\cdot(-1)-6=-1-6-11-6=-24$:
$f(0)=(0)^3-6\cdot(0)^2+11\cdot(0)-6=-6$:
$f(1)=(1)^3-6\cdot(1)^2+11\cdot(1)-6=1-6+11-6=0$: in questo caso $x=1$ è una radice della funzione polinomiale
$f(2)=(2)^3-6\cdot(2)^2+11\cdot(2)-6=8-24+22-6=0$: anche $x=2$ è una radice
$f(3)=(3)^3-6\cdot(3)^2+11\cdot(3)-6=27-54+33-6=0$: $x=3$ è un'altra radice
$f(4)=(4)^3-6\cdot(4)^2+11\cdot(4)-6=64-96+44-6=6$:

Avendo trovato le 3 radici di una funzione polinomiale di terzo grado, possiamo vedere che, tale polinomio si può scomporre nel prodotto dei seguenti fattori: $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

Exercise 1.1.2. Trovare $f(0)$, $f(-\frac{3}{4})$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $1/f(x)$ se $f(x)=\sqrt{1+x^2}$

$f(0)=\sqrt{1+(0)^2}=1$:
$f\left(-\frac{3}{4}\right)=\sqrt{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$:
$f(-x)=\sqrt{1+(-x)^2}=f(x)=\sqrt{1+x^2}$: la funzione è quindi pari
$f(\frac{1}{x})=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=\frac{1}{|x|}\sqrt{1+x^2}=\frac{f(x)}{|x|}$:
$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\frac{f(x)}{[f(x)]^2}$:
:

Exercise 1.1.3. Sia $f(x)=\arccos(\log x)$. Calcolare $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$

$f\left(\frac{1}{10}\right)=\arccos\left(\log\frac{1}{10}\right)=\arccos(-\log 10)=\arccos(-1)=\pi$:

$f(1) = \arccos(\log 1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$:
$f(10) = \arccos(\log 10) = \arccos(1) = 0$:
:

EXERCISE 1.1.4. Sia $f(x)$ una funzione lineare. Determinare questa funzione se $f(-1) = 2$ e $f(2) = -3$

Soluzione:: Una funzione lineare in forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, una funzione, quindi, con due parametri, m, q. Per determinarli, bastano quindi le due condizioni.

$$\begin{cases} 2 = -1m + q \\ -3 = 2m + q \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = -1m + q \\ 5 = -3m \end{cases} \quad \begin{cases} m = -\frac{5}{3} \\ q = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

la funzione richiesta è quindi: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$ o in forma implicita, $5x + 3y - 1 = 0$

EXERCISE 1.1.5. Determinare una funzione razionale intera $f(x)$ di secondo grado se $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 5$.

Soluzione:: Una funzione razionale espressa nella forma esplicita è del tipo $y = ax^2 + bx + c$. E' una funzione con tre parametri a, b, c. La loro individuazione richiede l'impostazione e la risoluzione di un sistema tre equazioni tre incognite

$$\begin{matrix} f(0) = 1 \\ f(1) = 0 \\ f(3) = 5 \end{matrix} \begin{cases} 1 = c \\ 0 = a + b + c \\ 5 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 - b \\ -9 - 9b + 3b = 4 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{6} \\ b = -\frac{13}{6} \\ c = 1 \end{cases}$$

l'equazione di secondo grado cercata è pertanto $y = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$

EXERCISE 1.1.6. Si sa che $f(4) = -2$ e che $f(5) = 6$. Calcolare il valore approssimato di $f(4,3)$ considerando la funzione $f(x)$ lineare per il segmento $4 \leq x \leq 5$ (*interpolazione lineare della funzione*).

Soluzione:: l'interpolazione lineare presuppone che la curva tra i due punti possa essere approssimata dalla retta che congiunge i due punti $A(4; -2)$ e $B(5; 6)$.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y + 2}{6 + 2} = \frac{x - 4}{5 - 4}$$

$$\frac{y + 2}{8} = x - 4$$

da cui si ottiene:

$$y = 8x - 34$$

calcoliamo ora $f(4,3)$ sostituendo $x = 4,3$. Si ha

$$y = 8 \cdot 4,3 - 34 = 0,4$$

EXERCISE 1.1.7. Trovare il campo di esistenza delle funzioni:

- $y = \frac{x^2 - 4x}{3 - x}$: funzione razionale; i valori della x che annullano il denominatore non hanno una immagine nel codominio; per essi quindi la funzione non esiste

  $$3 - x \neq 0 \qquad x \neq 3$$

  si può esprimere anche: $\mathbb{R} - \{\not\Vdash\}$oppure

  $$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$$

- $y = \frac{x^2-x}{x^2-4x+4}$: funzione razionale, che, ricordando i prodotti notevoli, si può riscrivere nella forma

$$y = \frac{x^2 - x}{(x-2)^2}$$

il denominatore si annulla per $x = 2$, e il campo di esistenza sarà

$$\mathbb{R} - \{\nvDash\} \quad oppure \quad (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$$

- $y = \frac{x^3+2x}{x^2-3x+2}$: funzione razionale; il denominatore si annulla per $x = 1$ e $x = 2$ per cui, il campo di esistenza sarà

$$\mathbb{R} - \{\nVdash; \nvDash\} \quad oppure \quad (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$$

- $y = \sqrt{x+1}$: funzione irrazionale; nel caso di una radice di indice pari, il radicando deve essere non negativo

$$x + 1 \geq 0 \qquad x \geq -1$$

oppure

$$[-1; +\infty)$$

- $y = \sqrt[3]{x+1}$: la radice ha indice dispari; ha significato per qualunque radicando $(-\infty; +\infty)$
- $y = \frac{1}{4-x^2}$: una funzione razionale è sempre definita tranne per i valori che annullano il denominatore

$$x \neq \pm 2$$
$$(-\infty; -2) \cup \quad (-2; +2) \cup \quad (2; +\infty)$$

- $y = \sqrt{x^2-2}$: funzione irrazionale, il radicando deve essere non negativo

$$x^2 - 2 \geq 0 \quad x \leq -\sqrt{2} \quad \vee x \geq \sqrt{2}$$
$$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \quad (\sqrt{2}; +\infty)$$

- $y = \sqrt{2+x-x^2}$: funzione irrazionale; il radicando deve essere non negativo

$$-x^2 + x + 2 \geq 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = 2; -1$$
$$-1 \leq x \leq 2$$

il campo di esistenza è pertanto $[-1; 2]$

- $y = \frac{x+2}{x-\sqrt{x+2}}$: funzione fratta con denominatore irrazionale; l'individuazione del campo di esistenza passa attraverso il verificarsi contemporaneo delle due condizioni: 1° denominatore diverso da zero e radicando non negativo. Le due condizioni vanno quindi messe a sistema, per ottenere lo/gli intervallo/i comune/i.

$$\begin{cases} x - \sqrt{x+2} & \neq & 0 \\ x + 2 & \geq & 0 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 & \neq & 0 \\ x & \geq & -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 2 & & x \neq -1 \\ x & \geq & -2 \end{cases}$$

il campo di esistenza sarà

$$[-2; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$$

- $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$: in questo caso vi sono due radicali e quindi due saranno le condizioni che dovranno essere contemporaneamente soddisfatte:

$$\begin{cases} -x \geq 0 & x \leq 0 \\ 2 + x > 0 & x > -2 \end{cases}$$

l'intervallo comune è $(-2; 0]$

- $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-1}$: funzione fratta con numeratore irrazionale e denominatore razionale. In tal caso le condizioni per la determinazione del campo di esistenza sono duplici, la prima riguardante il radicale, che deve essere non negativo, e la seconda relativa all'annullamento del denominatore che rende la frazione priva di significato. Pertanto
$$\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$
da cui
$$\begin{cases} x \geq -3 \\ x \neq 1 \end{cases}$$
Il C.E si potrà scrivere anche
$$]-3;1) \quad \cup \quad (1;+\infty)$$

- $y = \left(x^4 - 1\right)^{\frac{1}{4}}$: la funzione è irrazionale per la presenza dell'esponente razionale e l'indice della radice è pari, 4; il suo radicando deve essere non negativo
$$x^4 - 1 \geq 0$$
che si può scomporre in
$$(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right) \geq 0$$
il termine di grado 2 è sempre positivo, per cui
$$\begin{array}{ll} 1\,fattore & x \geq 1 \\ 2\,fattore & x \geq -1 \end{array}$$
Il CE sarà quindi
$$\begin{array}{ccc} x \leq -1 & \vee & x \geq 1 \\ (-\infty;-1[& &]1;+\infty) \end{array}$$

- $y = \sqrt{1 - \sqrt{x-1}}$: funzione irrazionale con radicando irrazionale. Due condizioni
$$\begin{cases} 1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sqrt{x-1} \leq 1 \\ x \geq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \quad CE: \quad [1;2]$$

- $y = \lg\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$: la funzione logaritmica è definita quando l'argomento è maggiore di zero:
$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$
risolviamo la disequazione fratta
$$\begin{array}{ll} N > 0 & x > -2 \\ D > 0 & x < 2 \end{array}$$
si ottiene, come campo di esistenza, $(-2;2)$.

- $y = \frac{e^x}{\ln^2 x - 4}$; funzione trascendente con al numeratore una funzione esponenziale e al denominatore una funzione logaritmica. La funzione esponenziale è definita per ogni valore di x; il logaritmo al denominatore deve avere argomento positivo e il denominatore stesso deve essere diverso da zero. Riassumendo
$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x - 4 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \neq 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq \pm 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2, \frac{1}{e^2} \end{cases}$$
Il CE, sotto forma di intervalli, sarà
$$\left(0;\frac{1}{e^2}\right) \cup \quad \left(\tfrac{1}{e^2};e^2\right) \cup \quad \left(e^2;+\infty\right)$$

- $y = \arccos\frac{2x}{1+x}$: la funzione inversa del coseno richiede che il suo argomento sia compreso tra -1 e 1 e inoltre l'argomento frazionario richiede che il denominatore non si annulli,

$$\begin{cases} -1 \le \frac{2x}{1+x} \le & 1 \\ x+1 \ne 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2x}{1+x} \ge -1 \\ \frac{2x}{1+x} \le 1 \\ x \ne -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x+1}{1+x} \ge 0 \\ \frac{x-1}{1+x} \le 0 \\ x \ne -1 \end{cases}$$

studiamo le due disequazioni fratte, la cui risoluzione assorbe la condizione relativa al denominatore
  - $\frac{3x+1}{1+x} \ge 0$ $\begin{array}{ll} N \ge 0 & x \ge -\frac{1}{3} \\ D > 0 & x > -1 \end{array}$ da cui si ottiene $x < -1 \vee x \ge -\frac{1}{3}$
  - $\frac{x-1}{1+x} \le 0$ $\begin{array}{ll} N \ge 0 & x \ge 1 \\ D > 0 & x > -1 \end{array}$ da cui si ottiene $-1 < x \le 1$
  - riassumendo le condizioni trovate, che devono valere contemporaneamente, si ha $-\frac{1}{3} \le\le 1$ oppure $[-\frac{1}{3}; 1]$
- $y = \sqrt{\sin 2x}$: il radicale deve essere non negativo

$$\sin \ge 0 \quad 2k\pi \le 2x \le \pi + 2k\pi \quad k\pi \le x \le \pi + k\pi$$

Exercise 1.1.8. Sia $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Trovare

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \quad e \quad \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

Soluzione:: primo caso

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 + 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(4x^4 - 10x^2 - 20\right) \\ &= 2x^4 - 5x^2 - 10 \end{aligned}$$

secondo caso

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2}\left[2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10 - 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 6x + 10\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(-6x^3 + 12x\right) \\ &= -3x^3 + 6x \end{aligned}$$

osservando i due risultati si può osservare che: $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$

Exercise 1.1.9. La funzione $f(x)$ definita nel campo simmetrico $-l < x < l$ si dice *pari* se $f(x) = f(-x)$ e *dispari* se $f(-x) = -f(x)$. Indicare se le funzioni sono pari o dispari:

- $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$: calcoliamo $f(-x) = \frac{1}{2}(a^{-x} + a^x)$ da cui si ha $f(x) = f(-x)$ funzione pari
- $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$: calcoliamo $f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2}$ da cui si ha $f(x) = f(-x)$ funzione pari
- $f(x) = \lg\frac{1+x}{1-x}$: calcoliamo $f(-x) = \lg\frac{1-x}{1+x} = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\lg\frac{1+x}{1-x} = -f(x)$ funzione dispari

Exercise 1.1.10. Dimostrare che ogni funzione $f(x)$ definita nell'intervallo $-l < x < l$ può essere espressa come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

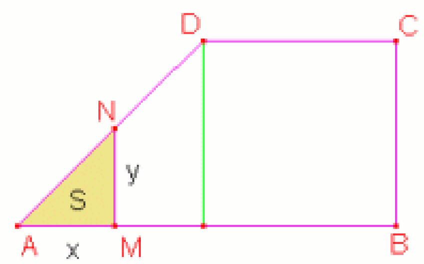
Soluzione:: abbiamo visto in precedenza che

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

ma $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$ è pari poiché $\varphi(x) = \varphi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)]$ e $\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$ è dispari poiché $\psi(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\psi(x)$; ne segue che

$$f(x) = \underset{pari}{\varphi(x)} + \underset{dispari}{\psi(x)}$$

Exercise 1.1.11. Esprimere la lunghezza del segmento $y = MN$ e l'area S della figura AMN come funzioni di $x = AM$ (fig.1), dove $AB = a$; $BC = b$; $AH = c$. Costruire il grafico di queste funzioni

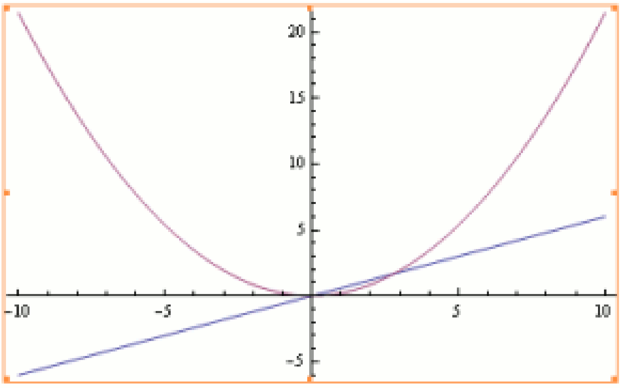


Soluzione:: I due triangoli rettangoli AHD e AMN sono tra loro simili, perciò $AH : BC = AM : MN \quad c : b = x : y$. Ne segue che $y = \frac{b}{c}x$ con $b > c$. La superficie del triangolo è

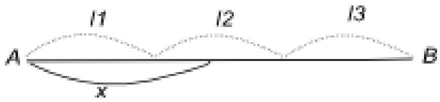
$$S = x \cdot \frac{b}{c}x \cdot \frac{1}{2} = \frac{b}{2c}x^2$$

con $0 \leq x \leq c$

La funzione $y(x)$ è rappresentabile mediante una retta passante per l'origine (senza termine noto) e con coefficiente angolare $\frac{b}{c}$, mentre la funzione $S(x)$ è una parabola di vertice $V(0;0)$ e concavità rivolta verso l'alto.



Exercise 1.1.12. 1 - La densità lineare (massa dell'unità di lunghezza) di una asta $AB = l$, vedi figura, è rispettivamente uguale a q_1, q_2, q_3 per i segmenti $AC = l_1$, $CD = l_2$, e $DB = l_3$ con $(l_1 + l_2 + l_3 = l)$. Esprimere la massa m del segmento di lunghezza variabile $AM = x$ di questa asta in funzione di x. Costruire il grafico di questa funzione.



Soluzione:: le densità lineari nei vari tratti sono indicate da:

$$q_1 = \frac{m_1}{l_1} \qquad q_2 = \frac{m_2}{l_2} \qquad q_3 = \frac{m_3}{l_3}$$

- se $0 \leq x \leq l_1$ allora $q_1 = \frac{m}{x}$ e $m = q_1 x$. negli estremi: $x = 0 \Rightarrow m = 0$; $x = l_1 \Rightarrow m = m_1$
- se $l_1 \leq x \leq l_1 + l_2$ allora $m = q_1 l_1 + q_2 (x - l_1) = q_1 l_1 + q_2 x - q_2 l_1 = q_2 x + l_1 (q_1 - q_2)$; negli estremi: $x = l_1 \Rightarrow m = m_1$; $x = l_1 + l_2 \Rightarrow m = m_2 + m_1$
- se $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$ allora $m = q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3 (x - l_1 - l_2) = q_3 x + l_1 (q_1 - q_3) + l_2 (q_2 - q_3)$; negli estremi: $x = l_1 + l_2 \Rightarrow m = m_1 + m_2$; $x = l \Rightarrow m = q_3 l_1 + q_3 l_2 + q_3 l_3 + q_1 l_1 - q_3 l_1 + q_2 l_2 - q_3 l_2 = m_1 + m_2 + m_3$
- Il grafico è una retta nel piano x, m

Exercise 1.1.13. Trovare $\varphi[\psi(x)]$ e $\psi[\varphi(x)]$ se $\varphi(x) = x^2$ e $\psi(x) = 2^x$

Soluzione:: $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$; $\psi[\varphi(x)] = 2^{x^2}$

Exercise 1.1.14. Trovare $f\{f[f(x)]\}$ se $f(x) = \frac{1}{1-x}$

Soluzione:: $f[f(x)] = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = 1 - x$; $f\{f[f(x)]\} = 1 - 1 + x = x$

Exercise 1.1.15. Trovare $f(x+1)$ se $f(x-1) = x^2$

Soluzione:: $f(x) = (x+1)^2$ e $f(x+1) = (x+2)^2$

EXERCISE 1.1.16. Determinare le radici positive e negative della funzione y se:

- $y = x+1$ $\begin{array}{lll} y>0 & x+1>0 & -1<x<2 \\ y<0 & x+1<0 & x<-1 \end{array}$
- $y = 2+x-x^2$ $\begin{array}{lll} y>0 & 2+x-x^2 & x>-1 \\ y<0 & 2+x-x^2<0 & x<-1 \vee x>2 \end{array}$
- $y = x^3-3x$ raccogliendo: $y = x\left(x^2-3\right)$; studiamo il segno dei due fattori e quindi quello del prodotto:
$$\begin{array}{lll} 1\,fattore & x>0 & \\ 2\,fattore & x^2-3>0 & x<-\sqrt{3} \quad \vee \quad x>\sqrt{3} \end{array}$$
il prodotto sarà $\begin{array}{ll} >0 & -\sqrt{3}<x<0 \vee x>\sqrt{3} \\ <0 & x<-\sqrt{3} \vee 0<x<\sqrt{3} \end{array}$
- $y = \log\frac{2x}{1+x}$ il logaritmo è positivo quando l'argomento è >1 e negativo quando è tra 0 e 1; studiamo pertanto la frazione che rappresenta l'argomento del logaritmo
$$\begin{array}{cc} \dfrac{2x}{1+x}>1 & \dfrac{x-1}{1+x}>0 \\ N>0 & x>1 \\ D>0 & x>-1 \end{array}$$
si avrà $y>0$ per $x<-1 \vee x>1$ e $y<0$ per $-1<x<1$.

EXERCISE 1.1.17. Determinare la funzione inversa di y se:

- $y = 2x+3$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \frac{y-3}{2}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$.
- $y = x^2-1$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = [-1;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $x = \pm\sqrt{y+1}$ con $D = [-1;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$
- $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ con *dominio* : $(-\infty;+\infty)$ e *codominio* $= (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $y^3 = 1-x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$
- $y = \log\frac{x}{2}$ con $D = (0;+\infty)$ e $C = (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $10^y = \frac{x}{2}$ da cui $x = 2\cdot 10^y$ con $D = (-\infty;+\infty)$ e $C = (0;+\infty)$
- $y = \arctan 3x$ con $D = (-\infty;+\infty)$; risolvo rispetto a x: $3x = \tan y$ da cui $x = \frac{1}{3}\tan y$ con $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

EXERCISE 1.1.18. Sia data la funzione
$$y = \begin{cases} x & per \quad x \le 0 \\ x^2 & per \quad x>0 \end{cases}$$
trovarne la funzione inversa

Soluzione:: risolvendo rispetto a x si ha
$$x = \begin{cases} y & per \quad y \le 0 \\ \sqrt{y} & per \quad y>0 \end{cases}$$

EXERCISE 1.1.19. Esprimere le funzioni date in forma di successione di uguaglianze tali che ciascun termine di questa successione sia costituito da una funzione elementare (potenza, esponenziale, trigonometrica, ecc)

(1) $y = (2x-5)^{10}$: pongo $u = 2x-5$ e ottengo $y = u^{10}$
(2) $y = 2^{\cos x}$: pongo $u = \cos x$ e ottengo $y = 2^u$
(3) $y = \lg\tan\frac{x}{2}$: pongo $u = \frac{x}{2}$ e $v = \tan u$ e ottengo $y = \lg v$
(4) $y = \arcsin\left(3^{-x^2}\right)$: pongo $u = x^2$ e $v = 3^u$ e ottengo $y = \arcsin v$

EXERCISE 1.1.20. Trascrivere le funzioni date in forma di successioni di uguaglianze con l'aiuto di una sola uguaglianza:

(1) $y = u^2$, $u = \sin x$; si ha $y = \sin^2 x$
(2) $y = \arctan u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \lg x$; si ha $y = \arctan \lg^{\frac{1}{2}} x$
(3) $y = \begin{cases} 2u & se \quad u \le 0 \\ 0 & se \quad u>0 \end{cases}$ e $u = x^2-1$; si ha $y = \begin{cases} 2\left(x^2-1\right) & se \quad -1 \le x \le 1 \\ 0 & se \quad x<-1 \vee x>1 \end{cases}$

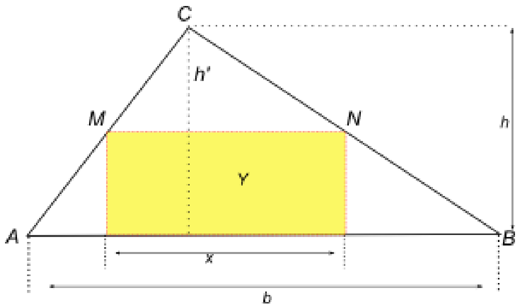
EXERCISE 1.1.21. Trovare l'espressione esplicita delle funzioni y date dalle equazioni:

(1) $x^2 - \arccos y = \pi$; si ha $\arccos y = x^2 - \pi$ da cui $y = \cos\left(x^2 - \pi\right) = \cos\left(\pi - x^2\right)$ (la funzione coseno è pari); infine $y = -\cos x^2$

(2) $x + \mid y \mid = 2y$; si ha $\begin{cases} x + y = 2y & se \quad y \geq 0 \\ x - y = 2y & se \quad y < 0 \end{cases}$ da cui si ottiene $\begin{cases} x = y & se \quad y \geq 0 \\ x = 3y & se \quad y < 0 \end{cases}$

(3) $10^x + 10^y = 10$; si ha $10^y = 10 - 10^x$ passando al logaritmo decimale si ottiene: $y = \log\left(10 - 10^x\right)$

EXERCISE 1.1.22. Un rettangolo è inscritto in un triangolo di base $b = 10$ e di altezza $h = 6$ (vedi figura). Esprimere l'area y di questo rettangolo come funzione della sua base x. Costruire il grafico di questa funzione e trovare il suo valore massimo.



Soluzione:: I due triangoli ABC e MNC sono simili, essendo le basi del rettangolo parallele.

$$b : x = h : h^{'}$$

dove $h^{'}$ rappresenta l'altezza del triangolo MNC. Si ha quindi

$$h^{'} = \frac{h}{b}x$$

L'altezza del rettangolo è pertanto

$$h - h^{'} = h - \frac{h}{b}x = \frac{h\left(b - x\right)}{b}$$

L'area del rettangolo si può quindi esprimere

$$y = x \cdot \frac{h\left(b - x\right)}{b} = -\frac{h}{b}x^2 + hx$$

La funzione si rappresenta graficamente mediante una parabola di vertice $V\left(\frac{b}{2}; \frac{hb}{4}\right)$ e intersezioni con l'asse x nei punti $O\left(0; 0\right)$ e $A\left(-b; 0\right)$

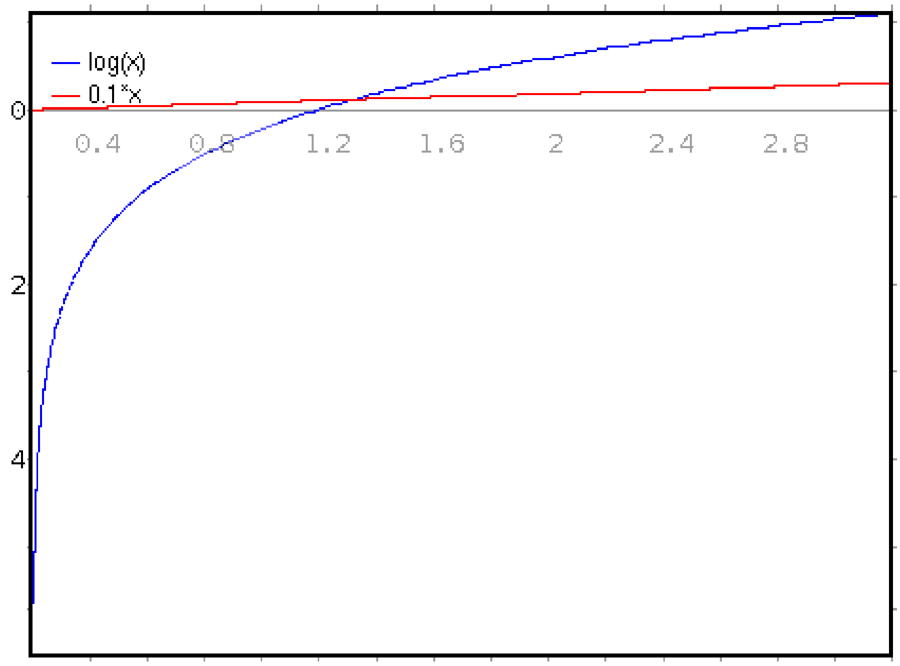
Essendo la parabola rivolta verso il basso, il suo valore massimo è rappresentato dallo stesso vertice.

EXERCISE 1.1.23. Risolvi graficamente le seguenti equazioni:

- $\log x = 0,1x$: la soluzione grafica passa attraverso l'analisi della intersezione tra le due curve che rappresentano separatamente il primo e il secondo membro, cioè scindiamo l'equazione nel seguente sistema:

$$\begin{cases} y = \log x \\ y = 0,1x \end{cases}$$

in questo modo si deve rappresentare due funzioni elementari, una logaritmica di base 10 ed una retta passante per l'origine di coefficiente angolare $m = 0,1$. I due grafici sono rappresentati nella figura sottostante:

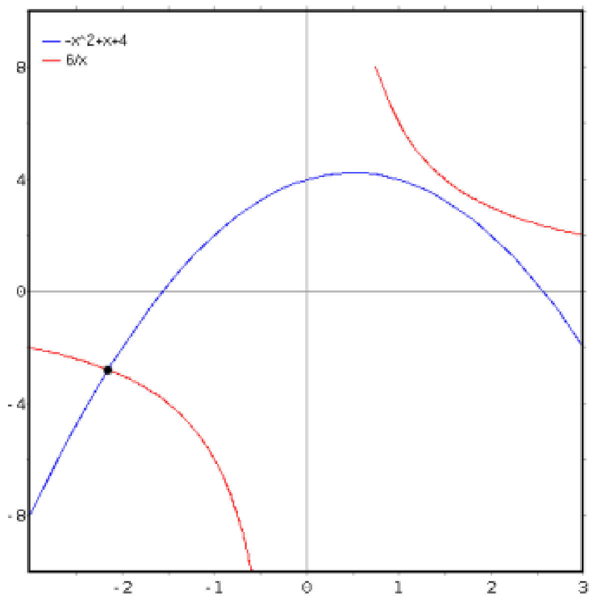


La soluzione si ha pertanto per un valore di x compreso tra $1,3$ e $1,4$.

Exercise 1.1.24. Risolvere graficamente il sistema di equazioni

$$\begin{cases} xy & = & 6 \\ x^2 - x + y & = & 4 \end{cases}$$

Soluzione:: la prima equazione rappresenta un'iperbole equilatera riferita ai propri assi (una classica proporzionalità inversa), la seconda equazione rappresenta la parabola $y = -x^2 + x + 4$ di vertice $V(-\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; -\frac{\triangle}{4a} = \frac{17}{4})$ e con concavità rivolta verso il basso (coefficiente di x^2 negativo). La soluzione è rappresentata dal punto di intersezione (evidenziato) tra le due curve, come si può osservare nella figura sottostante:



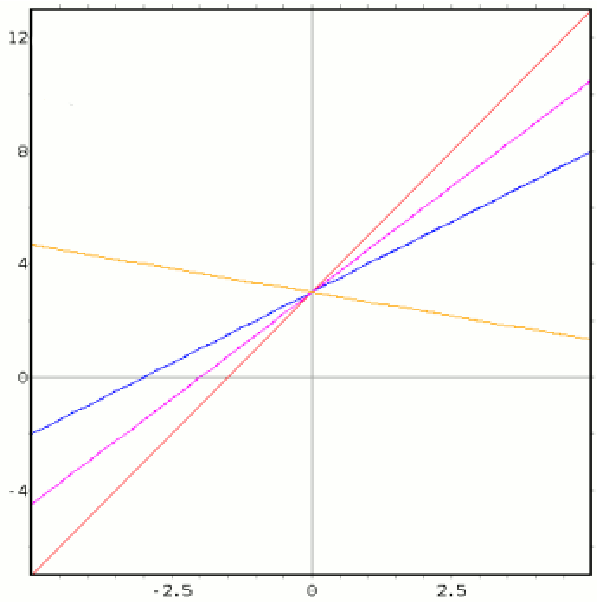
CAPITOLO 2

GRAFICI DELLE FUNZIONI ELEMENTARI

EXERCISE 2.0.25. Costruire i grafici delle funzioni lineari (rette).

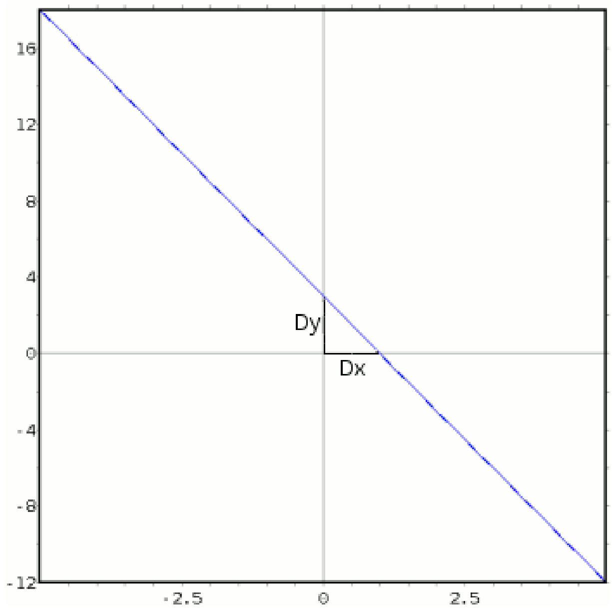
L'equazione generale di una retta nella forma esplicita è del tipo $y = mx + q$, dove m è detto coefficiente angolare e q ordinata all'origine. Questi due parametri hanno un semplice significato geometrico: q rappresenta l'ordinata del punto in cui la retta interseca l'asse y e m rappresenta il coefficiente angolare, cioè, la «pendenza» della retta e rappresenta il rapporto tra la variazione delle ordinate di due punti qualsiasi e la corrispondente variazione delle loro ascisse; in formula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ dove x_1, x_2 sono le ascisse dei due punti e y_1, y_2 le rispettive ordinate.

La rappresentazione grafica di una retta, identificabile tramite due soli punti, è facilmente ottenibile dalla conoscenza di questi due parametri.



Assegnato ad esempio $q = 3$ si ottiene un fascio di rette passanti per il punto $Q(0; 3)$; la seconda informazione sul valore di m consente di individuare in modo univoco la retta.

La figura sotto mostra il significato grafico di m:

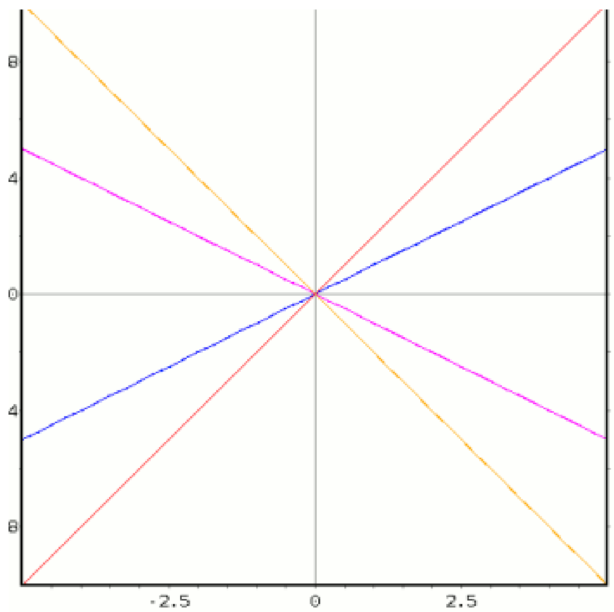


dove m è dato dal rapporto tra lo spostamento verticale per andare da un punto all'altro e quello corrispondente orizzontale. N.B: lo spostamento si intende positivo se è nei versi positivi (destra, alto), negativo nei versi negativi (sinistra, basso).

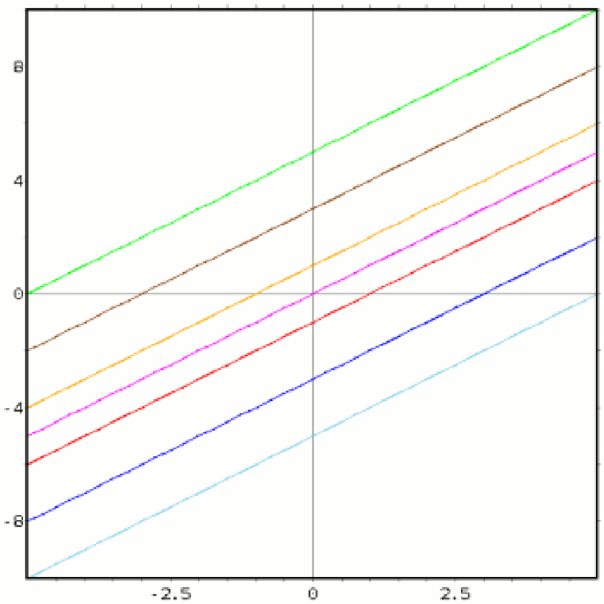
La retta del grafico avrà pertanto equazione $y = -3x + 3$.

In particolare:

(1) $y = kx$ se $k = 1, 2, -1, -2$; tutte le rette, avendo $q = 0$, passano per l'origine. Sono distinguibili solo per il diverso coefficiente angolare: maggiore è il valore, maggiore è la pendenza, se $m < 0$ la retta ha pendenza negativa

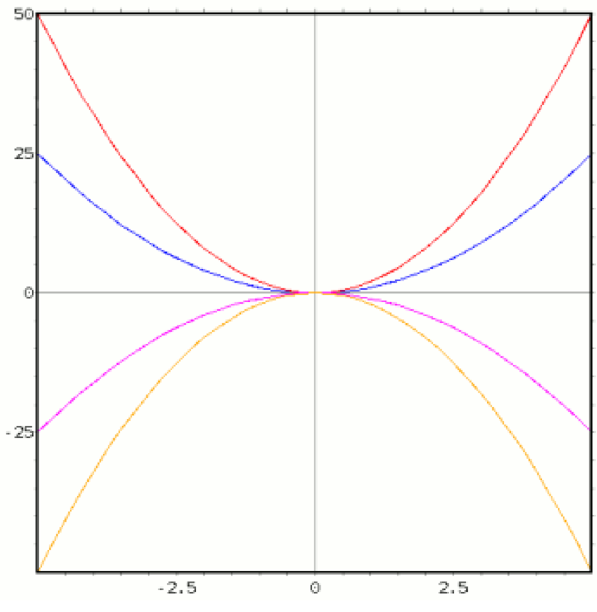


$y = x + b$ se $b = 1, 2, -1, -2$; questa equazione con parametro b identifica un fascio di rette improprie, cioè rette tra loro parallele, che hanno quindi in comune lo stesso coefficiente angolare (stessa direzione), ma intersecano l'asse y in punti distinti:

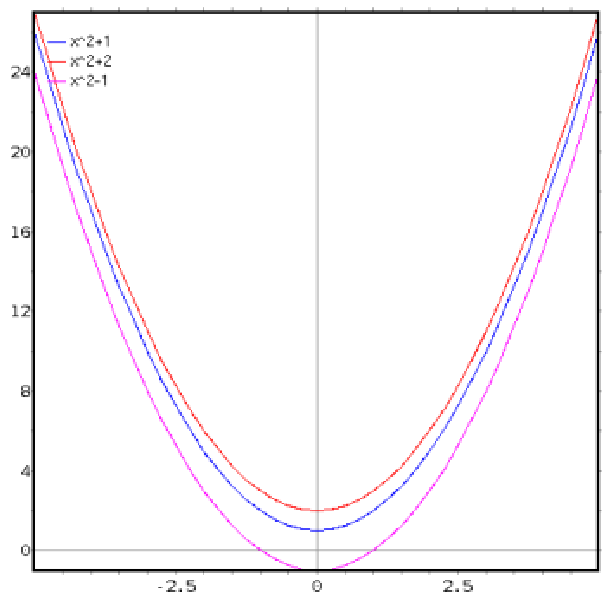


Exercise 2.0.26. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di secondo grado:

- $y = ax^2$ se $a = 1, 2, -1, -2$; questa è l'equazione di una parabola avente vertice nell'origine e asse di simmetria coincidente con l'asse delle ordinate. Il parametro a distingue le diverse concavità delle parabola, mentre le incognite x, y caratterizzano l'insieme dei punti del luogo geometrico o gli insiemi di elementi fra loro in proporzionalità quadratica

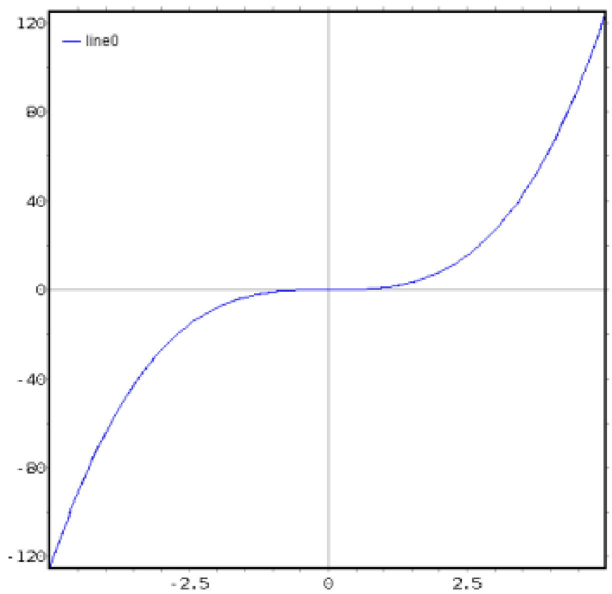


- $y = x^2 + c$ se $c = 1, 2, -1$; in questo caso si tratta di parabole traslate verticalmente, in quanto il parametro c rappresenta l'ordinata del vertice appartenente all'asse delle ordinate

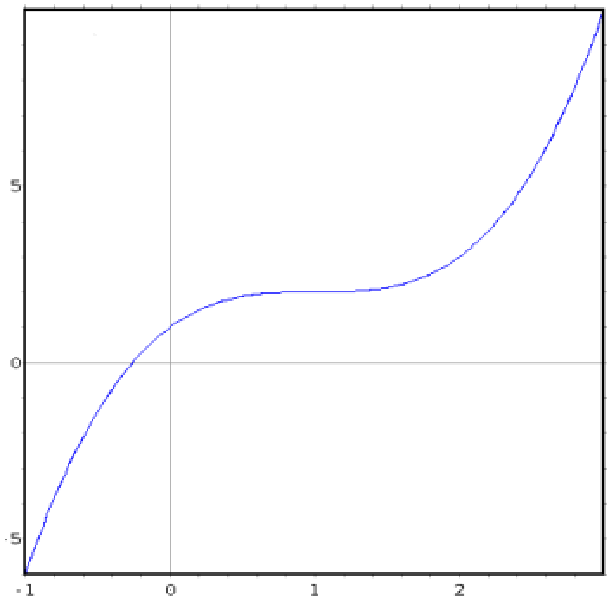


Exercise 2.0.27. Costruire i grafici delle funzioni razionali intere di grado superiore al secondo

$y = x^3$ (parabola cubica) funzione dispari con punto di inversione nell'origine



$y = 2 + (x-1)^3$ possiamo immaginare questa funzione come il prodotto di una traslazione orizzontale di vettore $(1,0)$ (funzione $(x-1)^3$e di un successiva traslazione verticale di vettore $(0,2)$ della funzione $y = x^3$. Il grafico mostra la funzione base e le successive traslazioni


5
0
-5
-1
0
1
2