# DERIVATE DELLE FUNZIONI

esercizi proposti dal Prof. Gianluigi Trivia

**Incremento della variabile indipendente e della funzione.**

Se $x$, $x_1$ sono due valori della variabile indipendente $x$, $y = f(x_2)$ e $y_1 = f(x_1)$ le corrispondenti immagini, allora

$$\triangle x = x_1 - x$$

è detto *incremento* della variabile $x$, e

$$\triangle y = y_1 - y = f(x_1) - f(x) = f(\triangle x + x) - f(x)$$

è detto incremento della funzione.

Il rapporto

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}$$

è detto *rapporto incrementale* della funzione.

Si chiama *derivata* della funzione $f(x)$ rispetto alla variabile $x$, e si indica con $y^{'} = \frac{dy}{dx}$, il limite, se esiste, del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento della variabile $x$, cioè

$$y^{'} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

La grandezza algebrica della derivata esprime il *coefficiente angolare* della tangente nel punto $x$ del grafico della funzione $f(x)$. La derivata esprime la *velocità di variazione* della funzione nel punto considerato.

Example. Trovare la derivata della funzione $y = x^2$

Calcoliamo il rapporto incrementale

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^2 - x^2}{\triangle x} = \frac{2x\triangle x + (\triangle x)^2}{\triangle x}$$

Calcoliamo il limite di tale rapporto

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle x\,(2x + \triangle x)}{\triangle x} = 2x$$

Exercise 1. Trovare l'incremento della funzione $y = x^2$ corrispondente alla variazione dell'argomento:

- da $x = 1$ a $x_1 = 2$: calcoliamo $\triangle y$

$$\triangle y = 4 - 1 = 3$$

Exercise 2. Calcolare $\triangle y$ per la funzione $y = \sqrt[3]{x}$, se $x = a$ e $\triangle x = h$

**Soluzione:** sappiamo che $\triangle y = y_1 - y$, dove $y_1$ e $y$ sono le immagini di $x_1$e $x$. Troviamo $x_1$

$$x_1 = x + \triangle x = a + h$$

pertanto

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{a+h} \\ y &= \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

da cui

$$\triangle y = \sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$$

**Rapporto incrementale**

Exercise 3. Calcolare l'incremento $\triangle y$ ed il rapporto incrementale per le funzioni:

- $y=\frac{1}{(x^2-2)^2}$ per $x=1$ e $\triangle x=0,4$: calcoliamo $x_1$
$$x_1=1+0,4=1,4=\frac{7}{5}$$
per cui
$$\triangle y=625-1=624$$
il rapporto incrementale sarà
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{624}{\frac{2}{5}}=1560$$

Exercise 4. Determinare $\triangle y$ e il rapporto incrementale corrispondenti alle variazioni dell'argomento da $x$ a $x+\triangle x$ per le funzioni:

- $y=ax+b$:
$$\triangle y=y_1-y=a\left(x+\triangle x\right)+b-ax+b=a\triangle x$$
il rapporto incrementale sarà
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{a\triangle x}{\triangle x}=a$$

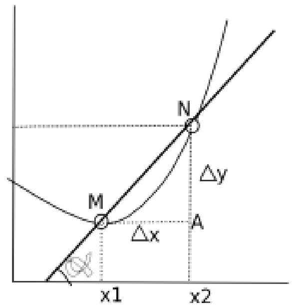
- $y=x^3$:
$$\begin{aligned}\triangle y=y_1-y &= \left(x+\triangle x\right)^3-x^3\\ &= 3x^2\triangle x+3x\left(\triangle x\right)^2+\left(\triangle x\right)^3\end{aligned}$$
il rapporto incrementale sarà
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{3x^2\triangle x+3x\left(\triangle x\right)^2+\left(\triangle x\right)^3}{\triangle x}=3x^2+3x\triangle x+\left(\triangle x\right)^2$$

- $y=\sqrt{x}$:
$$\triangle y=y_1-y=\sqrt{(x+\triangle x)}-\sqrt{x}$$
il rapporto incrementale sarà
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\sqrt{(x+\triangle x)}-\sqrt{x}}{\triangle x}$$
razionalizzando il numeratore, si ottiene infine
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{(x+\triangle x)-x}{\left(\sqrt{(x+\triangle x)}+\sqrt{x}\right)\triangle x}=\frac{1}{\sqrt{(x+\triangle x)}+\sqrt{x}}$$

- $y=\ln x$:
$$\triangle y=y_1-y=\ln\left(x+\triangle x\right)-\ln x$$
il rapporto incrementale sarà
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\ln\left(x+\triangle x\right)-\ln x}{\triangle x}$$
applicando la proprietà dei logaritmi $\ln a-\ln b=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$, si ottiene
$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\ln\left(\frac{x+\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}=\frac{\ln\left(1+\frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}$$

Exercise 5. Determinare il coefficiente angolare della secante alla parabola $y=2x-x^2$ se le ascisse dei punti di intersezione sono:

- $x_1=1$ e $x_2=2$: osserviamo la figura




$\triangle x = x_2 - x_1 = 1$ e $\triangle y = y_2 - y_1 = (4-4) - (2-1) = -1$; il coefficiente angolare è uguale alla tangente dell'angolo indicato in figura come $\alpha$, per cui

$$m = \tan\alpha = \frac{-1}{1} = -1$$

Exercise 6. La legge di moto di un punto è $s = 2t^2 + 3t + 5$, con $s$ in $cm$ e $t$ in $s$. Qual è la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti $t = 1$ e $t = 5$?

**Soluzione:** la velocità media per definizione è data dal rapporto $\frac{\triangle s}{\triangle t}$, cioè il rapporto incrementale della legge oraria, vista come $s = f(t)$. Calcoliamo i due incrementi

$$\begin{cases} \triangle s = s_5 - s_1 = 50 + 15 + 5 - 2 - 3 - 5 = 60\, m \\ \triangle t = t_5 - t_1 = 5 - 1 = 4\, s \end{cases}$$

il rapporto incrementale, e quindi la velocità media, sarà

$$\frac{\triangle s}{\triangle t} = \frac{60\, m}{4\, s} = 15 \frac{m}{s}$$

[il calcolo della velocità media corrisponde alla individuazione del coefficiente angolare della retta secante nei due punti assegnati, la curva che esprime la legge oraria.

Exercise 7. Determinare il rapporto $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ per la funzione $y = \frac{1}{x}$ nel punto $x = 2$ per $\triangle x = 0,01$.

**Soluzione:** Da $\triangle x = 0.01$ e $x = 2$, si può ottenere

$$x_1 = x + \triangle x = 2.01$$

da cui

$$\triangle y = \frac{1}{2.01} - \frac{1}{2} = \frac{-0.01}{4.02}$$

da cui

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{-\frac{0.01}{4.02}}{0,01} = -\frac{1}{4.02} = -\frac{50}{201}$$

**Limite del rapporto incrementale**

Exercise 8. Calcolare la derivata della funzione $y = \tan x$

**Soluzione:** la derivata è il limite del rapporto incrementale per $\triangle x \to 0$. Calcoliamo prima il rapporto incrementale

$$\begin{aligned}
\frac{\triangle y}{\triangle x} &= \frac{\tan(x + \triangle x) - \tan x}{\triangle x} = \\
&= \frac{\frac{\sin(x+\triangle x)}{\cos(x+\triangle x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\triangle x} = \\
&= \frac{\frac{\sin x \cos \triangle x + \cos x \sin \triangle x}{\cos x \cos \triangle x - \sin x \sin \triangle x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\triangle x} = \\
&= \frac{\cos^2 x \sin \triangle x + \sin^2 x \sin \triangle x}{\triangle x \cos x (\cos x \cos \triangle x - \sin x \sin \triangle x)} = \\
&= \frac{\sin \triangle x}{\triangle x \cos x (\cos x \cos \triangle x - \sin x \sin \triangle x)}
\end{aligned}$$

calcoliamo il limite di tale rapporto

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\triangle x}{\triangle x\cos x\left(\cos x\cos\triangle x-\sin x\sin\triangle x\right)}=$$

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\sin\triangle x}{\triangle x}\cdot\frac{1}{\cos x\cos\left(x+\triangle x\right)}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

**Regole principali di calcolo delle derivate**

**Tabella riassuntiva**

Se $c$ è una costante e $f(x)$ e $g(x)$ sono le funzioni derivabili, allora

$$\begin{array}{ll} (c)^{'}=0 & (cf(x))^{'}=cf^{'}(x) \\ (x)^{'}=1 & (f(x)\,g(x))^{'}=f^{'}(x)\,g(x)+f(x)\,g^{'}(x) \\ (f(x)\pm g(x))^{'}=f^{'}(x)\pm g^{'}(x) & \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2} \end{array}$$

**Tavola delle derivate delle funzioni principali**

$$\begin{array}{ll} (x^n)^{'}=nx^{n-1} & (\arccos x)^{'}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{per } |x|<1 \\ (\sqrt{x})^{'}=\frac{1}{2\sqrt{x}} & (\arctan x)^{'}=\frac{1}{1+x^2} \\ (\sin x)^{'}=\cos x & (a^x)^{'}=a^x\ln a \\ (\cos x)^{'}=-\sin x & (e^x)^{'}=e^x \\ (\tan x)^{'}=\dfrac{1}{\cos^2 x} & (\ln x)^{'}=\dfrac{1}{x}\qquad x>0 \\ (\cot x)^{'}=-\dfrac{1}{\sin^2 x} & (\log_a x)^{'}=\dfrac{\log_a e}{x} \\ (\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \text{per } |x|<1 & \end{array}$$

Regola di derivazione per le funzioni composte

Se $y=f(z)$ ed $z=g(x)$, cioè $y=f[g(x)]$, dove le funzioni $f$, $g$ sono derivabili, allora

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$$

Esempio:

$$y=\left(x^2-2x+3\right)^5$$

poniamo $y=z^5$, dove $z=\left(x^2-2x+3\right)$. Si ha quindi

$$y^{'}=\left(z^5\right)^{'}_z\left(x^2-2x+3\right)x^{'}=5z^4\left(2x-2\right)=10\left(x-1\right)\left(x^2-2x+3\right)^4$$

**Esercizi di derivazione**

**Funzioni algebriche.**

Exercise 9. Calcola le derivate delle funzioni assegnate:

- $y=x^5-4x^3+2x-3$: applichiamo la regola delle derivate di una potenza $(x^n)^{'}=nx^{n-1}$ ai singoli termini del polinomio e la derivazione di una costante per il termine noto $(c)^{'}=0$

$$y^{'}=5x^4-12x^2+2$$

- $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0.5x^4$: per le funzioni polinomiali utilizziamo sempre la regola di derivazione delle potenze $(x^n)^{'}=nx^{n-1}$

$$y^{'}=-\frac{1}{3}+2x-2x^3$$

- $y=-\dfrac{5x^3}{a}$:
$$y^{'}=-\frac{15x^2}{a}$$

- $y=at^m+bt^{m+n}$: la stessa regola di derivazione in un caso tutto algebrico
$$y^{'}=amt^{m-1}+b\left(m+n\right)t^{m+n-1}$$

- $y=\dfrac{ax^6+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$: la derivata è rispetto alla variabile $x$, tutte le altre lettere sono considerate come costanti
$$y^{'}=\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

- $y=\dfrac{\pi}{x}+\ln 2$: anche qui $\pi$ e $\ln 2$ rappresentano dei valori numerici costanti, mentre $\frac{1}{x}=x^{-1}$
$$y^{'}=-\frac{\pi}{x^2}$$

- $y=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$: potenze con esponente negativo e razionale, cioè radici cubiche e quadrate; tutti questi termini possono sempre essere trattati secondo la regola della derivazione di una potenza
$$y^{'}=2x^{\frac{2}{3}-1}-5x^{\frac{5}{2}-1}-3x^{-3-1}=2x^{-\frac{1}{3}}-5x^{\frac{3}{2}}-3x^{-4}$$

- $y=x^2\sqrt[3]{x^2}$: questa funzione può essere riscritta sotto forma di un'unica potenza: $y=x^2x^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{8}{3}}$
$$y^{'}=\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}=\frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}=\frac{8}{3}x\sqrt[3]{x^2}$$

- $y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{b}{x\sqrt[3]{x}}$: trasformiamo le radici al denominatore come potenze con esponente frazionario negativo: $y=ax^{-\frac{2}{3}}-bx^{-\frac{4}{3}}$
$$y^{'}=-\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{3}bx^{-\frac{7}{3}}$$

- $y=\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}$: questa è una funzione polinomiale fratta; la sua derivata viene calcolata applicando la derivazione delle singole potenze al numeratore e al denominatore e la regola di derivazione di un rapporto $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$
$$y^{'}=\frac{2x^2-10x+10-\left(2x+3\right)\left(2x-5\right)}{\left(x^2-5x+5\right)^2}=\frac{-2x^2-6x+25}{\left(x^2-5x+5\right)^2}$$

- $y=\dfrac{2}{2x-1}-\dfrac{1}{x}$: possiamo prima sommare le due frazioni e poi derivare la frazione risultante: $y=\frac{2x-2x+1}{x(2x-1)}=\frac{1}{2x^2-x}$; in questo caso la derivata del numeratore è nulla
$$y^{'}=\frac{-4x+1}{x^2\left(2x-1\right)^2}$$

- $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$: applichiamo la regola di derivazione di un rapporto di funzione e la derivata elementare relativa ad una radice quadrata
$$y^{'}=\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)^2}$$

### Funzioni trigonometriche e funzioni trigonometriche inverse

- $y = 5\sin x + 3\cos x$: ricordiamo le derivate delle funzioni goniometriche, $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$
$$y' = 5\cos x - 3\sin x$$

- $y = \tan x - \cot x$: ricordiamo le derivate delle due funzioni, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ e $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

- $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$: derivo applicando le derivate fondamentali e la regola di derivazione del rapporto $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$
$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \\ &= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-2\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)}{(\sin x - \cos x)^2} = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2} \end{aligned}$$

- $y = 2x\sin x - \left(x^2 - 2\right)\cos x$: oltre alle derivate fondamentali delle potenze e delle funzioni goniometriche, utilizzeremo anche la regola per la derivata di un prodotto: $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, [le parentesi non sono necessarie, ma servono per mostrare le varie parti in cui suddividiamo la derivazione]
$$\begin{aligned} y' &= [(2)\sin x + 2x(\cos x)] - \left[(2x)\cos x + \left(x^2 - 2\right)(-\sin x)\right] = \\ &= 2\sin x + 2x\cos x - 2x\cos x + \left(x^2 - 2\right)\sin x = x^2 \sin x \end{aligned}$$

- $y = x\cot x$: basta applicare la regola della derivata di un prodotto
$$y' = (1)\cot x + x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \frac{\sin x \cos x - x}{\sin^2 x}$$

- $y = x \arcsin x$: come sopra
$$y' = (1)\arcsin x + x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- $y = \dfrac{\left(1 + x^2\right)\arctan x - x}{2}$: anche in questo caso applichiamo le regole del prodotto e della somma; (questa non è una funzione fratta e non richiede la regola del quoziente)
$$y' = \frac{1}{2}\left[(2x)\arctan x + \left(1 + x^2\right)\left(\frac{1}{1 + x^2}\right) - 1\right] = x\arctan x$$

### Funzioni esponenziali e logaritmiche

- $y = x^7 e^x$: ricordiamo che la derivata di $(e^x)' = e^x$ e applicando la regola del prodotto, si ha
$$y' = \left(7x^6\right)e^x + x^7 e^x = x^6 e^x (7 + x)$$

- $y = (x - 1)\,e^x$: deriviamo applicando la regola del prodotto, sapendo che $(x - 1)' = 1$
$$y' = 1e^x + (x - 1)\,e^x = xe^x$$

- $y=\frac{e^x}{x^2}$: deriviamo applicando la regola del quoziente, $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$, sapendo che $\left(x^2\right)^{'}=2x$
$$y^{'}=\frac{e^xx^2-2xe^x}{x^4}=\frac{xe^x\,(x-2)}{x^4}=\frac{e^x\,(x-2)}{x^3}$$

- $y=e^x\cos x$: applichiamo la regola del prodotto, ricordando che $(\cos x)^{'}=-\sin x$
$$y^{'}=e^x\cos x+e^x\,(-\sin x)=e^x\,(\cos x-\sin x)$$

- $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$: applichiamo la regola del prodotto
$$y^{'}=(2x-2)\,e^x+\left(x^2-2x+2\right)e^x=x^2e^x$$

- $y=e^x\arcsin x$: ricordiamo che $(\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$$y^{'}=e^x\arcsin x+\frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y=\frac{x^2}{\ln x}$: applichiamo la regola del prodotto, ricordando che $(\ln x)^{'}=\frac{1}{x}$
$$y^{'}=\frac{(2x)\ln x-x^2\cdot\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\frac{x\,(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$$

- $y=x^3\ln x-\frac{x^3}{3}$: regole del prodotto e della somma
$$y^{'}=\left(3x^2\right)\ln x+\frac{x^3}{x}-\frac{3x^2}{3}=3x^2\ln x$$

- $y=\frac{1}{x}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$: regola della quoziente e della somma
$$y^{'}=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-1\ln x}{x^2}=\frac{-1+2x-1+\ln x}{x^2}=\frac{2x-2+\ln x}{x^2}$$

- $y=\ln x\log x-\ln a\log_a x$: regola del prodotto e della somma, ricordando che $(\log_a x)^{'}=\frac{\log_a e}{x}$; $\log x$ rappresenta $\log_a$ con $a=10$, mentre $\ln a$ è una costante
$$y^{'}=\frac{1}{x}\log x+\ln x\frac{\log e}{x}-\ln a\frac{\log_a e}{x}=\frac{1}{x}\left(\frac{\ln x}{\ln 10}+\ln x\frac{\ln e}{\ln 10}-\ln e\right)$$

**Funzioni Composte**

- $y=\left(1+3x-5x^2\right)^{30}$: il polinomio $\left(1+3x-5x^2\right)$ rappresenta la base della potenza con esponente 30. Deriveremo pertanto come una potenza; essendo però la base una funzione di $x$, dovremo moltiplicare anche per la derivata di tale polinomio
$$y^{'}=30\left(1+3x-5x^2\right)^{29}\cdot(3-10x)$$

- $y=\left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$: una funzione polinomiale come base di una potenza, si procede come nel precedente esercizio
$$y^{'}=3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{a}{c}\right)$$

- $y=\left(3+2x^2\right)^4$: come i due esercizi precedenti
$$y^{'}=4\left(3+2x^2\right)^3\cdot(4x)=16x\left(3+2x^2\right)^3$$

- $y=\dfrac{3}{56\,(2x-1)^7}$: in questo caso il polinomio base di una potenza è il denominatore della frazione e ciò richiede l'utilizzo anche della regola del quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$
$$y^{'}=\frac{3}{56}\cdot\frac{-7\,(2x-1)^6\,(2)}{(2x-1)^{14}}=-\frac{3}{4\,(2x-1)^8}$$

- $y=\sqrt{1-x^2}$: radice con radicando funzione di $x$
$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$: riscriviamo prima la radice cubica come potenza ad esponente frazionario $y=\left(a+bx^3\right)^{\frac{1}{3}}$ e deriviamo secondo la regola delle potenze
$$y^{'}=\frac{1}{3}\left(a+bx^3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(3bx^2\right)=bx^2\left(a+bx^3\right)^{-\frac{2}{3}}=bx^2\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}$$

- $y=(3-2\sin x)^5$: sempre come potenza per la derivata del polinomio base
$$y^{'}=5\,(3-2\sin x)^4\,(-2\cos x)=-10\cos x\,(3-2\sin x)^4$$

- $y=\tan x-\frac{1}{3}\tan^3 x+\frac{1}{5}\tan^5 x$: si può considerare come un polinomio in $\tan x$ e derivare secondo le modalità delle funzioni polinomiali, tenendo conto che $\tan x$ è appunto a sua volta una funzione di $x$, e che la sua derivata è data da $(\tan x)^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}$
$$y^{'}=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{3\tan^2 x}{\cos^2 x}+\frac{1}{5}\cdot\frac{5\tan^4 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}\left(1-\tan^2 x+\tan^4 x\right)$$

- $y=\sqrt{\cot x}-\sqrt{\cot\alpha}$: qui si tratta di ricordare le due derivate fondamentali della cotangente $-\frac{1}{\sin^2 x}$ e della radice quadrata $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; la $\cot\alpha$ si deve considerare come una costante
$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{\cot x}}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

- $y=2x+5\cos^3 x$:
$$y^{'}=2+5\left(3\cos^2 x\right)(-\sin x)=2-15\sin x\cos^2 x$$

- $y=-\dfrac{1}{6\,(1-3\cos x)^2}$: può essere riscritta come $y=-\frac{1}{6}\,(1-3\cos x)^{-2}$ e quindi derivata come una potenza la cui base contiene la funzione coseno
$$y^{'}=-\frac{1}{6}\cdot\left[-2\,(1-3\cos x)^{-3}\right]\cdot(-3\sin x)=-\sin x\,(1-3\cos x)^{-3}=\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$$

- $y=\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}$: si può derivare come una funzione quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{'}=\frac{f^{'}(x)g(x)-g^{'}(x)f(x)}{(g(x))^2}$
$$\begin{aligned}y^{'}&=\frac{-\left(9\cos^2 x\right)(-\sin x)}{9\cos^6 x}-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}\\&=\frac{\sin x}{\cos^4 x}+\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)\end{aligned}$$

- $y=\sqrt{\dfrac{3\sin x-2\cos x}{5}}$: richiede la derivazione del radicale, moltiplicata per la derivata del radicando (polinomio composto da funzioni goniometriche), cioè $\sqrt{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\cdot f^{'}(x)$

$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}}\cdot\left(\frac{3\cos x+2\sin x}{5}\right)$$

- $y=\sqrt[3]{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^3 x}$: applichiamo la derivata di una somma che è uguale alla somma delle derivate; il primo addendo si può derivare trasformandolo come $\sin^{\frac{2}{3}} x$, e il secondo come $\cos^{-3} x$

$$y^{'}=\frac{2}{3}\sin^{-\frac{1}{3}}\cdot(2\sin x\cos x)-3\cos^{-4}x\cdot(-\sin x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$$

- $y=\dfrac{1}{\arctan x}$: basta riscriverla come $\arctan^{-1} x$

$$y^{'}=-\arctan^{-2}x\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

- $y=\sqrt{xe^x+x}$: deriviamo il radicale quadrato e lo moltiplichiamo per la derivata del radicando, che contiene un prodotto di funzioni $(xe^x)$, $(f(x)\pm g(x))^{'}=f^{'}(x)\pm g^{'}(x)$

$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{xe^x+x}}\cdot(e^x+xe^x+1)$$

- $y=\sqrt{2e^x-2^x+1}+\ln^5 x$: deriviamo separatamente i due addendi; in questo caso ricordiamo le derivate dei due esponenziali, cioè $(\ln x)^{'}=\frac{1}{x}$, mentre $(2^x)^{'}=2^x\ln 2$

$$y^{'}=\frac{1}{2\sqrt{2e^x-2^x+1}}\cdot(2e^x-2^x\ln 2)+5\ln^4 x\cdot\frac{1}{x}$$

- $y=\sin 3x+\cos\frac{x}{5}+\tan\sqrt{x}$: basta applicare le derivate delle funzioni logaritmiche

$$y^{'}=\cos 3x\cdot 3-\sin\frac{x}{5}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- $y=\sin\left(x^2-5x+1\right)+\tan\frac{a}{x}$: si derivano le funzioni goniometriche moltiplicando poi per la derivata dei rispettivi argomenti, che sono funzioni dell'incognita $x$

$$y^{'}=\cos\left(x^2-5x+1\right)\cdot(2x-5)+\frac{1}{\cos^2\frac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)$$

- $y=\arcsin\dfrac{1}{x^2}$: come per l'esercizio precedente, ricordando che la derivata dell'arcoseno è $(\arcsin x)^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, per cui

$$y^{'}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(\frac{-2x}{x^4}\right)=\frac{-2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

- $y=5e^{-x^2}$: derivata della funzione esponenziale moltiplicata per la derivata dell'esponente

$$y^{'}=5e^{-x^2}\cdot(-2x)=-10xe^{-x^2}$$

- $y=\ln(2x+7)$:

$$y^{'}=\frac{1}{2x+7}\cdot(2)=\frac{2}{2x+7}$$

- $y = \ln \sin x$: l'argomento del logaritmo è una funzione goniometrica di $x$; deriviamo prima il logaritmo moltiplicando poi la derivata del seno

$$y' = \frac{1}{\sin x} \cdot (\cos x) = \cot x$$

- $y = \dfrac{x^8}{8\left(1-x^2\right)^4}$: la funzione è fratta e quindi va applicata la regola del quoziente, all'interno della quale, la derivata del denominatore richiede la derivazione di una funzione composta

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(8x^7\right) 8\left(1-x^2\right)^4 - \left[32\left(1-x^2\right)^3(-2x)\right]x^8}{64\left(1-x^2\right)^8} = \\ &= \frac{64x^7\left(1-x^2\right)^4 + 64x^9\left(1-x^2\right)^3}{64\left(1-x^2\right)^8} = \frac{64x^7\left(1-x^2\right)^3\left[1-x^2+x^2\right]}{64\left(1-x^2\right)^8} = \\ &= \frac{x^7\left(1-x^2\right)^3}{\left(1-x^2\right)^8} = \frac{x^7}{\left(1-x^2\right)^5} \end{aligned}$$

- $y = \dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$: il secondo membro presenta una frazione con numeratore irrazionale; si deriva la frazione, secondo la regola del quoziente $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$; la derivata del numeratore sarà data dalla derivata della radice $\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}$ per la derivata del radicando, $f'(x)$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} \cdot (4x-2) \cdot x - 1 \cdot \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2} \\ &= \frac{\frac{4x^2-2x}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} - \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2} = \frac{4x^2-2x-4x^2+4x-2}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \\ &= \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \end{aligned}$$

- $y = (a+x)\sqrt{a-x}$: la derivata di un prodotto, $(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$, il secondo fattore andrà derivata come i radicali di indice due:

$$y' = (1)\sqrt{a-x} + (a+x)\frac{1}{2\sqrt{a-x}} \cdot (-1) = \frac{2a-2x-a-x}{2\sqrt{a-x}} = \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

- $y = \sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$: scriviamo la radice cubica sotto forma di potenza, $(x+\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}$, deriviamo la potenza moltiplicando per la derivata della base che contiene anche un radicale

$$y' = \frac{1}{3}\left(x+\sqrt{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

- $y = \ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)$: dobbiamo derivare la funzione logaritmica e moltiplicare per la derivata del suo argomento

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}} \cdot \left(e^x\right) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)}$$

- $y = \tan^5 5x$: deriviamo la potenza, moltiplicando per la derivata della tangente e per la derivata del suo argomento

$$y' = 5\tan^4 5x \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 = 25\sec^2 5x \tan^4 5x$$

- $y = \sin^2\left(x^3\right)$: deriviamo la potenza, moltiplicando poi per la derivata della funzione goniometrica per la derivata del suo argomento

$$y' = 2\sin\left(x^3\right) \cdot \cos\left(x^3\right) \cdot \left(3x^2\right) = 3x^2 \sin\left(2x^3\right)$$

- $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2}$: deriviamo prima la funzione arcoseno, moltiplicando poi per la derivata dell'argomento, una funzione polinomiale fratta

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}} \cdot \left( \frac{2x\left(x^2\right) - 2x\left(x^2-1\right)}{x^4} \right) = \frac{2x}{x^4\sqrt{1-\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^2}} = \\ &= \frac{2}{x^3\sqrt{\frac{x^4-x^4+2x^2-1}{x^4}}} = \frac{2}{x\sqrt{2x^2-1}} \end{aligned}$$

- $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$: applichiamo la regola di derivazione del quoziente di due funzioni; il denominatore è a sua volta funzione di $x$

$$y' = \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{1-x^2}\right) - \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}\arccos x}{1-x^2} = \frac{\frac{-2\sqrt{1-x^2}+2x\arccos x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{-\sqrt{1-x^2}+x\arccos x}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

- $y = \ln\left(\arcsin 5x\right)$: deriviamo la funzione logaritmo, moltiplicando per la derivata del suo argomento e per la derivata dell'argomento dell'arcoseno

$$y' = \frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \cdot 5$$

- $y = \arcsin\left(\ln x\right)$: deriviamo la funzione arcoseno, moltiplicando per la derivata del suo argomento

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$$

- $y = \arctan \dfrac{x \sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$: deriviamo la funzione arcotangente, moltiplicando poi per la derivata del suo argomento (la variabile è $x$, e quindi la derivata è rispetto ad $x$)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)^2} \cdot \frac{\sin\alpha\left(1-x\cos\alpha\right)+\cos\alpha\left(x\sin\alpha\right)}{\left(1-x\cos\alpha\right)^2} \\ &= \frac{\sin\alpha - x\sin\alpha\cos\alpha + x\sin\alpha\cos\alpha}{\left(1-x\cos\alpha\right)^2\left(\frac{1+x^2\cos^2\alpha-2x\cos\alpha+x^2\sin^2\alpha}{(1-x\cos\alpha)^2}\right)} = \frac{\sin\alpha}{1+x^2-2x\cos\alpha} \end{aligned}$$

- $y = \sqrt{\cos x}\, a^{\sqrt{\cos x}}$: applichiamo la regola della derivata del prodotto di due funzioni (un radicale e un esponenziale) tenendo conto che tali funzioni sono a loro volta funzioni della variabile $x$

$$y' = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\left(a^{\sqrt{\cos x}}\right) + \sqrt{\cos x}\left(a^{\sqrt{\cos x}}\ln a\right)\left(\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}\right) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}a^{\sqrt{\cos x}}\left(1+\ln a\sqrt{\cos x}\right)$$

- $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$: deriviamo prima la funzione logaritmo, moltiplicando poi per la derivata del suo argomento e per la derivata dell'argomento della funzione coseno, che è una funzione polinomiale fratta

$$y' = \frac{1}{\cos\frac{x-1}{x}} \cdot \left(-\sin\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x-x+1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}\tan\frac{x-1}{x}$$

- $y = \ln\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$: applichiamo prima le proprietà dei logaritmi, $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, e $\ln a^n = n\ln a$, ottenendo

$$y = 5\ln\left(x-2\right) - 3\ln\left(x+1\right)$$

da cui, derivando le funzioni logaritmo, si ha

$$y' = \frac{5}{x-2} - \frac{3}{x+1} = \frac{5x+5-3x+6}{(x-2)(x+1)} = \frac{2x+11}{(x-2)(x+1)}$$

- $y = x \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$: applichiamo la regola di derivazione del prodotto di due funzioni

$$y^{'} = 1 \cdot \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + x\cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{x}\right) = \sin\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\ln x - \frac{\pi}{4}\right)$$

ricordando le formule della goniometria può essere riscritta

$$y^{'} = \sqrt{2}\sin(\ln x)$$

EXERCISE 10. Calcolare $y^{'}$ se $y = \|x\|$ o se $y = x\,\|x\|$

- caso $y = \|x\|$: ricordando il significato del valore assoluto,

$$\begin{array}{ccc} se\ y > 0 & y = x & y^{'} = 1 \\ se\ y < 0 & y = -x & y = -1 \\ se\ y = 0 & y = 0 & y^{'}\ non\,esiste \end{array}$$

- caso $y = x\,\|x\|$

$$\begin{array}{ccc} se\,y > 0 & y = x^2 & y^{'} = 2x \\ se\,y < 0 & y = -x^2 & y^{'} = -2x \\ se\,y = 0 & y = 0 & y^{'}\ non\,esiste \end{array}$$

EXERCISE 11. Calcolare $f^{'}(x)$ se

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & per \quad x \leq 0 \\ e^{-x} & per \quad x > 0 \end{cases}$$

**Soluzione:**

$$f(x) = \begin{cases} -1 & per \quad x \leq 0 \\ -e^{-x} & per \quad x > 0 \end{cases}$$

EXERCISE 12. Calcolare $f^{'}(0)$ se $f(x) = e^{-x}\cos 3x$

**Soluzione:** Si chiede di calcolare la derivata della funzione nel punto indicato; ciò si ottiene calcolando la derivata e operando la sostituzione $x = 0$

$$f^{'}(x) = -e^{-x}\cos 3x + e^{-x}(-3\sin 3x) = -e^{-x}(\cos 3x + 3\sin 3x)$$

sostituendo $x = 0$, si ha

$$f^{'}(0) = -e^{0}(\cos 0 + 3\sin 0) = -1\,(1 + 0) = -1$$

EXERCISE 13. Per la funzione data $f(x) = e^{-x}$ calcolare l'espressione $f(0) + xf^{'}(0)$.

**Soluzione:** calcoliamo $f(0) = e^0 = 1$; calcoliamo poi la derivata nel punto $x = 0$

$$f^{'}(0) = -e^{-x} = -e^{0} = -1$$

pertanto

$$f(0) + xf^{'}(0) = 1 - x$$

EXERCISE 14. Per le funzioni date $f(x) = 1 - x$ e $g(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$, calcolare l'espressione $\frac{g^{'}(1)}{f^{'}(1)}$

**Soluzione:** Calcoliamo le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 \\ g'(x) &= -\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \end{aligned}$$

calcoliamo ora le derivate nel punto $x = 1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -1 \\ g'(1) &= 0 \end{aligned}$$

il loro rapporto sarà

$$\frac{g'(x)}{f'(x)} = 0$$

Exercise 15. Dimostrare che la derivata di una funzione pari è una funzione dispari e che la derivata di una funzione dispari è una funzione pari.

**Soluzione:** Una funzione è pari se

$$f(x) = f(-x)$$

calcoliamo la derivata

$$\begin{aligned} [f(x)]' &= f'(x) \\ [f(-x)]' &= -f'(x) \end{aligned}$$

dando quindi una funzione dispari. Analogamente, una funzione è detta dispari se

$$f(-x) = -f(x)$$

derivando si ha

$$\begin{aligned} [f(-x)]' &= -f'(x) \\ [-f(x)]' &= -f'(x) \end{aligned}$$

cioè la stessa derivata, con la conseguenza richiesta.

Exercise 16. Mostrare che la funzione

$$y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

soddisfa l'equazione

$$xy' = \left(1 - x^2\right) y$$

**Soluzione:** deriviamo la funzione $y$

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + xe^{-\frac{x^2}{2}}(-x)$$

e sostituiamo

$$x\left(e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \left(1 - x^2\right) xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

svolgendo le moltiplicazioni in entrambi i membri, si ha

$$xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

## Derivate di Funzioni non esplicite

**Derivata di una funzione inversa.** Se la funzione $y = f(x)$ ha una derivata $y_x^{'} \neq 0$, allora la derivata della funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ è data da

$$x_y^{'} = \frac{1}{y'(x)}$$

EXAMPLE 17. Calcolare la derivata $x_y^{'}$ della funzione

$$y = x + \ln x$$

Calcoliamo la derivata di $y$ rispetto ad $x$

$$y^{'} = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

Pertanto, la derivata di $x$, rispetto ad $y$, sarà

$$x^{'} = \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}$$

EXERCISE 18. Calcolare la derivata $x_y^{'}$, nei seguenti casi

- $y = 3x + x^3$: calcoliamo la derivata $y^{'}$

$$y^{'} = 3 + 3x^2$$

  da cui,

$$x_y^{'} = \frac{1}{3 + 3x^2}$$

- $y = x - \frac{1}{2}\sin x$:

$$y^{'} = 1 - \frac{1}{2}\cos x$$

  e

$$x_y^{'} = \frac{2}{2 - \cos x}$$

- $y = x + e^{\frac{x}{2}}$:

$$y^{'} = 1 + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

  e quindi

$$x_y^{'} = \frac{2}{1 + e^{\frac{x}{2}}}$$

**Derivata di una funzione implicita.** Se la dipendenza tra le due variabili è espressa da una relazione del tipo

$$F(x, y) = 0$$

allora, per calcolare la derivata di $y$ rispetto ad $x$, basta, nei casi semplici,

- calcolare la derivata rispetto ad $x$ del primo membro dell'equazione, dove si considera $y$ una funzione di $x$
- calcolare $\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0$
- risolvere rispetto alla derivata di $y$, $y^{'}$.

EXAMPLE 19. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$: Calcoliamo la derivata

$$3x^2 + 3y^2y^{'} - 3a\left(y + xy^{'}\right) = 0$$

risolvendo rispetto a $y^{'}$ si ottiene

$$y^{'} = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}$$

## Applicazioni della derivata alla geometria e alla fisica

**Equazione della tangente a una curva.** Ricordando l'interpretazione geometrica della derivata, segue che, assegnata una curva $y = f(x)$, l'equazione della tangente alla curva in un punto $P(x_0; y_0)$è

$$y - y_0 = y_0^{'}(x - x_0)$$

che, come si vede, è l'equazione della retta passante per un punto il cui coefficiente angolare è uguale alla derivata della funzione calcolata nel punto $P$; cioè

$$m = y_0^{'} = \frac{dy}{dx}\|_{x=x_0}$$

**Angolo tra due curve.** Date due curve, le cui equazioni sono $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, si definisce come angolo, $\alpha$, in un loro punto comune, $P(x_0; y_0)$ quello formato dalle rispettive tangenti in questo punto. La relazione si ricava dalla trigonometria, ricordando quanto sopra detto, $m = y_0' = \tan\alpha$

$$\tan\alpha = \frac{f_2^{'}(x_0) - f_1^{'}(x_0)}{1 + f_2^{'}(x_0) \cdot f_1^{'}(x_0)}$$

Exercise 20. Trovare l'angolo $\varphi$ formato dall'asse $x$ e dalla tangente alla curva $y = x - x^2$ nel punto di ascissa $x = 1$.

**Soluzione:** La funzione assegnata è l'equazione di una parabola passante per l'origine (termine noto uguale a zero); Il punto considerato avrà coordinate

$$y = 1 - 1^2 = 0$$

una intersezione della parabola con l'asse $x$. Per ottenere l'equazione della tangente in questo punto, calcoliamo la derivata della funzione

$$y = 1 - 2x$$

se $x = 1$, la derivata sarà $y^{'} = -1$. L'equazione della tangente sarà

$$y - 0 = -1(x - 1)$$

da cui

$$y = -x + 1$$

L'angolo formato sarà

$$\tan\alpha = y_0^{'} = -1$$

e quindi

$$\alpha = \arctan(-1) = 135°$$

Exercise 21. Determinare gli angoli formati dalle sinusoidi $y_1 = \sin x$ e $y_2 = \sin 2x$ e dall'asse delle ascisse nell'origine del piano cartesiano.

**Soluzione:** calcoliamo le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} y_1^{'} &= \cos x \\ y_2^{'} &= 2\cos x \end{aligned}$$

il loro valore nell'origine è

$$\begin{aligned} y_1^{'}(0) &= 1 \\ y_2^{'}(0) &= 2 \end{aligned}$$

la derivata nel punto indica il coefficiente angolare della retta tangente alla curva in quel punto, per cui

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= 1 \\ \tan\beta &= 2 \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} \alpha &= 45° \\ \beta &= \arctan 2 \end{aligned}$$

Exercise 22. Determinare l'angolo sotto il quale la curva $y = e^{0.5x}$ interseca la retta $x = 2$.

**Soluzione:** Determiniamo prima il punto di intersezione tra la retta e l'esponenziale:

$$\begin{cases} y = e^{0.5x} \\ x = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = e \\ x = 2 \end{cases}$$

ricordando che tale angolo è quello formato tra la tangente all'esponenziale e la retta nel punto assegnato, è necessario calcolare la derivata

$$m = \tan\alpha = y_2^{'}(2) = \frac{e}{2}$$

questo angolo è quello formato dalla curva con l'asse $x$, cioè complementare a quello richiesto, $\omega$, che sarà

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

quindi

$$\tan\omega = \cot\alpha = \frac{2}{e}$$

da cui

$$\omega = \arctan\frac{2}{e}$$

Exercise 23. Determinare il punto della parabola

$$y = x^2 - 7x + 3$$

nel quale la tangente è parallela alla retta $5x + y - 3 = 0$

**Soluzione:** se la tangente è parallela alla retta data, il suo coefficiente angolare è lo stesso della retta, cioè, $m = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{1} = -5$. Ora il coefficiente angolare è uguale alla derivata della curva nel punto assegnato; quindi

$$y^{'} = 2x - 7 = -5$$

cioè

$$x = 1$$

il punto sarà quindi

$$P\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Exercise 24. Determinare il punto della curva $y^2 = 2x^3$ nel quale la tangente è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 2 = 0$.

**Soluzione:** determiniamo il coefficiente della retta assegnata

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

la retta perpendicolare avrà coefficiente angolare antireciproco, cioè

$$m_{perp} = -\frac{3}{4}$$

calcoliamo la derivata della funzione implicita $y^2 - 2x^3 = 0$,

$$2yy^{'} - 6x^2 = 0$$

da cui

$$y^{'} = \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{\pm x\sqrt{2x}}$$

tale derivata deve essere uguale a $-3/4$; pertanto

$$\pm\frac{3x}{\sqrt{2x}} = -\frac{3}{4}$$

cioè, con $x > 0$

$$\pm\frac{3x\sqrt{2x}}{2x} = -\frac{3}{4}$$

moltiplicando per il $mcm$

$$\pm 2\sqrt{2x} = -1$$

elevando al quadrato

$$8x = 1$$

da cui

$$x = \frac{1}{8}$$

le ordinate dei punti si ottengono sostituendo il valore trovato nella funzione

$$y = \pm\sqrt{\frac{2}{8^3}} = \pm\frac{1}{16}$$

Exercise 25. Determinare l'angolo di intersezione delle due parabole

$$y = (x-2)^2 \qquad y = -x^2 + 6x - 4$$

**Soluzione:** l'angolo richiesto è quello formato dalle tangenti alle due curve nel punto di intersezione; calcoliamo pertanto la loro intersezione

$$\begin{cases} y & = & (x-2)^2 \\ x^2 - 4x + 4 & = & -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$$

risolvendo la seconda equazione, si ha

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

che dà

$$x = 4 \qquad x = 1$$

i punti saranno quindi $A(4;4)$ e $B(1;1)$.
Determiniamo ora le derivate delle due funzioni

$$\begin{aligned} y' &= 2x - 4 \\ y' &= -2x + 6 \end{aligned}$$

calcoliamo tali derivate nei due punti trovati

$$\begin{aligned} y'(4) = 4 \quad & e \quad y'(1) = -2 \\ y'(4) = -2 \quad & e \quad y'(1) = 4 \end{aligned}$$

le rette tangenti sono tra loro parallele e quindi l'angolo formato sarà lo stesso; applicando la formula per la determinazione di tale angolo $\tan\alpha = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_2'(x_0)\cdot f_1'(x_0)}$, si ottiene

$$\tan\alpha = \frac{-2-4}{1-8} = -\frac{6}{7}$$

l'angolo sarà pertanto

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{6}{7}\right) = 40^\circ\, 36'$$

Exercise 26. Mostrare che le iperboli

$$xy = a^2 \qquad x^2 - y^2 = b^2$$

si intersecano sotto un angolo retto.

**Soluzione:** calcoliamo le funzioni che esprimono tutti i coefficienti angolari delle tangenti alle due curve in ogni punto mediante la derivata delle rispettive funzioni ed eguagliamole a zero

$$\left(xy = a^2\right)' = y + xy' = 0 \qquad \left(x^2 - y^2 = b^2\right)' = 2x - 2yy' = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{y}{x} \\ y' &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$

i due coefficienti angolari sono antireciproci $\forall x, y$ e quindi le tangenti saranno sempre tra loro perpendicolari.

Exercise 27. La legge di moto di un punto sull'asse $OX$ è

$$x = 3t - t^3$$

Determinare la velocità di questo punto negli istanti $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$

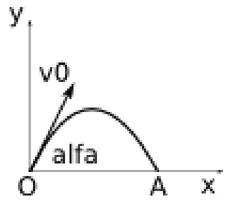
**Soluzione:** la velocità istantanea è definita come la derivata di $\frac{dx}{dt}$. Si tratta quindi di calcolare le derivate puntuali per i tempi indicati:

$$\begin{aligned} x^{'}(0) &= 3-3t^2=3 \\ x^{'}(1) &= 3-3t^2=0 \\ x^{'}(2) &= 3-3t^2=-9 \end{aligned}$$

Exercise 28. La legge di moto di un punto materiale lanciato in alto nel piano verticale $OXY$ con un angolo $\alpha$ con l'orizzonte e con velocità iniziale $v_0$ è data dalle formule (trascurando la resistenza dell'aria)

$$x=v_0t\cos\alpha \qquad y=v_0t\sin\alpha-\frac{gt^2}{2}$$

dove $t$ è il tempo, $g$ l'accelerazione della forza di gravità terrestre. Determinare la traiettoria del moto e la gittata. Determinare anche la grandezza della velocità del volo e la sua direzione.




**Soluzione:** Questo esercizio è la classica determinazione del moto parabolico; infatti si osserva che la componente orizzontale della velocità descrive un moto rettilineo uniforme, mentre quella verticale un moto accelerato. Ricavando infatti il tempo $t$ dalla prima relazione e sostituendola nell'altra si ha

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ y &= \frac{v_0\sin\alpha\cdot x}{v_0\cos\alpha}-\frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}=x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

tale equazione, di secondo grado, è descritta da una curva parabolica e rappresenta la traiettoria del punto materiale. La gittata è rappresentata in figura dalla distanza $OA$; gli estremi di tali segmento sono i punti di intersezione della parabola con l'asse delle $x$, di cui uno, $O$, è scelto quale origine; quindi

$$x\tan\alpha-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}=0$$

raccogliendo la $x$ e calcolando la soluzione diversa da zero, si ha

$$\tan\alpha=\frac{gx}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

da cui

$$x_A=\frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot v_0^2\cos^2\alpha}{g}=\frac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$$

La componente orizzontale e verticale della velocità sono

$$\begin{aligned} v_x=\tfrac{dx}{dt} &= v_0\cos\alpha \\ v_y=\tfrac{dy}{dt} &= v_0\sin\alpha-gt \end{aligned}$$

**:**

Exercise 29. Un punto si muove sull'iperbole $y=\frac{10}{x}$ in modo tale che la sua ascissa $x$ cresce uniformemente alla velocità di un'unità per secondo. Qual è la velocità di variazione della sua ordinata quando il punto considerato coincide con il punto $P(5;2)$?

**Soluzione:** Le coordinate del punto mobile sono quelle che soddisfano l'equazione dell'iperbole riferita ai propri assi. La sua velocità si può esprimere come $v_x=1\,\frac{u}{sec}$; ma $v_y=y^{'}$, per cui

$$y^{'}=\frac{dy}{dx}=-\frac{10}{x^2}$$

calcoliamo $y^{'}(5)$, cioè la velocità nel punto $x=5$

$$y^{'}(5)=-\frac{10}{25}=-\frac{2}{5}$$

da cui

$$v_y=-0.4\,\frac{m}{s}$$

EXERCISE 30. Il raggio di una sfera cresce uniformemente con la velocità di $5\,cm/sec$. Con quali velocità crescono la superficie ed il volume della sfera nel momento in cui il raggio è uguale a $50\,cm$?

**Soluzione:** Ricordiamo che la superficie e il volume in funzione del raggio, sono espresse da

$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

La velocità di espansione può essere intesa come $\frac{dr}{dt} = 5\,\frac{cm}{sec}$. Calcoliamo le velocità di espansione di superficie e volume, mediante la loro derivata rispetto al raggio

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi \cdot 0.50\,m \cdot 0.05\,\frac{m}{sec} = 0.2\pi\,\frac{m^2}{sec} \\ \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi \cdot (0.50)^2\ m^2 \cdot 0.05\,\frac{m}{sec} = 0.05\pi\,\frac{m^3}{sec} \end{aligned}$$

EXERCISE 31. Siano date le due funzioni

$$f(x) = x^2 - 3x + 3 \qquad g(x) = x^3 - 11x + 15$$

Risolvere l'equazione $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ e sia $x_0$ la soluzione nell'intervallo $[0;4]$. Considerare il punto di ascissa $x_0$ sul grafico delle due funzioni. Che cosa si può dedurre?

**Soluzione:** calcoliamo le derivate delle due funzioni polinomiali di secondo e terzo grado

$$f^{'}(x) = 2x - 3 \qquad g^{'}(x) = 3x^2 - 11$$

L'uguaglianza è vera per

$$2x - 3 = 3x^2 - 11$$

cioè

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

risolvendo, si ha, applicando la formula ridotta

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{3}$$

da cui $x_1 = 2$ e $x_2 = -\frac{4}{3}$.
Troviamo le intersezioni delle funzioni $f$ e $g$:

$$x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$$

si nota che $x = 2$ è una radice dell'equazione (infatti: $2^3 - 2^2 - 16 + 12 = 0$); anche le derivate si incontrano in questo punto e quindi, nel punto $x = 2$ le due funzioni hanno la stessa tangente.

EXERCISE 32. Determinare i punti in cui l'iperbole equilatera di equazione

$$y = \frac{x-1}{x+3}$$

ha la tangente inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'asse $x$.

**Soluzione:** l'inclinazione di una retta tangente in un punto è espressa tramite il suo coefficiente angolare, cioè l'angolo che la retta forma con l'asse delle $x$, $m = \tan\alpha$; ma tale coefficiente angolare è pure espresso dal limite del rapporto incrementale, quando l'incremento tende a zero, cioè la derivata della funzione, $m = y^{'}$.
Ora se l'inclinazione è pari a $\frac{\pi}{4}$, vuol dire che la retta forma un angolo di 45°, cioè è la bisettrice del 1° e 3° quadrante di equazione $y = x$; tale retta ha coefficiente angolare $m = 1$ e la derivata di $y$, deve pertanto essere uguale a 1.
Calcoliamo quindi la derivata della funzione

$$y^{'} = \frac{1\,(x+3) - 1\,(x-1)}{(x+3)^2} = 1$$

da cui

$$\frac{4}{(x+3)^2} = 1$$

moltiplicando per il mcm diverso da zero, si ha

$$4 = x^2 + 6x + 9 \qquad x^2 + 6x + 5 = 0$$
$$x_1 = -5 \qquad x_2 = -1$$

I punti sono quindi $P(-5; 5)$ e $Q(-1; 1)$

Exercise 33. Determinare l'ampiezza dell'angolo compreso dalle tangenti alla parabola

$$y = x^2 - 5x + 6$$

nei suoi punti di intersezione con l'asse $x$.

**Soluzione:** Determiniamo prima i punti in cui la parabola interseca l'asse $x$, cioè quelli aventi ordinata nulla:

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ x_1 = 2 \qquad & x_2 = 3 \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la derivata della funzione nei punti di ascissa $x_{1,2}$:

$$y' = 2x - 5$$

$$\begin{aligned} y_1'(2) &= -1 \\ y_2'(3) &= 1 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\tan\alpha = 1 \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$
$$\tan\beta = -1 \qquad \beta = \frac{3}{4}\pi$$

da cui

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Exercise 34. Data la curva di equazione

$$y = x^3 - x^2 - x + 1$$

determinare le equazioni delle tangenti nei suoi punti di intersezione con gli assi.

**Soluzione:** Calcoliamo i punti di intersezione con l'asse $x$, cioè i punti ad ordinata nulla:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

con raccoglimento parziale

$$\begin{aligned} x^2(x-1) - (x-1) &= 0 \\ (x-1)^2(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

I punti sono $A(1; 0)$, in cui la curva è tangente all'asse $x$, e $B(-1; 0)$.
Calcoliamo ora la derivata della funzione nei punti ottenuti

$$y' = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\begin{aligned} y'(1) &= 0 \\ y'(-1) &= 4 \end{aligned}$$

Una tangente avrà $m = 0$, e sarà quindi, come detto, la retta $y = 0$; la seconda tangente avrà equazione (conoscendo $m$ e un punto)

$$y - 0 = 4(x + 1)$$

cioè

$$y = 4x + 4$$

Calcoliamo ora l'intersezione con l'asse $y$, cioè i punti ad ascissa nulla:

$$y(0) = 1$$

Il punto sarà $C(0; 1)$. Calcoliamo la derivata in questo punto

$$y'(0) = -1$$

la retta sarà quindi

$$y - 1 = -1x$$

cioè

$$y = -x + 1$$

Exercise 35. Scrivere le equazioni delle tangenti alla parabola $y = x^2 - 3x + 4$ nei suoi punti di intersezione con la retta $y = x + 1$

**Soluzione:** determiniamo prima i punti di intersezione

$$\begin{cases} x + 1 = x^2 - 3x + 4 \\ y = x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$A\,(1;2) \qquad B\,(3;4)$$

Per trovare le equazioni delle equazioni, calcoliamo prima la derivata della funzione

$$y^{'} = 2x - 3$$

e poi calcoliamo le due derivate puntuali

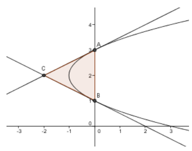
$$\begin{aligned} y^{'}(1) &= -1 \\ y^{'}(3) &= 3 \end{aligned}$$

La tangente in $A$ sarà:

$$y - 2 = -1\,(x - 1) \qquad y = -x + 3$$

$$y - 4 = 3\,(x - 3) \qquad y = 3x - 5$$

Exercise 36. Siano $A$ e $B$ i punti di intersezione della parabola $x = y^2 - 4y + 3$ con l'asse $y$. Dette $t_1$ e $t_2$ le tangenti ad essa nei punti $A$ e $B$ e $C$ il punto di intersezione delle due tangenti, determinare l'area del triangolo $ABC$



**Soluzione:** Le intersezioni della parabola, con asse parallelo all'asse $x$, con l'asse delle ordinate, cioè ad ascissa nulla, sono

$$\begin{aligned} y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ y_1 = 1 \qquad & y_2 = 3 \end{aligned}$$

I punti hanno quindi coordinate $A\,(0;3)$ e $B\,(1;3)$.
Calcoliamo la derivata rispetto a $y$ della funzione nei due punti:

$$\begin{aligned} x^{'} &= 2y - 4 \\ x^{'}(1) = -2 \qquad & x^{'}(3) = 2 \end{aligned}$$

In questo caso i coefficienti angolari rappresentano l'angolo rispetto all'asse $y$; per trovare le equazioni delle tangenti è necessario utilizzare l'angolo rispetto all'asse $x$. I coefficienti angolari delle rette saranno pertanto i reciproci, tenendo anche conto della relazione che esiste per la derivata di una funzione inversa:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \qquad m_2 = \frac{1}{2}$$

le equazioni saranno allora

$$y - 1 = -\frac{1}{2}x \qquad y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}x \qquad y = \frac{1}{2}x + 3$$

Troviamo il punto $C$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+1 &= \frac{1}{2}x+3 \\ y &= \frac{1}{2}x+3 \end{cases}$$

da cui

$$C\,(-2;2)$$

cioè il punto $C$ sta sull'asse del segmento del segmento $AB$; il triangolo $ABC$ è pertanto isoscele (anche per motivi di simmetria); la sua area è

$$A_{ABC} = \frac{2\cdot 2}{2} = 2$$

Exercise 37. Determinare i parametri $a$ e $b$ in modo che la curva di equazione $y = \frac{ax+b}{x^2}$ passi per il punto $(1;3)$ e abbia ivi per tangente la retta $4x + y - 7 = 0$.

**Soluzione:** Se la curva passa per il punto assegnato, allora le coordinate del punto verificano l'equazione della curva:

$$3 = a + b$$

Se in questo punto la tangente alla curva ha l'equazione assegnata, allora il suo coefficiente angolare, $-4$, è la derivata della equazione della curva in questo punto:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{ax^2 - 2ax^2 - 2bx}{x^4} = \frac{-ax-2b}{x^3} \\ -4 &= -a - 2b \end{aligned}$$

Combinando le due relazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} a+b &= 3 \\ a+2b &= 4 \end{cases}$$

risolvendo con il metodo di riduzione

$$b = 1 \qquad a = 2$$

Exercise 38. Data la funzione $f$ definita in $\mathbb{R}$:

$$f : x \to 2x^3 - x^2 + 2x + 4$$

sia $C$ il suo grafico. Determinare i punti di $C$ in cui la tangente è parallela alla retta $y = 6x - 1$.

**Soluzione:** I coefficienti angolari delle tangenti alla curva sono espressi dalla derivata della funzione

$$y' = 6x^2 - 2x + 2$$

Tale derivata deve essere uguale al coefficiente angolare della retta assegnata, $m = 6$, per cui

$$6x^2 - 2x - 4 = 0$$

le soluzioni di questa equazione sono

$$x_1 = -\frac{2}{3} \qquad x_2 = 1$$

I punti saranno, sostituendo nella equazione della curva $C$,

$$\left(-\frac{2}{3}; \frac{44}{27}\right) \qquad (1;7)$$

Exercise 39. Determinare $a, b, c, d$ in modo che la curva di equazione $y = \frac{ax^2+b}{cx+d}$ abbia come asintoto una retta parallela a $y = 2x + 2$ e abbia nel punto $A\,(0;1)$ la tangente inclinata di $\frac{\pi}{4}$ sull'asse $x$.

**Soluzione:** La curva avrà un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$, se

$$\begin{aligned} m = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2+dx} &= \frac{a}{c} = 2 \\ q = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx+d} - \frac{ax}{c} &= -\frac{ad}{c^2} = 2 \end{aligned}$$

Il punto $A$ appartiene alla curva e le sue coordinate soddisfano quindi l'equazione della stessa:

$$1 = \frac{b}{d}$$

La derivata della funzione è:

$$y^{'} = \frac{2ax\,(cx+d) - c\left(ax^2+b\right)}{(cx+d)^2} = \frac{acx^2 + 2adx - bc}{(cx+d)^2}$$

tale derivata deve valere 1, $(m = \tan\frac{\pi}{4} = y^{'}(0) = 1)$ nel punto dato:

$$1 = -\frac{bc}{d^2}$$

Componendo tutte le condizioni, si ha:

$$\begin{cases} a &= 2c \\ -ad &= 2c^2 \\ b &= d \\ -bc &= d^2 \end{cases}$$

?????

Exercise 40. Determinare i coefficienti $a$ e $b$ in modo che la curva di equazione:

$$y = a\sin 2x + b\cos x$$

abbia nel punto $\left(\frac{\pi}{4}; 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ tangente parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

**Soluzione:** Il punto appartiene alla curva; sostituisco quindi le coordinate del punto

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = a + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cioè $a = 1$

la tangente dovrà avere coefficiente angolare $m = -1$; calcolo la derivata

$$y^{'} = 2a\cos 2x - b\sin x$$

nel punto indicato, la derivata avrà valore $-1$, quindi

$$-1 = -b\frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui si ricava $b = \sqrt{2}$

Exercise 41. La tangente alla curva

$$y = \frac{3\tan x}{1+\sin x}$$

nel suo punto di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$ taglia l'asse $x$ nel punto $T$. Trovare la distanza $OT$.

**Soluzione:** Se il punto di tangenza ha ascissa $x = \frac{\pi}{6}$, avrà ordinata $y = \frac{3\tan\frac{\pi}{6}}{1+\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; Calcoliamo la derivata

$$y^{'} = \frac{3\left(1+\tan^2 x\right)(1+\sin x) - 3\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

calcolo la derivata nel punto di ascissa $x = \frac{\pi}{6}$

$$y^{'} = \frac{3\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}}{\frac{9}{4}} = 2$$

La tangente avrà coefficiente angolare $m = 2$ e passera per il punto $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$; la sua equazione sarà

$$\begin{aligned} y - \frac{2\sqrt{3}}{3} &= 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ y &= 2x + \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

La retta interseca l'asse $x$ nel punto

$$x = \frac{\pi + 2\sqrt{3}}{6}$$

che rappresenta pure la distanza di $T$ dall'origine.