ESERCIZI DI GEOMETRIA ANALITICA

0.1. EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

Exercise 0.1.1. Si scriva l'equazione della circonferenza che passa per i punti $O(0;0)$ e $A(7;0)$ e stacca sul semiasse positivo delle y un segmento $OP=3$. Si calcoli la differenza fra la lunghezza del diametro e quella della corda intercettata sulla bisettrice del primo quadrante.

Soluzione:: Se la circonferenza passa per il punto P che sta sull'asse y, le sue coordinate sono $P(0;3)$. Possiamo quindi calcolare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti dati:

$$\begin{cases} c & = & 0 \\ 49+7a+c & = & 0 \\ 9+3b+c & = & 0 \end{cases}$$

da cui si ha

$$\begin{cases} a & = & -7 \\ b & = & -3 \\ c & = & 0 \end{cases}$$

L'equazione è

$$x^2+y^2-7x-3y=0$$

tale cerchio ha centro nel punto

$$\begin{aligned} x_c &= -\frac{a}{2}=\frac{7}{2} \\ y_c &= -\frac{b}{2}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

il raggio è

$$r=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{9}{4}-0}=\frac{1}{2}\sqrt{58}$$

il diametro sarà $d=\sqrt{58}$
La bisettrice del primo-terzo quadrante ha equazione $y=x$ e incontra la circonferenza nei punti

$$\begin{cases} x^2+y^2-7x-3y & = & 0 \\ y & = & x \end{cases}$$

da cui

$$2x^2-10x=0$$

le intersezioni saranno

$$M(0;0) \qquad N(5;5)$$

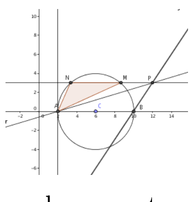
la corda avrà lunghezza

$$MN=\sqrt{25+25}=5\sqrt{2}$$

la differenza tra le due corde è

$$\Delta=\sqrt{58}-5\sqrt{2}\simeq 0.54$$

Exercise 0.1.2. Scrivere l'equazione della circonferenza di diametro AB. I punti A e B sono le intersezioni tra l'ascissa e le rette $r: 3x-10y-6=0$ ed $s: 3x-2y-30=0$. Sia P il punto di intersezione delle due rette. P è interno alla circonferenza? Si conduca da P la perpendicolare alla tangente condotta per A e siano M e N le intersezioni con la circonferenza. Si calcoli la misura dell'area del triangolo MNA.



Soluzione:: La figura, costruita con Geogebra, mostra abbastanza chiaramente la decodifica del testo del problema.

(1) troviamo il punto A di ordinata $y=0$, appartenente alla retta r:

$$3x-6=0 \qquad\qquad x=2$$

$$A(2;0)$$

(2) troviamo il punto B ancora di ordinata $y=0$, appartenente alla retta s:

$$-3x+30=0 \qquad x=10$$

$$B(10;0)$$

(3) la circonferenza avrà pertanto centro nel punto medio $C\,(6;0)$ e raggio $r=\frac{10-2}{2}=4$: l'equazione sarà

$$(x-6)^2+y^2=4^2$$

sviluppando, si ottiene

$$x^2+y^2-12x+20=0$$

(4) troviamo il punto P, l'intersezione tra le due rette r,s:

$$\begin{cases} 3x-10y-6 &= 0\\ 3x-2y-30 &= 0\end{cases} \qquad \begin{cases} 8y-24 &= 0\\ 3x-2y-30 &= 0\end{cases}$$

$$P\,(3;12)$$

(5) la tangente alla circonferenza sarà una retta parallela all'asse y di equazione $y=2$

(6) la perpendicolare alla tangente passante per P sarà una retta parallela all'asse x di equazione $y=3$

(7) Le intersezioni della circonferenza con la perpendicolare $y=3$ saranno

$$x^2+9-12x+20=0$$

cioè

$$x^2-12x+29=0$$

applicando la formula ridotta,

$$x_{1,2} = 6\pm\sqrt{36-29}$$

$$M\left(3;6-\sqrt{7}\right) \qquad N\left(3;6+\sqrt{7}\right)$$

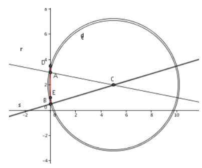
(8) Il triangolo AMN avrà la base $MN=6+\sqrt{7}-6+\sqrt{7}=2\sqrt{7}$ e altezza 3; l'area sarà

$$A_{AMN}=\frac{2\sqrt{7}\times 3}{2}=3\sqrt{7}$$

Exercise 0.1.3. Sono date le rette r e s aventi rispettivamente equazione

$$y=-\frac{1}{5}x+3 \qquad y=\frac{3}{10}x+\frac{1}{2}$$

Sia C la loro intersezione. Si scrivano le equazioni delle circonferenze con centro in C e passanti rispettivamente per A e B, intersezioni di ciascuna delle rette date con l'asse y. Siano D e E le ulteriori intersezioni di ciascuna delle circonferenze con l'asse delle ordinate. Si determini il rapporto DE/AB.



Soluzione:: La figura descrive il problema; vediamo le singole procedure:

(1) intersezione C tra le due rette:

$$\begin{cases} y &= -\frac{1}{5}x+3\\ y &= \frac{3}{10}x+\frac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{10}x+\frac{1}{2} &= -\frac{1}{5}x+3\\ y &= \frac{3}{10}x+\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x &= \frac{5}{2}\\ y &= \frac{3}{10}x+\frac{1}{2}\end{cases} \qquad C\ \begin{cases} x &= 5\\ y &= 2\end{cases}$$

(2) intersezioni delle rette con l'asse y

$$\begin{cases} y &= -\frac{1}{5}x+3\\ x &= 0\end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 0\\ y &= 3\end{cases}$$

$$A(0;3)$$

$$\begin{cases} x &= 0\\ y &= \frac{3}{10}x+\frac{1}{2}\end{cases} \qquad \begin{cases} x &= 0\\ y &= \frac{1}{2}\end{cases}$$

$$B\left(0;\frac{1}{2}\right)$$

(3) circonferenza γ di centro C e passante per A; il raggio sarà la distanza
$$AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$
l'equazione sarà
$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 26$$
svolgendo i prodotti notevoli, si ha
$$\gamma: \qquad x^2 + y^2 - 10x - 4y + 3 = 0$$

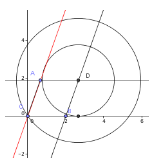
(4) circonferenza γ' di centro C e passante per B; il raggio sarà la distanza
$$BC = \sqrt{25 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{109}{4}}$$
l'equazione sarà
$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = \frac{109}{4}$$
svolgendo, si ha
$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + \frac{7}{4} = 0$$
oppure
$$\gamma^{'}: \qquad 4x^2 + 4y^2 - 40x - 16y + 7 = 0$$
le due circonferenze sono concentriche.

(5) Intersezioni della circonferenza γ con l'asse y
$$\gamma \quad \begin{cases} x & = & 0 \\ y^2 - 4y + 3 & = & 0 \end{cases}$$
$$A\,(0;3) \qquad E\,(0;1)$$

(6) Intersezioni della circonferenza γ' con l'asse y
$$\gamma' \quad \begin{cases} x & = & 0 \\ 4y^2 - 16y + 7 & = & 0 \end{cases}$$
risolvendo l'equazione di secondo grado
$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{4} = \frac{7}{2}; \frac{1}{2}$$
per cui
$$D\left(0; \frac{7}{2}\right)$$

(7) Calcoliamo ora il rapporto tra le due corde
$$\frac{DE}{AB} = \frac{\frac{7}{2}-1}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

Exercise 0.1.4. Si consideri la retta di equazione
$$y = 2\sqrt{2}x$$
e su di essa un punto A nel primo quadrante. Sia $B(2;0)$, si scrivano le equazioni dei lati del rombo di vertici AOB, sia D l'ultimo vertice. (O è l'origine degli assi). Si scriva l'equazione della circonferenza con centro in D passante per l'origine e l'equazione della circonferenza ad essa concentrica tangente all'asse delle x. Si calcoli la differenza delle lunghezze delle due circonferenze.



Soluzione:: il disegno mostra le caratteristiche del problema; in particolare la scelta del punto è vincolata dal fatto che il lato $AO = OB$, dovendo risultare un rombo (la retta data è colorata in rosso).

(1) Il lato OB del rombo ha una lunghezza pari a 2; anche $AO = 2$. Il punto A appartiene alla retta data e quindi le sue coordinate sono $A\left(x; 2\sqrt{2}x\right)$. Pertanto, attraverso la formula della distanza si ha

$$2 = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{2}x\right)^2} = 3x$$

il modulo non è necessario, essendo per ipotesi $x_A > 0$

$$x = \frac{2}{3}$$

il punto avrà coordinate $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

(2) l'equazione della retta che contiene il lato OB è quella dell'asse x, cioè $y = 0$; l'equazione della retta AO è data $y = 2\sqrt{2}x$; la retta BD è parallela alla retta AO; avrà quindi lo stesso coefficiente angolare: utilizziamo l'equazione delle rette per un punto

$$y - 0 = 2\sqrt{2}(x-2) \quad cio \quad y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$$

la retta per AD è parallela all'asse x e sarà $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) per trovare le coordinate di D possiamo utilizzare la proprietà del rombo di avere diagonali che si incontrano nel punto medio, oppure, data la semplicità del calcolo, intersecare le due rette che lo hanno in comune

$$\begin{cases} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ y &= 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} &= 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x &= \frac{16\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \end{cases}$$

razionalizzando

$$D: \begin{cases} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x &= \frac{8}{3} \end{cases}$$

(4) l'equazione della circonferenza di centro D e raggio $DO^2 = \frac{32}{9} + \frac{64}{9} = \frac{32}{3}$, avrà equazione

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{3}$$

svolgendo

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8\sqrt{2}}{3}y = 0$$

l'altra circonferenza ha centro sempre in D ed è tangente all'asse x, cioè la distanza tra l'asse x e la retta parallela passante per D è la lunghezza del raggio; pertanto il raggio avrà lunghezza pari all'ordinata di D: $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. L'equazione sarà

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

svolgendo

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8\sqrt{2}}{3}y + \frac{64}{9} = 0$$

(5) Calcoliamo la lunghezza delle due circonferenze, ricordando la formula $2\pi r$

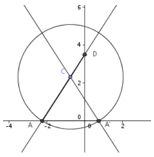
$$\gamma = 2\pi\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3} \qquad \gamma' = 2\pi\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\gamma - \gamma' = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Exercise 0.1.5. É data la retta di equazione

$$y = \frac{14}{9}x + \frac{7}{2}$$

Siano D ed A i punti in cui interseca rispettivamente l'asse y e l'asse x. Sul segmento AD si prenda un punto C tale che risulti $AC = 2CD$. Si scriva l'equazione della circonferenza di centro C e passante per A. Si calcoli la lunghezza della corda AA' intercettata dalla circonferenza sull'asse delle x. Si scriva l'equazione della retta CA'.



Soluzione:: la figura mostra già il caso in cui il punto C verifica la condizione assegnata.

(1) Calcoliamo le intercette della retta assegnata: il punto D avrà ascissa $x=0$, per cui $D\left(0;\frac{7}{2}\right)$; il punto A avrà ordinata $y=0$, per cui $A\left(-\frac{9}{4};0\right)$

(2) Se $AC=2CD$ allora $AD=3CD=\frac{3}{2}AC$. Per trovare le coordinate del punto C possiamo supporre di tracciare la parallela agli assi x e y passanti per C. In tal modo per un teorema della geometria relativa alle rette parallele, anche i segmenti OA e OD vengono divisi nello stesso rapporto, per cui

$$\begin{aligned} x_A : x_C &= 3:1 \\ y_D : y_C &= 3:2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3}x_A = -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{3}{4} \\ y_c &= \frac{2}{3}y_D = \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(3) La circonferenza di centro $C\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{3}\right)$ e passante per A, cioè di raggio $CA=\sqrt{\left(-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)^2+\left(0-\frac{7}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{277}{36}}$. La sua equazione sarà

$$\gamma:\ \left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{7}{3}\right)^2=\frac{277}{36}$$

svolgendo, si ha

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x-\frac{14}{3}y-\frac{27}{16}=0$$

(4) Le coordinate di A' si ottengono intersecando la circonferenza con l'asse x, cioè con la retta $y=0$:

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{27}{16}=0$$

una soluzione è sicuramente $-\frac{9}{4}$ e dalle proprietà delle soluzioni delle equazioni di secondo grado si ottiene

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= -\frac{27}{16} \\ -\frac{9}{4}x_2 &= -\frac{27}{16} \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Il punto avrà coordinate $A'\left(\frac{3}{4};0\right)$; la corda $AA'=\left|\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right|=3$

(5) la retta CA' avrà equazione

$$\frac{y-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{x}{\frac{7}{3}}$$

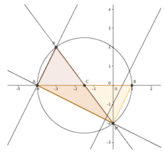
da cui svolgendo

$$y=-\frac{9}{14}x+\frac{3}{4}$$

Exercise 0.1.6. É data la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2+3x-4=0$$

che interseca nel punto A il semiasse negativo delle ascisse. Scrivere le equazioni della (1) retta passante per A e parallela alla retta di equazione $2x-y-1=0$; (2) della retta passante per A e perpendicolare alla retta di equazione $2x-y-1=0$. Siano P e P' le ulteriori intersezioni con la circonferenza. Scritta l'equazione della retta PP' si provi che essa passa per il centro della circonferenza. Si calcoli infine il rapporto delle aree dei triangoli PAP' e ABP', dove B è l'intersezione di ascissa positiva della circonferenza con l'asse x.



Soluzione:: Dall'equazione della circonferenza è possibile ottenere le coordinate del centro $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$

$$\begin{aligned} x_C &= -\frac{a}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_C &= 0 \end{aligned}$$

(1) troviamo le coordinate dei punti A e B, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza e dell'asse x, $y=0$; si ha

$$x^2+3x-4=0$$

applicando le proprietà delle soluzioni si ottiene

$$\begin{array}{cc} x_1=-4 & x_2=1 \\ A(-4;0) & B(1;0) \end{array}$$

la retta data $2x-y-1=0$ ha coefficiente angolare $m=2$ e la retta passante per A e parallela avrà equazione

$$r: \quad y=2(x+4)=2x+8$$

(2) troviamo l'equazione della retta perpendicolare alla data e passante per A allo stesso modo, sapendo che tale perpendicolare avrà coefficiente angolare $m=-\frac{1}{2}$

$$s \quad y=-\frac{1}{2}(x+4)=$$

(3) troviamo le intersezioni delle due rette con la circonferenza

$$P\begin{cases} x^2+y^2+3x-4 &= 0 \\ y-2x+8 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+4x^2-32x+64+3x-4 &= 0 \\ -2x+8 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2-29x+60 &= 0 \\ -2x+8 &= y \end{cases}$$

una soluzione è $x_1=-4$ (ascissa del punto A); l'altra sarà $x_1x_2=12$ $\left(\frac{c}{a}\right)$, da cui $x_2=-3$. Il punto avrà coordinate $P(-3;2)$. La stessa procedura per ricavare P'

$$P\begin{cases} x^2+y^2+3x-4 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+\frac{1}{4}x^2+2x+4+3x-4 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{4}x^2+5x &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases}$$

da cui si ottengono le soluzioni $x_1=-4$ e $x_2=0$. Il punto avrà coordinate $P^{'}(0;-2)$

(4) calcoliamo l'equazione delle retta passante per $PP^{'}$

$$\frac{y+2}{2+2}=\frac{x}{-3}$$

da cui si ricava

$$4x+3y+6=0$$

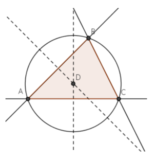
Il centro C della circonferenza appartiene a tale retta, infatti $4\left(-\frac{3}{2}\right)+6=0$ è verificata.

(5) I due triangoli sono entrambi rettangoli essendo inscritti in una semicirconferenza. Avendo $AP^{'}$ in comune e $PP^{'}=AB$, diametri della stessa circonferenza, ed essendo retti i due triangoli risultano congruenti. Il rapporto tra le loro aree è uguale a 1, poiché triangoli congruenti sono anche equivalenti.

Exercise 0.1.7. Un triangolo ha i lati appartenenti alle rette

$$y=x \quad y=1 \quad y=-2x+4$$

Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo e determinare le coordinate del circocentro.



Soluzione:: la figura mostra le tre rette nel piano cartesiano e le loro intersezioni, evidenziando il triangolo ABC (scala ingrandita)

(1) troviamo le coordinate dei vertici del triangolo, intersecando le rette che li hanno a due a due in comune; il vertice A è determinato dalla intersezione delle rette $y = x$ e $y = 1$, quindi

$$A\,(1;1)$$

il vertice B è l'intersezione tra le rette $y = x$ e $y = -2x + 4$, da cui

$$B\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$$

il vertice C è quello in comune tra le rette $y = -2x + 4$ e $y = 1$, da cui

$$C\left(\frac{3}{2};1\right)$$

(2) troviamo l'equazione della circonferenza passante per i tre punti. Sostituiamo pertanto, nell'equazione generale della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, le coordinate dei tre punti; otterremo in tal modo un sistema a tre equazioni nelle incognite a, b, c

$$\begin{cases} 1+1+a+b+c = 0 \\ \frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c = 0 \\ \frac{9}{4}+1+\frac{3}{2}a+b+c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b+c = -2 \\ \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c = -\frac{32}{9} \\ \frac{3}{2}a+b+c = -\frac{13}{4} \end{cases}$$

sostituiamo alla terza equazione la differenza tra la terza e la prima, ricavando in tal modo a

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a = -\frac{5}{4} \\ \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c = -\frac{32}{9} \\ a+b+c = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ \frac{4}{3}b+c = -\frac{2}{9} \\ b+c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sostituiamo la seconda equazione con la differenza tra la seconda e la terza

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{3}b = -\frac{13}{18} \\ b+c = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = -\frac{13}{6} \\ c = \frac{8}{3} \end{cases}$$

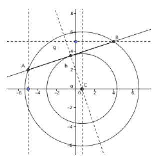
L'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - \frac{13}{6}y + \frac{8}{3} = 0$$

(3) Le coordinate del circocentro sono ovviamente quelle del centro della circonferenza circoscritta e sono immediatamente ricavabili dall'equazione della circonferenza

$$\begin{aligned} x_D &= -\frac{a}{2} = \frac{5}{4} \\ y_D &= -\frac{b}{2} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

EXERCISE 0.1.8. É data la retta AB di equazione $x - 3y + 11 = 0$. Si sa che $x_A = -5$ e che $y_B = 5$. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha AB come corda e centro in un punto C di ascissa $x = \frac{2}{3}$. Scrivere inoltre l'equazione della circonferenza concentrica alla precedente e tangente ad AB.



Soluzione:: la figura mostra la retta AB e le due circonferenze; il centro C è ottenuto dall'intersezione tra le retta di ascissa data e l'asse della corda AB.

(1) troviamo le coordinate dei punti A e B. Appartenendo alla retta data, possiamo sostituire al posto di x il valore $x_A = -5$, ottenendo $y = 2$; lo stesso con $y_B = 5$, da cui $x = 15 - 11 = 4$. I punti avranno coordinate $A\,(-5;2)$ e $B\,(4;5)$

(2) troviamo le coordinate del centro C della circonferenza avente AB come corda. Sappiamo che $x_C = \frac{2}{3}$ e che quindi appartiene alla retta $x = \frac{2}{3}$; il centro appartiene inoltre all'asse della corda AB, per le proprietà geometriche delle corde. Troviamo il punto medio di AB

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2} \\ M_y &= \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

il coefficiente angolare della retta per AB è ${}_{AB}=\frac{1}{3}$; il coefficiente angolare dell'asse sarà $m=-3$, essendo perpendicolare alla corda. L'equazione dell'asse si ottiene da

$$\begin{aligned} y-y_M &= -3\left(x-x_M\right) \\ y-\frac{7}{2} &= -3\left(x+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

calcolando, si ottiene

$$y=-3x+2$$

Intersecando ora le due rette alle quali C appartiene si ha

$$C\left(\frac{2}{3};0\right)$$

La circonferenza avrò raggio

$$AC=\sqrt{\left(\frac{2}{3}+5\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{325}}{3}$$

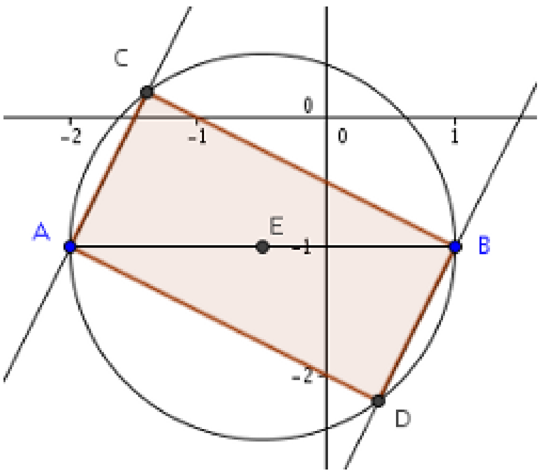
La circonferenza avrà equazione

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{325}{9}$$

(3) La seconda circonferenza ha raggio $CM=\sqrt{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{245}{18}}$ e avrà equazione

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{245}{18}$$

Exercise 0.1.9. I punti $A\left(-2;-1\right)$ e $B\left(1;-1\right)$ sono gli estremi di un diametro di una circonferenza di cui si chiede l'equazione. Si provi che la retta $y=2x+3$ passa per A. Si conduca ad essa la parallela passante per B. Siano C e D le ulteriori intersezioni di tali retta, considerate nell'ordine, con la circonferenza. Si provi che $ABCD$ è un rettangolo verificando con il calcolo le pendenze delle rette AD e CB. Si calcoli infine la misura del suo perimetro.



Soluzione:: La figura mostra la geometria del problema.

(1) Essendo AB un diametro, il suo punto medio è il centro E della circonferenza e la sua semi lunghezza, il raggio:

$$E\left(-\frac{1}{2};-1\right)\qquad r=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{3}{2}$$

la circonferenza ha equazione

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+1\right)^2=\frac{9}{4}$$

svolgendo

$$x^2+y^2+x+2y-1=0$$

(2) Se il punto A appartiene alla retta $y = 2x + 3$, allora le sue coordinate verificano tale equazione

$$-1 = -4 + 3 = -1$$

il punto A appartiene pertanto alla retta assegnata

(3) La circonferenza interseca la retta $y = 2x + 3$, oltre che in A anche in

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y - 1 = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + x + 4x + 6 - 1 &= 0 \\ 5x^2 + 17x + 14 &= 0 \end{aligned}$$

il prodotto delle sue soluzioni è $\frac{14}{5}$ e una soluzione è -2, per cui

$$\begin{aligned} -2x_2 &= \frac{14}{5} \\ x_2 &= -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

il punto avrà coordinate $C\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$

(4) Per ricavare le coordinate del punto D è necessario prima calcolare l'equazione della retta parallela a $y = 2x + 3$ e passante per il punto B

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

cioè

$$y = 2x - 3$$

Troviamo ora D

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

sostituendo

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 - 12x + 9 + x + 4x - 6 - 1 &= 0 \\ 5x^2 - 7x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

risolvendo, si ha

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10} = 1 \, e \, \frac{2}{5}$$

Le coordinate del punto sono $D\left(\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}\right)$

(5) Verifichiamo che il quadrilatero $ABDC$ è un rettangolo. Innanzitutto le rette AC e BD sono parallele per costruzione e hanno coefficiente angolare uguale

$$m_{AB} = m_{CD} = 2$$

troviamo il coefficiente angolare di BC e AD

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{7}{5}} = -\frac{1}{2} \\ m_{AD} &= \frac{-1 + \frac{11}{5}}{-2 - \frac{2}{5}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

le due rette sono parallele e inoltre sono perpendicolare agli altri due lati, poiché il prodotto tra i coefficienti angolari è $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

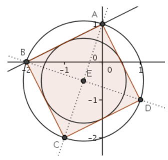
(6) Il perimetro del rettangolo si ottiene calcolando la lunghezza di due lati consecutivi

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{\left(-1 + \frac{11}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{2}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ AC &= \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{7}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Il perimetro è

$$2p = 2\left(\frac{6\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

EXERCISE 0.1.10. É assegnata la retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$. A è il suo punto di ordinata 1 e B l'intersezione con l'asse delle x. Si costruisca il quadrato di lato AB nel semipiano $y < y_r$. Si determinino le equazioni dei lati e le coordinate dei vertici. Si scrivano le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta.



Soluzione:: Il semipiano con $y < y_r$ rappresenta il semipiano al di sotto della retta r. Il centro delle due circonferenze è comune e si trova sull'intersezione delle diagonali del quadrato (come mostrato in figura).

(1) Il punto A rappresenta l'ordinata all'origine della retta r e ha coordinate $A\,(0;2)$; il punto B, intersezione con l'asse x, è un punto ad ordinata nulla; sostituendo pertanto $y = 0$ nell'equazione della retta r, si trova $B(-2;0)$.

(2) Per trovare il quadrato, osserviamo che la retta CD è parallela ad AB e dista da essa $\sqrt{5}$, cioè la lunghezza del lato del quadrato. Tale retta avrà quindi equazione

$$\sqrt{5} = \frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}}$$

svolgendo si ha

$$\begin{aligned} x - 2y + 2 &= 5 \\ x - 2y + 2 &= -5 \end{aligned}$$

dovendo tale retta trovarsi nel semipiano $y < y_r$ consideriamo solo l'equazione

$$\begin{aligned} x - 2y + 2 &= 5 \quad cio \\ CD: \quad x - 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

la retta BC è perpendicolare ad AB, con $m = \frac{1}{2}$, e passante per il punto B, cioè

$$y - 0 = -2\,(x + 2)$$

da cui

$$BC: \; y = -2x - 4$$

la retta AD è parallela a BC e passa per A:

$$y - 1 = -2x$$

cioè

$$AD: \quad y = -2x + 1$$

Per trovare il punto C si può, per esempio, intersecare le rette BC, CD (lo si può calcolare anche imponendo $BC = \sqrt{5}$).

$$\begin{cases} y = -2x - 4 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x - 4 \\ x + 4x + 8 - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \qquad C\,(-1;-2)$$

Analogamente per D:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} y = -2x + 1 \\ x + 4x - 2 - 3 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \; D\,(1;-1)$$

(3) Troviamo il centro comune alle due circonferenze, calcolando il punto medio della diagonale BD

$$E\left(\frac{-2+1}{2}; \frac{0-1}{2}\right) \qquad E\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$$

Il raggio della circonferenza inscritta è la metà del lato del quadrato, cioè $\frac{\sqrt{5}}{2}$. L'equazione della circonferenza inscritta è

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

cioè

$$x^2 + y^2 + x + y - \frac{3}{4} = 0$$

La circonferenza circoscritta ha raggio uguale alla semi diagonale, cioè $\frac{d}{2} = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{4}$$

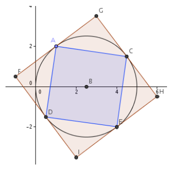
cioè

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

Exercise 0.1.11. É data la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 5x = 0$$

Provare che il punto $A\,(1;2)$ le appartiene. Scrivere le coordinate dei vertici del quadrato inscritto $ACED$ e successivamente le equazioni dei lati del quadrato circoscritto con punti di contatto A, C, E, D



Soluzione:: La figura mostra la disposizione dei quadrati determinata dalla posizione del punto A. La circonferenza ha centro $B\left(\frac{5}{2};0\right)$ e raggio $r = \frac{5}{2}$, passando tale circonferenza per l'origine.

(1) Verifichiamo l'appartenenza di A alla circonferenza, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della stessa:

$$1^2 + 2^2 - 5 \cdot 1 = 0$$

il punto A appartiene alla circonferenza.

(2) Troviamo i rimanenti vertici del quadrato. Il centro B è il punto medio di AE, da cui

$$\begin{aligned} E_x &= 2x_B - x_A = 5 - 1 = 4 \\ E_y &= 2y_B - y_A = 0 - 2 = -2 \end{aligned}$$

la diagonale AE è perpendicolare alla diagonale CD ed entrambe si incontrano nel loro punto medio, B. Pertanto, troviamo il coefficiente angolare di AE

$$m_{AE} = \frac{2+2}{1-4} = -\frac{4}{3}$$

la retta CD passante per B, sarà

$$y - 0 = \frac{3}{4}\left(x - \frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8}$$

Questa retta interseca la circonferenza in

$$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{8} \\ x^2 + \left(\frac{3}{4}x - \frac{15}{8}\right)^2 - 5x = 0 \end{cases}$$

da cui

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + \frac{225}{64} - \frac{45}{16}x - 5x = 0$$

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{125}{16}x + \frac{225}{64} = 0$$

risolvendo

$$x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{9}{2}$$

I rimanenti vertici del quadrato avranno coordinate

$$C\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \qquad D\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$$

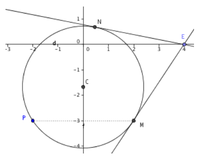
(3) Per ottenere le equazioni del quadrato circoscritto, basta osservare che essi sono paralleli alle diagonali del quadrato inscritto. Le rette dei lati FG e HI avranno coefficiente angolare uguale a quello di CD, cioè $\frac{3}{4}$, e quindi

$$\begin{aligned} FG: &\quad y-2=\frac{3}{4}(x-1) \\ FG: &\quad y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \\ \\ HI: &\quad y+2=\frac{3}{4}(x-4) \\ HI &\quad y=\frac{3}{4}x-5 \end{aligned}$$

Le rette dei lati FI e GH hanno coefficiente angolare $m=-\frac{4}{3}$, e quindi

$$\begin{aligned} FI: &\quad y-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right) \\ FI: &\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{15}{2} \\ \\ GH: &\quad y+\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ GH: &\quad y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Exercise 0.1.12. Scrivere l'equazione della circonferenza con centro in $C\left(0;-\frac{5}{3}\right)$ e passante per il punto $P(-2;-3)$. Dal punto $E(4;0)$ si conducano le tangenti alla circonferenza e si verifichi che il punto di tangenza di ordinata negativa è simmetrico di P rispetto all'asse delle ordinate.



Soluzione:: due punti si dicono simmetrici rispetto all'asse y se hanno la stessa ordinata e ascissa opposta.

(1) troviamo il raggio della circonferenza

$$CP=\sqrt{2^2+\left(-\frac{5}{3}+3\right)^2}=\sqrt{4+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{52}{9}}$$

L'equazione della circonferenza è

$$x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$$

svolgendo

$$x^2+y^2+\frac{10}{3}y-3=0$$

(2) Per trovare le coordinate dei punti M,N poniamo a sistema l'equazione della circonferenza con il fascio di rette centrato in E. Il fascio di rette proprio di centro E è

$$y=m(x-4)=mx-4m$$

risolviamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} y=mx-4m \\ x^2+m^2x^2-8m^2x+16m^2+\frac{10}{3}mx-\frac{40}{3}m-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=mx-4m \\ x^2\left(1+m^2\right)-2mx\left(4m-\frac{5}{3}\right)+16m^2-\frac{40}{3}m-3=0 \end{cases}$$

Affinché le rette del fascio risultino tangenti, è necessario che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo, cioè

$$m^2\left(4m-\frac{5}{3}\right)^2-\left(1+m^2\right)\left(16m^2-\frac{40}{3}m-3\right)=0$$

svolgendo, si ottiene

$$16m^4-\frac{40}{3}m^3+\frac{25}{9}m^2-16m^2+\frac{40}{3}m+3-16m^4+\frac{40}{3}m^3+3m^2=0$$

$$92m^2 - 120m - 27 = 0$$

le soluzioni sono

$$m_{1,2} = \frac{60 \pm \sqrt{3600 + 2484}}{92} = \frac{60 \pm 78}{92}$$

i valori sono

$$m_1 = \frac{138}{92} = \frac{3}{2} \qquad m_2 = -\frac{9}{46}$$

Le tangenti hanno equazione

$$y = \frac{3}{2}x - 6 \qquad y = -\frac{9}{46}x + \frac{18}{23}$$

(3) La retta che interseca la circonferenza nel punto M ha coefficiente angolare positivo e quindi sarà $y = \frac{3}{2}x - 6$. Il raggio CM sarà perpendicolare a tale retta e avrà equazione

$$y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

Il punto M sarà pertanto l'intersezione delle due rette

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ y = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases}$$

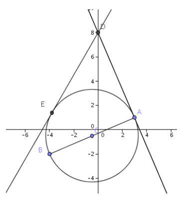
$$\begin{cases} \frac{13}{6}x = \frac{13}{3} \\ y = \frac{3}{2}x - 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$$

Risulta pertanto verificato che il punto M è simmetrico di P rispetto all'asse y, avendo i due punti uguale ordinata e ascissa opposta.

Exercise 0.1.13. Data la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + x + y - 14 = 0$$

provare che i punti $A(3;1)$ e $B(-4;-2)$ sono estremi di un diametro. Si scriva l'equazione della tangente in A e si mandi dal punto in cui essa interseca l'asse delle y la ulteriore tangente alla circonferenza.



Soluzione:: Ricordando le relazioni che legano i coefficienti dell'equazione alle coordinate del centro $(x_c = -\frac{a}{2};\ y_c = -\frac{b}{2})$ e al raggio $(r^2 = x_c^2 + y_c^2 - c)$, si ha

$$C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \qquad r = \sqrt{\frac{29}{4}}$$

(1) I punti A, B appartengono alla circonferenza

$$9 + 1 + 3 + 1 - 14 = 0 \qquad 14 - 14 = 0 \quad s$$
$$16 + 4 - 4 - 2 - 14 = 0 \qquad 20 - 20 = 0 \quad s$$

Calcoliamo il punto medio del segmento AB

$$\frac{3-4}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

proprio le coordinate del centro.

(2) la retta AB ha coefficiente angolare

$$m_{AB} = \frac{1+2}{3+4} = \frac{3}{7}$$

la retta tangente in A avrà quindi $m = -\frac{7}{3}$ e equazione

$$y - 1 = -\frac{7}{3}(x - 3) \qquad y = -\frac{7}{3}x + 8$$

Tale retta interseca pertanto l'asse delle y nel punto $D(0;8)$

(3) Per calcolare l'equazione della tangente in E, invece del solito sistema, possiamo utilizzare le simmetrie assiali. Il punto E, infatti, è simmetrico di A rispetto alla retta CD, per le proprietà geometriche delle tangenti ad una circonferenza tracciate da un punto esterno. Troviamo l'equazione della retta CD: passando per $D(0;8)$ avrà il parametro $q=8$; il suo $m=\frac{8+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=17$; la retta sarà

$$y=17x+8$$

Ora, la perpendicolare alla retta CD passante per A è

$$\begin{aligned} y-1 &= -\frac{1}{17}(x-3) \\ y &= -\frac{1}{17}x+\frac{20}{17} \end{aligned}$$

tale retta interseca la retta CD nel punto medio del segmento EA. Troviamo questo punto medio

$$\begin{cases} y=17x+8 \\ 17x+8=-\frac{1}{17}x+\frac{20}{17} \end{cases} \qquad \begin{cases} y=\frac{6}{5} \\ x=-\frac{116}{290}=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

Dalle formule inverse del punto medio possiamo ricavare E

$$\begin{aligned} E_x &= 2x_M-x_A=-\frac{19}{5} \\ E_y &= 2y_M-y_A=\frac{7}{5} \end{aligned}$$

La tangente cercata è la retta passante per $D(0;8)$, quindi con $q=8$ e di coefficiente angolare $m=\frac{8-\frac{7}{5}}{\frac{19}{5}}=\frac{33}{19}$; la retta avrà pertanto equazione

$$y=\frac{33}{19}x+8$$