Esercizi di Geometria Analitica

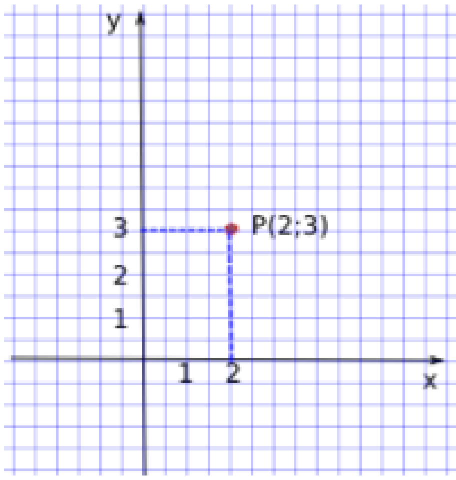
svolti dal Prof. Gianluigi Trivia

CAPITOLO 1

Coordinate cartesiane

1.1. Coordinate cartesiane nel piano

Il piano cartesiano è caratterizzato da due rette perpendicolari che si intersecano in un punto, detto origine O. La retta orizzontale è detta asse delle ascisse, x, mentre quella verticale è detta asse delle ordinate, y. Il punto origine funge da riferimento e su entrambe le rette viene scelta una unità di misura; se le due unità coincidono, il piano è detto monometrico, in caso contrario, dimetrico. Ogni punto del piano è pertanto individuabile univocamente tramite due numeri reali, che rappresentano le coordinate del punto e indicano la posizione di tale punto rispetto all'origine lungo l'asse orizzontale e verticale, misurata nell'unità scelta.



Il punto in è univocamente definito dalla coppia di numeri $P(2;3)$.

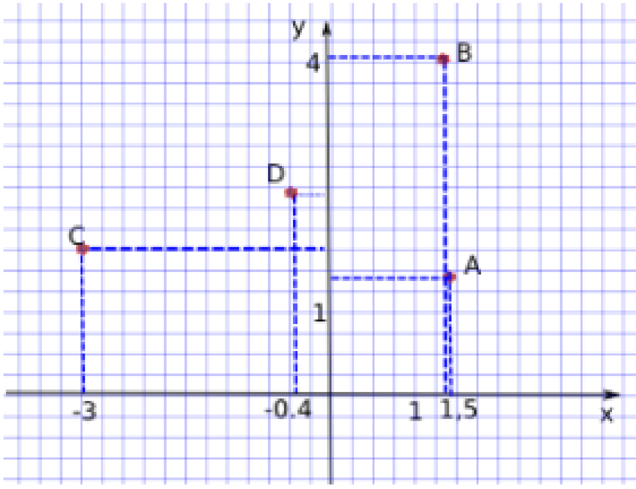
Esercizio 1. In un riferimento cartesiano ortogonale rappresentare i seguenti punti:

$$A\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right) \qquad B\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{9}{\sqrt{5}}\right)$$
$$C\left(-3;\frac{5}{3}\right) \qquad D\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$$

Soluzione. La scelta dei valori indica che, nella maggior parte dei casi, la posizione di questi punti sul piano dovrà essere approssimata nel miglior modo possibile; a tale scopo, si esprimono le coordinate contenenti radicali, mediante un valore approssimato e le si rappresenta nel piano scegliendo in modo opportuno l'unità di misura. In questo caso

$$\sqrt{2} \simeq 1,4 \qquad \frac{3}{\sqrt{5}} \simeq 1.3$$
$$\frac{9}{\sqrt{5}} \simeq 4.0 \qquad \frac{5}{3} \simeq 1,7$$

Nel disegno una possibile scelta

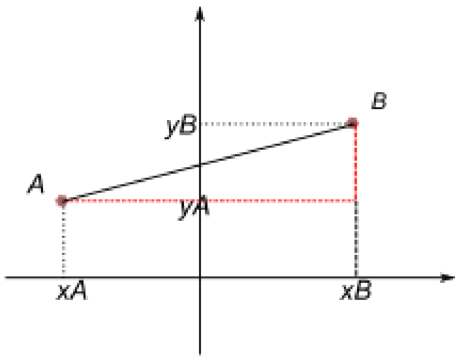


1.2. Distanza tra due punti

La distanza tra due punti si calcola mediante una formula che è semplicemente la traduzione nel linguaggio delle coordinate del teorema di Pitagora.

$$\overline{AB}=\sqrt{\left(x_A-x_B\right)^2+\left(y_A-y_B\right)^2}$$

dove x_A, y_A, x_B, y_B sono le coordinate dei due punti considerati.



Esercizio 2. Determinare la distanza tra le seguenti coppie di punti:

$$\begin{array}{cc} A\left(-2;3\right) & B\left(4;-1\right) \\ C\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) & D\left(1;1\right) \\ E\left(\sqrt{3};1-\sqrt{2}\right) & F\left(0;1\right) \end{array}$$

Soluzione. Applichiamo la formula prima ricordata

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{\left(-2-4\right)^2+\left(3-\left(-1\right)\right)^2}=\sqrt{\left(-6\right)^2+4^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13} \\ \overline{CD} &= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2+\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{18}{4}}=\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \overline{EF} &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-0\right)^2+\left(1-\sqrt{2}-1\right)^2}=\sqrt{3+2}=\sqrt{5} \end{aligned}$$

:

Esercizio 3. Determinare le coordinate del punto medio del segmento congiungente le seguente coppie di punti:

$$\begin{array}{cc} A\left(-3;-5\right) & B\left(-1;4\right) \\ C\left(\frac{8}{15};1\right) & D\left(-1;-\frac{3}{4}\right) \\ E\left(\frac{\sqrt{2}}{2};3\sqrt{2}\right) & F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right) \end{array}$$

SOLUZIONE. Le coordinate del punto medio, M, di un segmento AB sono ottenibili, ricordando che

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} x_{M(AB)} &= \frac{-3-1}{2} = -2 \\ y_{M(AB)} &= \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2} \\ x_{N(CD)} &= \frac{\frac{8}{15}-1}{2} = -\frac{7}{30} \\ y_{N(CD)} &= \frac{1-\frac{3}{4}}{2} = \frac{1}{8} \\ x_{P(EF)} &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4} \\ y_{P(EF)} &= \frac{3\sqrt{2}+1}{2} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. Determinare le coordinate dell'estremo B del segmento AB, conoscendo le coordinate di A e del punto medio M del segmento nel caso in cui $A(-3;-5)$ e $M(1;-2)$

SOLUZIONE. In questo caso dobbiamo utilizzare la formula inversa, cioè

$$\begin{aligned} x_B &= 2x_M - x_A \\ y_B &= 2y_M - y_A \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_B &= 2 \cdot 1 - (-3) = 5 \\ y_B &= 2 \cdot (-2) - (-5) = 1 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5. Determinare il punto P che divide il segmento di estremi $A(3;8)$ e $B(-1;-4)$ in due parti tali che

$$AP = \frac{3}{4}AB$$

SOLUZIONE. Applicando il teorema di Talete, se $AP = \frac{3}{4}AB$ allora anche le proiezioni di tali segmenti sugli assi coordinati staranno nello stesso rapporto, cioè espressi dalla relazione generale

$$x_P = \alpha x_A + (1-\alpha)\, x_B$$

$$\begin{aligned} x_P &= \frac{1}{4}(3) + \frac{3}{4}(-1) = 0 \\ y_P &= \frac{1}{4}(8) + \frac{3}{4}(-4) = -1 \end{aligned}$$

1.3. Problemi

ESERCIZIO 6. Verificare che il triangolo di vertici $A(2;3)$, $B(0;1)$ e $C(1;0)$ è rettangolo e calcolarne perimetro ed area.

SOLUZIONE. Per l'inverso del th. di Pitagora, sappiamo che un triangolo è rettangolo se vale la relazione

$$ipotenusa^2 = cateto1^2 + cateto2^2$$

Calcoliamo pertanto la lunghezza dei lati

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{(2-1)^2+(3-0)^2} = \sqrt{10} \end{aligned}$$

Verifichiamo la relazione, dove AC è la possibile ipotenusa, essendo il lato maggiore:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2+BC^2 \\ 10 &= 8+2 \quad \textit{vero} \end{aligned}$$

Il triangolo è pertanto rettangolo. Calcoliamo perimetro e area

$$\begin{aligned} 2p &= 2\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{10} = 3\sqrt{2}+\sqrt{10} \\ A &= \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2 \end{aligned}$$

Esercizio 7. Verificare che il quadrilatero di vertici $A(-2;1)$, $B(-2;-4)$, $C(1;0)$, $D(0;2)$ è circoscrivibile a una circonferenza

Soluzione. Ricordiamo che un quadrilatero è circoscrivibile ad una crf, se la somma dei lati opposti è uguale, cioè se $AB+CD=BC+AD$; pertanto

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-2+2)^2+(1+4)^2} = 5 \\ BC &= \sqrt{(-2-1)^2+(-4+0)^2} = 5 \\ CD &= \sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5} \\ AD &= \sqrt{(-2+0)^2+(1-2)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

il quadrilatero sarà circoscrivibile.

Esercizio 8. Dato il triangolo ABC di vertici $A\left(\sqrt{3};1\right)$, $B\left(\sqrt{3};5\right)$, $C\left(3\sqrt{3};3\right)$, verificare che è equilatero. Determinare il perimetro, l'area del triangolo, il centro e il raggio della circonferenza inscritta e di quella circoscritta allo stesso triangolo.

Soluzione. Un triangolo è equilatero, se le lunghezze di tutti i lati sono uguali;

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+(1-5)^2} = 4 \\ BC &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2+(5-3)^2} = 4 \\ AC &= \sqrt{\left(\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2+(1-3)^2} = 4 \end{aligned}$$

il triangolo è quindi equilatero. Il perimetro e l'area valgono

$$\begin{aligned} 2p &= 4\cdot 3 = 12 \\ A &= \frac{4\cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

(sapendo che l'altezza di un triangolo equilatero è sempre $h=\frac{l}{2}\sqrt{3}$). Il centro della circonferenza inscritta, intersezione delle bisettrici, e circoscritta, intersezione degli assi, coincidono, e coincidono anche con il baricentro, centro delle mediane, pertanto:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{3} \\ C_y &= \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{9}{3} = 3 \end{aligned}$$

Il raggio della circonferenza circoscritta è pari ai due terzi dell'altezza, cioè

$$R = 2\sqrt{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

il raggio della crf inscritta è un terzo dell'altezza, cioè

$$r = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Esercizio 9. Dati i punti $A(1;2)$ e $B(-2;0)$, determinare il punto P dell'asse x equidistante dai due punti dati.

Soluzione. Se il punto P è equidistante, allora

$$AP = PB$$

Traduciamo tale relazione nel linguaggio del piano cartesiano

$$\sqrt{(1-x_P)^2 + (2-y_P)^2} = \sqrt{(-2-x_P)^2 + (0-y_P)^2}$$

questa relazione presenta due incognite, che però si possono ricondurre ad una, osservando che il punto cercato appartiene all'asse x e che quindi la sua ordinata è nulla.

$$(1-x_P)^2 + 4 = (-2-x_P)^2$$

svolgendo, si ottiene

$$x_P^2 - 2x_P + 1 = 4 + x_P^2 + 4x_P$$

da cui

$$x_P = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Il punto cercato sarà $P\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Esercizio 10. I punti $A(2;-2)$ e $C(-4;2)$ sono gli estremi della diagonale di un quadrato. Determinare gli altri due vertici B e D.

Soluzione. In un quadrato, le diagonali sono uguali, perpendicolari e si dividono vicendevolmente a metà. Determiniamo il punto medio, M, della diagonale.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{2-4}{2} = -1 \\ y_M &= \frac{-2+2}{2} = 0 \end{aligned}$$

La lunghezza della diagonale AC è

$$AC = \sqrt{(2+4)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

Il lato del quadrato sarà pertanto, dalla $l = d/\sqrt{2}$

$$AB = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2}} = \sqrt{26}$$

Posso costruire così due relazioni

$$\begin{cases} (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 = 13 \\ (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 26 \end{cases}$$

sostituendo i valori noti delle coordinate, si ha

$$\begin{cases} (x_B + 1)^2 + (y_B)^2 = 13 \\ (2 - x_B)^2 + (-2 - y_B)^2 = 26 \end{cases}$$

svolgendo le operazioni, si ottiene

$$\begin{cases} x_B^2 + 1 + 2x_B + y_B^2 = 13 \\ 4 + x_B^2 - 4x_B + 4 + y_B^2 + 4y_B = 26 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = 12 - 2x_B \\ x_B^2 + y_B^2 = 18 + 4x_B - 4y_B \end{cases}$$

da cui, sottraendo membro a membro

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 = 12 - 2x_B \\ 0 = 6 + 6x_B - 4y_B \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_B^2 + y_B^2 & = & 12 - 2x_B \\ y_B & = & \frac{3+3x_B}{2} \end{cases}$$

sostituendo e calcolando

$$\begin{cases} x_B^2 + \frac{(3+3x_B)^2}{4} & = & 12 - 2x_B \\ --- \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_B^2 + 9 + 9x_B^2 + 18x_B & = & 48 - 8x_B \\ --- \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^2 + 2x_B - 3 & = & 0 \\ --- \end{cases} \quad \begin{cases} x_B & = & -3 \\ y_B & = & -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_D & = & 1 \\ y_D & = & 3 \end{cases}$$

Esercizio 11. Determinare i punti dell'asse x aventi distanza uguale a $2\sqrt{2}$ dal punto $A\,(2;-2)$

Soluzione. I punti che appartengono all'asse x sono caratterizzati dall'avere il valore dell'ordinata nulla, cioè $y = 0$; si potranno pertanto indicare come $P\,(x;0)$, cioè mediante una sola incognita. Scriviamo ora la relazione che rappresenta l'equidistanza dal punto A:

$$\sqrt{(2-x)^2 + 4} = 2\sqrt{2}$$

cioè, elevando al quadrato e svolgendo

$$4 + x^2 - 4x + 4 = 8$$

sommando i coefficienti numerici e raccogliendo a fattor comune, si ottiene

$$x\,(x-4) = 0$$

I punti saranno pertanto

$$P_1\,(0;0) \quad ; \quad P_2\,(4;0)$$

Esercizio 12. Determinare le coordinate dei punti aventi ascissa tripla dell'ordinata e aventi distanza uguale a $\sqrt{13}$ dal punto $A\,(-2;-3)$

Soluzione. Le coordinate dei punti si possono indicare, assegnando ad x il valore della loro ordinata, come

$$P\,(3x;x)$$

Calcoliamo ora la distanza PA, ottenendo l'equazione le cui soluzioni daranno i punti cercati

$$\sqrt{(3x+2)^2 + (x+3)^2} = \sqrt{13}$$

elevando al quadrato e svolgendo i prodotti notevoli, si ottiene

$$9x^2 + 12x + 4 + x^2 + 6x + 9 = 13$$

sommando i termini simili

$$10x^2 + 18x = 0 \qquad 2x\,(5x+9) = 0$$

Le coordinate dei punti saranno

$$P_1\,(0;0) \quad ; \quad P_2\left(-\frac{27}{5};-\frac{9}{5}\right)$$

Esercizio 13. Dati i punti $A\,(-4;4)$ e $B\,(6;1)$, determinare il punto P del segmento AB tale che:

$$\overline{PA} = 3\overline{PB}$$

Soluzione. Dai dati segue che $PA = \frac{3}{4}AB$. Possiamo applicare il teorema di Talete da cui deriva che $(PA)_x = 3\,(PB)_x$ e la stessa relazione vale per le ordinate. Ciò implica che il punto P avrà un'ascissa data da

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{4}x_A + \frac{3}{4}x_B = \frac{7}{2} \\ P_y &= \frac{1}{4}y_A + \frac{3}{4}y_B = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 14. Determinare il punto P comune all'asse del segmento AB, di estremi $A(4;0)$ e $B(0;-6)$, e all'asse del segmento CD, di estremi $C(-3;0)$ e $D(0;-4)$

Soluzione. Il punto $P(x;y)$ rappresenta l'intersezione tra i due assi e dovendo essere equidistante da entrambi, dovrà soddisfare le condizioni

$$PA = PB \qquad PC = PD$$

Da cui

$$\begin{cases} (x-4)^2 + y^2 &= x^2 + (y+6)^2 \\ (x+3)^2 + y^2 &= x^2 + (y+4)^2 \end{cases}$$

Svolgendo i prodotti notevoli

$$\begin{cases} x^2 + 16 - 8y + y^2 &= x^2 + y^2 + 12y + 36 \\ x^2 + 9 + 6x + y^2 &= x^2 + y^2 + 8y + 16 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} 8x + 12y &= -20 \\ 6x - 8y &= 7 \end{cases} \qquad \begin{cases} 24x + 36y &= -60 \\ -24x + 32y &= -28 \end{cases}$$

sommando membro a membro, si ha

$$\begin{cases} 68y &= -88 \\ 6x - 8y &= 7 \end{cases} \quad P \begin{cases} y &= -\frac{22}{17} \\ x &= -\frac{19}{34} \end{cases}$$

Esercizio 15. Dati i punti $A(-2;1)$ e $B(3;2)$, determinare i punti $C\left(h; -\frac{5}{4}h + \frac{10}{3}\right)$ per i quali risulti:

$$\overline{CA}^2 + 2\overline{CB}^2 = 31$$

Soluzione. Per risolvere, basta impostare l'equazione indicata, utilizzando la formula della distanza

$$(h+2)^2 + \left(-\frac{5}{4}h + \frac{10}{3} - 1\right)^2 + 2\left[(h-3)^2 + \left(-\frac{5}{4}h + \frac{10}{3} - 2\right)^2\right] = 31$$

svolgendo

$$h^2 + 4h + 4 + \frac{25}{16}h^2 - \frac{35}{6}h + \frac{49}{9} + 2\left(h^2 - 6h + 9 + \frac{25}{16}h^2 - \frac{10}{3}h + \frac{16}{9}\right) = 31$$

$$\frac{123}{16}h^2 - \frac{41}{2}h = 0$$

Raccogliendo

$$\frac{41}{2}h\left(\frac{3}{8}h - 1\right) = 0$$

Le soluzioni saranno

$$h = 0 \qquad h = \frac{8}{3}$$

$$C_1\left(0; \frac{10}{3}\right) \qquad C_2\left(\frac{8}{3}; 0\right)$$

Esercizio 16. Nel piano xOy sono dati i punti $A(-1;2)$, $B(-7;9)$, $C(-5;0)$. Dopo aver verificato che il triangolo ABC è isoscele, determinare

(1) il baricentro G e il circocentro F del triangolo
(2) il quarto vertice D del rombo $ABCD$
(3) il raggio R della circonferenza inscritta in $ABCD$

Soluzione. Caso (1): Verifichiamo innanzitutto che il triangolo è isoscele, calcolando le lunghezze dei lati obliqui

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-7+1)^2 + (9-2)^2} = \sqrt{85} \\ BC &= \sqrt{(-7+5)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{85} \\ AC &= \sqrt{(-5+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

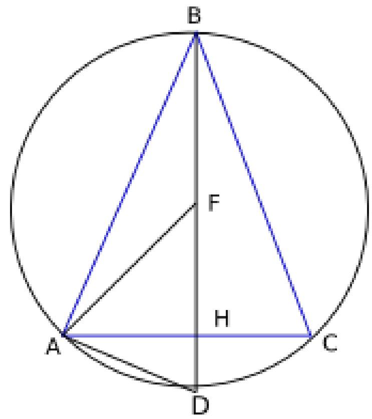
Calcoliamo il baricentro le cui coordinate sono date dalla media aritmetica delle coordinate dei tre vertici

$$G_x = \frac{-1-7-5}{3} = -\frac{13}{3}$$
$$G_y = \frac{2+9+0}{3} = \frac{11}{3}$$

Per calcolare le coordinate del circocentro, applichiamo il primo th. di Euclide (ogni cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'intera ipotenusa). Nel nostro caso l'ipotenusa è il diametro della crf circoscritta, (vedasi figura). L'altezza del triangolo è calcolabile col th. di Pitagora oppure determinando la distanza dal vertice B al punto medio di AC; scegliamo la prima strada

$$BH = \sqrt{85 - \frac{20}{4}} = \sqrt{80}$$

:



si ha $BH : AB = AB : BD$, da cui

$$BD = \frac{AB^2}{BH} = \frac{85}{\sqrt{80}} = \frac{17\sqrt{5}}{4}$$

Il raggio misura quindi $r = \frac{17\sqrt{5}}{8}$. Il circocentro sarà equidistante dai tre vertici, essendo l'intersezione dei tre assi dei lati, per cui

$$FA^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{1445}{64}$$
$$FC^2 = (x+5)^2 + y^2 = \frac{1445}{64}$$

Mettiamo a sistema e risolviamo

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{1445}{64} \\ (x+5)^2 + y^2 = \frac{1445}{64} \end{cases}$$

Svolgendo e sottraendo membro a membro, si ha

$$\begin{cases} y = -2x-5 \\ x^2 + 10x + 25 + (-2x-5)^2 = \frac{1445}{64} \end{cases}$$

risolvendo rispetto a x, si ottiene

$$64x^2 + 384x + 351 = 0$$

che ammette le due soluzioni

$$x_1 = -\frac{9}{8} \quad y_1 = -\frac{11}{4}$$
$$x_2 = -\frac{39}{8} \quad y_1 = \frac{19}{4}$$

le due soluzioni indicano i due punti sull'asse di AC simmetrici rispetto al segmento; sceglieremo, vista la posizione del nostro triangolo, il punto con ordinata positiva; pertanto

$$G\left(-\frac{39}{8}; \frac{19}{4}\right)$$

Caso 2: Il quarto vertice D è simmetrico di B rispetto al lato AC. Troviamo il punto medio di AC

$$H\left(\frac{-1-5}{2}; \frac{2+0}{2}\right) = (-3; 1)$$

Applichiamo quindi la relazione inversa del punto medio

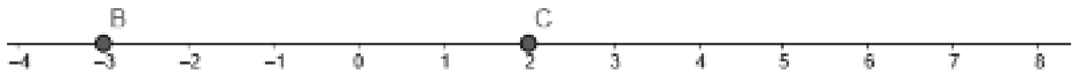
$$x_D = 2x_H - x_B = -6 + 7 = 1$$
$$y_D = 2y_H - y_B = 2 - 9 = -7$$

Caso 3: Il centro della crf inscritta è il punto di intersezione delle diagonali, H, e il raggio è l'altezza di uno dei quattro triangoli rettangoli che formano il rombo; applichiamo la formula inversa dell'area, $h = \frac{2A}{b}$. L'area di un tale triangolo è $\frac{AH \cdot BH}{2} = \frac{\frac{\sqrt{20}}{2} \cdot \sqrt{80}}{2} = 10$

$$R = \frac{2A_{ABH}}{AB} = \frac{20}{\sqrt{85}} = \frac{4}{17}\sqrt{85}$$

Esercizio 17. Determinare l'ascissa di un punto A, simmetrico di $B\,(-3)$ rispetto al punto $C\,(2)$.

:



Soluzione. La definizione di simmetria rispetto a un punto implica che $BC = CA$. Traducendo in linguaggio matematico

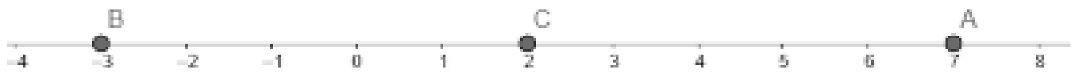
$$|x_B - x_C| = |x_C - x_A|$$

cioè

$$|-3 - 2| = |2 - x_A|$$

da cui

$$5 = x_A - 2$$
$$x_A = 7$$



Esercizio 18. Dati i punti $A(2)$, $B(-1)$, $C(3)$, trovare il punto D che soddisfa la relazione $AD - DB = BC$.

Sia x_D l'ascissa del punto D, avremo

$$(x_D - x_A) - (x_B - x_D) = x_C - x_B$$
$$2x_D - x_A \cancel{- x_B} = x_C \cancel{- x_B}$$
$$2x_D = x_A + x_C$$

Sostituendo i valori delle ascisse dati

$$x_D = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}$$

Esercizio 19. Dati i punti $A(3;-2)$, $B(1;0)$, $C(0;-1)$, trovare il punto D tale che sia verificata la relazione $AD = BD = CD$.

Soluzione. Siano $D(x,y)$ le coordinate del punto D. Applicando la formula che determina la distanza tra due punti si ha

$$|AD| = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2}$$
$$|BD| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$$
$$|CD| = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

pertanto, deve valere contemporaneamente (bastano le due relazioni ricordando la proprietà transitiva dell'uguaglianza)

$$\begin{cases} (AD)^2 = (BD)^2 \\ (BD)^2 = (CD)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} + 4y + 4 = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} \\ \cancel{x^2} - 2x \cancel{+1} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y \cancel{+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (AD)^2 = (BD)^2 \\ (AD)^2 = (CD)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 4y = 12 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

da cui sostituendo la prima equazione con la somma delle due, si ha

$$\begin{cases} 2x = 3 \\ x = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

CAPITOLO 2

La Retta

Per la parte teorica, rimando ai diversi e numerosi libri di testo. Ricordo solo che, ogni retta del piano è rappresentata algebricamente da un'equazione lineare e ogni equazione lineare è rappresentata graficamente da una retta.

L'equazione può essere scritta nella forma esplicita

$$y = mx + q$$

dove m è il coefficiente angolare, la «pendenza» costante, e q è l'ordinata dell'intersezione della retta con l'asse delle ordinate; il punto, quindi, in cui una retta interseca l'asse y ha coordinate $(0; q)$

L'equazione può essere scritta anche nella forma implicita

$$ax + by + c = 0$$

dove $-\frac{a}{b} = m$ e $-\frac{c}{b} = q$.

Le soluzioni di una tale equazione lineare sono le infinite coppie di numeri reali $(x; y)$ che verificano l'uguaglianza. Tali valori sono le coordinate dei punti, che distribuiti nel piano cartesiano, descrivono appunto una linea retta.

2.1. Retta per due punti

Esercizio 20. Scrivi l'equazione della retta passante per

- $A(-1; 2)$ e $B(1; 4)$
- $C\left(-\frac{2}{5}; 1\right)$ e $D\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$
- $E\left(-\sqrt{2}; 1\right)$ e $F\left(2\sqrt{2}; \frac{3}{5}\right)$

Soluzione. La formula che si può utilizzare esprime la costanza del coefficiente angolare tra due punti qualsiasi di una retta

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Applicandola nei tre casi, si ha

- $\frac{4-2}{1+1} = \frac{y-2}{x+1}$, svolgendo si ottiene

$$y = x + 3 \quad o \quad x - y + 3 = 0$$

- $\frac{1-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{5}+\frac{3}{4}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{x+\frac{3}{4}}$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{4}\right) = -\frac{7}{20}\left(y + \frac{1}{2}\right) \qquad \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} + \frac{7}{20}y + \frac{7}{40} = 0$$

$$10x + 7y + 11 = 0 \qquad y = -\frac{10}{7}x - \frac{11}{10}$$

- $\frac{1-\frac{3}{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = \frac{y-\frac{3}{5}}{x-\sqrt{2}}$

$$\frac{2}{5}\left(x - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2}\left(y - \frac{3}{5}\right) \qquad 2x - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}y - 3\sqrt{2}$$

$$2x - 5\sqrt{2}y + 2\sqrt{2} = 0 \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{5}{2}$$

Esercizio 21. Determinare il coefficiente angolare della retta passante per i due punti assegnati

- $A(2; -1)$ e $B(-7; 4)$
- $C(1; 4)$ e $D\left(-\sqrt{2}; 4\right)$
- $E\left(\sqrt{3}; -\sqrt{5}\right)$ e $F\left(1 + \sqrt{3}; 2\sqrt{5}\right)$

Soluzione. Il coefficiente angolare descrive la cosiddetta «pendenza» della retta, cioè il rapporto tra lo spostamento in verticale e quello in orizzontale tra due punti comunque scelti;

- $m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1-4}{2+7} = -\frac{5}{9}$
- $m_{CD} = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{4-4}{1+\sqrt{2}} = 0$
- $m_{EF} = \frac{y_E - y_F}{x_E - x_F} = \frac{-\sqrt{5}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}} = 3\sqrt{5}$

Esercizio 22. Determinare il coefficiente angolare m della retta r passante per l'origine e tale che il suo punto di ascissa $x = -3$, disti dall'asse delle x di un segmento di lunghezza 12.

Soluzione. Se la retta passa per l'origine avrà $q = 0$ e quindi la sua equazione sarà del tipo $y = mx$. Pertanto, in questo caso, $m = \frac{y}{x}$, cioè il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di un punto qualsiasi, diverso dall'origine, appartenente alla retta. Vediamo ora di utilizzare la seconda informazione. Se il punto appartenente alla retta e avente ascissa $x_P = -3$ dista dall'asse y, 12 unità, vuol dire che tale numero in valore assoluto, rappresenta l'ordinata di tale punto (che è appunto la distanza del punto dall'asse orizzontale). Per cui $y_P = \pm 12$. sostituendo tali valori, nella relazione che determina m, si ha

$$m = \frac{y}{x} = \frac{\pm 12}{-3} = \pm 4$$

Esercizio 23. Dati i tre punti $A(a, b), B(-1, b+1), C(b; a)$ verificare se sono allineati (appartengono cioè alla stessa retta). In caso positivo, scrivere l'equazione della retta, in caso contrario calcolare l'area del triangolo da essi formato.

Soluzione. Risolviamo usando i determinanti delle matrici che descrivono le equazioni delle rette passanti per due punti. I tre punti sono allineati se il determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ -1 & b+1 & 1 \\ b & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calcoliamo

$$\Delta = a\begin{vmatrix} b+1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & b+1 \\ b & a \end{vmatrix} =$$
$$= a(b+1-a) - b(-1-b) + \left(-a - b^2 - b\right) = a(b-a)$$

Il determinante è uguale a zero se $b = a$ oppure per $a = 0$.

Se $a = 0$ la retta è ottenibile risolvendo l'equazione, considerando i punti A, C

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & b & 1 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui $bx + by - b^2 = 0$, ossia $x + y - b = 0$.

Se $a = b$, analogamente con i punti A, B

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & a & 1 \\ -1 & a+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui $x(a - a + 1) - y(a+1) + 1\left(a^2 + a + a\right) = 0$, da cui $x - (a+1)y + a^2 + 2a = 0$.

Nel caso in cui $a \neq 0$, $a \neq b$, l'area del triangolo è ottenuto da

$$A = \frac{|\Delta|}{2} = \frac{1}{2}\left|ab - a^2\right|$$

:

Esercizio 24. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P(3, -1)$ ed inclinata di $\beta = \frac{\pi}{6}$ rispetto al semiasse positivo delle ascisse.

Soluzione. Il coefficiente angolare della retta è legato all'angolo formato con il semiasse positivo delle ascisse dalla relazione $m = \tan\beta$. In questo caso $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ per cui l'equazione della retta $(y - y_p = m(x - x_p))$ sarà

$$y + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3) \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \left(\sqrt{3} + 1\right)$$

Esercizio 25. Determinare il valore del parametro k in modo che la retta $kx + (k-1)\,y + 2 = 0$ passi per il punto $P\,(2,-5)$.

Soluzione. Un punto appartiene ad una curva se le sue coordinate soddisfano l'equazione che descrive questa curva. Pertanto, basta sostituire nell'equazione della retta data le coordinate del punto.

$$2k - 5\,(k-1) + 2 = 0$$

risolvendo rispetto a k si ha

$$2k - 5k + 5 + 2 = 0 \qquad k = \frac{7}{3}$$

:

Esercizio 26. Determinare il valore del parametro k in modo tale che risultino allineati i tre punti $A\,(1,1)\,, B\,(k-1,2)\,, C\,(2,-1)$.

Soluzione. Verifichiamolo sempre tramite il calcolo del determinante delle coordinate dei tre punti

$$\Delta = \begin{vmatrix} k & b & 1 \\ k-1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

da cui

$$3k - (k-3) + 1 - k - 4$$

da cui si ottiene $k = 0$.

:

2.2. Rette Parallele e perpendicolari

Ricordiamo che due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente, cioè hanno la stessa orientazione nel piano; due rette sono perpendicolari se il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1; cioè, se $m_1 = -\frac{1}{m_2}$.

Esercizio 27. Verificare, senza disegnarle, se le seguenti coppie di rette sono parallele

(1) $2x - 3y + 1 = 0$ e $4x - 6y + 5 = 0$
(2) $5x - y = 0$ e $3x - 5y = 0$
(3) $\sqrt{2}x = 4$ e $x = 1$
(4) $y = 3x - 2$ e $6x - 2y + 1 = 0$

Soluzione. le equazione delle rette sono scritte sia nella forma esplicita che implicita. Ricordiamo che, nella forma esplicita, il coefficiente angolare è il coefficiente della variabile x, mentre nella forma implicita, è il rapporto, cambiato di segno, tra il coefficiente della variabile x e della y.

(1) la prima retta ha coefficiente angolare $m = \frac{3}{2}$; la seconda retta ha $m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$; le rette sono pertanto parallele.
(2) la prima retta ha $m = \frac{5}{1} = 5$; la seconda $m = \frac{3}{5}$; non sono parallele
(3) la prima retta è parallela all'asse y(il suo coefficiente angolare non è infatti definito); lo stesso vale per la seconda retta; risultano quindi parallele.
(4) la prima retta ha $m = 3$; la seconda $m = \frac{6}{2} = 3$; le rette sono parallele.

2.3. Retta per un punto

Esercizio 28. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto P e parallela alla retta data r.

(1) $P\,(1;2)$; $r:\ x - 4y + 5 = 0$
(2) $P\,(-1;-4)$; $r:\ x = y$
(3) $P\left(\sqrt{2};1\right)$; $r:\ \sqrt{2}x - 3y = 0$

Soluzione. l'equazione della retta è una equazione lineare in due variabili del tipo $y = mx + q$. Le rette di distinguono tra loro per i diversi valori dei coefficienti. Nel caso della retta i coefficienti da trovare sono due; sono necessarie pertanto due informazioni. Conoscendo le coordinate di un punto, individuiamo il fascio delle infinite rette che passano per tale punto; conoscendo il coefficiente angolare, la loro inclinazione, possiamo selezionare la rette voluta. Due sono le possibili modalità risolutive: utilizzare la formula della retta passante per un punto, sapendo che la retta cercata avrà lo stesso coefficiente angolare della retta assegnata (parallela)

$$y - y_P = m\,(x - x_p)$$

(1) da cui

$$y-2=\frac{1}{4}(x-1) \qquad y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$$
$$x-4y+7 = 0$$

In alternativa, svolgendo l'equazione prima scritta, si ha

$$y=mx-mx_P+y_P$$

da cui si ricava che, confrontandola con l'equazione generale

$$q=y_p-mx_p$$

e nel caso in questione

$$q=2-\frac{1}{4}(1)=\frac{7}{4}$$

da cui si ricava la stessa equazione della retta.

(2) usiamo l'equazione del fascio di rette

$$\begin{aligned} y+4 &= 1(x+1) \\ y &= x-3 \end{aligned}$$

(3) usiamo l'altra procedura

$$\begin{aligned} q &= -1-\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{2}=-\frac{5}{3} \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{3}x-\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 29. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto di intersezione delle rette $3x-y+1=0$ e $x+2y-8=0$ e perpendicolare alla retta $2x+y-10=0$.

Soluzione. Per trovare la retta richiesta, ci vengono assegnate due informazioni: un punto di appartenenza e la perpendicolarità ad una retta assegnata. Primo, il punto, intersezione di altre due rette, va calcolato attraverso il sistema tra le due rette assegnate. [il significato geometrico di un sistema lineare è appunto l'individuazione della intersezione tra due rette non parallele].

$$\begin{cases} 3x-y+1 = 0 \\ x+2y+8 = 0 \end{cases}$$

risolviamo con il metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 3x+1 = y \\ x+6x+2+8 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y = -\frac{23}{7} \\ x = -\frac{10}{7} \end{cases}$$

Secondo, la relazione di perpendicolarità implica la relazione tra i coefficienti angolari delle rette $m_1m_2=-1$, per cui, essendo il coefficiente angolare della retta asse assegnata, $2x+y-10=0$, $m=-2$, la retta perpendicolare avrà $m_{perp}=\frac{1}{2}$; la retta cercata passerà, quindi, per il punto $P\left(-\frac{10}{7};-\frac{23}{7}\right)$ e avrà coefficiente angolare $m=\frac{1}{2}$:

$$y+\frac{23}{7}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{10}{7}\right)$$

risolvendo rispetto a y,

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{18}{7}$$

Esercizio 30. Verificare, se le seguenti coppie di rette sono perpendicolari tra loro

(1) $x+2y-5=0$ e $2x-y-7=0$
(2) $3x-4y+7=0$ e $8x+6y+1=0$
(3) $x=-2$ e $3y+1=0$

Soluzione. calcoliamo i coefficienti angolari e verifichiamo la relazione di perpendicolarità:

(1) $m_1=-\frac{1}{2}$; $m_2=2$; pertanto $m_1m_2=-1$: le rette sono perpendicolari
(2) $m_1=\frac{3}{4}$; $m_2=-\frac{4}{3}$; pertanto $m_1m_2=-1$: le rette sono perpendicolari

(3) in questo caso, la procedura algebrica non è percorribile; possiamo però osservare che $X = -2$ è una retta parallela all'asse y e $3y + 1 = 0$ è parallela all'asse x; ne segue che le rette sono ancora perpendicolari.

Esercizio 31. Scrivi l'equazione della retta passante per il punto P e perpendicolare alla retta r

(1) $P(1;5)$ e $r:\ x - 4y = 0$
(2) $P(-7;2)$ e $r:\ x = 3$
(3) $P(4;6)$ e $r:\ y = 2x$
(4) $P(-1;-3)$ e $r:\ \sqrt{2}x + y + 1 = 0$

Soluzione. utilizziamo, come nel caso della retta passante per P e parallela alla retta data, la formula $y - y_P = m\,(x - x_P)$

(1) il coefficiente della retta $m_r = \frac{1}{4}$; la retta perpendicolare avrà $m = -4$, da cui

$$\begin{aligned} y - 5 &= -4\,(x - 1) \\ y &= -4x + 9 \end{aligned}$$

(2) il coefficiente della retta non è definito (retta parallela all'asse y); la perpendicolare sarà quindi parallela all'asse x con $m = 0$

$$y = 2$$

(3) $m_r = 2$; la perpendicolare avrà $m = -\frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned} y - 6 &= -\frac{1}{2}\,(x - 4) \\ y &= -\frac{1}{2}x + 8 \end{aligned}$$

(4) $m_r = -\sqrt{2}$; $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} y + 3 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,(x + 1) \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \end{aligned}$$

2.4. Distanza di un punto da una retta

Esercizio 32. Calcola la distanza del punto P dalla retta r assegnata

(1) $P\left(\frac{3}{5};-4\right)$ e $r:\ 5x + 3y + 9 = 0$
(2) $P\left(-\frac{1}{\sqrt{7}};0\right)$ e $r:\ y = \sqrt{7}x - 2$
(3) $P\,(-1;7)$ e $r:\ x - 4 = 0$

Soluzione. Il calcola della distanza di un punto da una retta, si effettua ricordando la formula che riassume l'individuazione del segmento appartenente alla perpendicolare alla retta data e passante per P, dove gli estremi del segmento sono P e il piede di tale perpendicolare.La formula è

$$d = \frac{\|ax_P + by_P + c\|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

dove, come si vede, a, b, c sono i coefficienti della retta espressa in forma implicita.

(1) la retta è già nella forma implicita, per cui

$$d = \frac{\|5 \cdot \frac{3}{5} + 3\,(-4) + 9\|}{\sqrt{5^2 + 3^2}} = 0$$

(2) calcoliamo dopo aver riscritto la retta nella forma implicita: $\sqrt{7}x - y - 2 = 0$

$$d = \frac{\|\sqrt{7}\left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right) - 1 \cdot 0 + -2\|}{\sqrt{\sqrt{7}^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

(3) in questo caso nell'equazione della retta si ha $b = 0$

$$d = \frac{\| -1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 + -4\|}{\sqrt{1^2}} = 5$$

ESERCIZIO 33. Trovare la distanza tra le due rette parallele $3x - y + 1 = 0$ e $6x - 2y + 3 = 0$

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo prima una formula semplificata per la distanza costante che separa due rette parallele. Se due rette sono parallele, il loro coefficiente angolare è uguale, di conseguenza, i coefficienti della due variabili, x, y staranno nello stesso rapporto; ciò consente di considerare le due rette nella forma: $ax + by + c_1 = 0$ e $ax + by + c_2 = 0$. Consideriamo un punto della prima retta, esso avrà coordinate $P\left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c_1}{b}\right)$. Applichiamo ora la formula della distanza del punto dalla seconda retta:

$$d = \frac{\|ax + b\left(-\frac{a}{b}x - \frac{c_1}{b}\right) + c_2\|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\|ax + ax - c_1 + c_2\|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\|c_2 - c_1\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

□

SOLUZIONE. Prima di applicare la formula appena ricavata, rendiamo uguali i coefficienti delle variabili nelle due rette, dividendo per 2 la seconda equazione, ottenendo così $3x - y + \frac{3}{2} = 0$

$$d = \frac{\|\frac{3}{2} - 1\|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{20}$$

2.5. Problemi di riepilogo

ESERCIZIO 34. Calcolare l'area del triangolo ABC, dati i vertici: $A(2;2)$, $B(6;-1)$, $C(-4;3)$

SOLUZIONE. Calcoliamo la lunghezza della base BC con la formula della distanza tra i due punti:

$$BC = \sqrt{(6+4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

Per trovare l'altezza relativa, AH, calcoliamo la distanza di A dalla retta BC; iniziamo col trovare la retta BC

$$\begin{array}{cc} \dfrac{y+1}{3+1} = \dfrac{x-6}{-4-6} & \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{x-6}{-10} \\ 4x - 24 = -10y - 10 & 4x + 10y - 14 = 0 \end{array}$$

la distanza è

$$AH = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 10 - 14|}{\sqrt{4^2 + 10^2}} = \frac{14}{2\sqrt{29}} = \frac{7}{\sqrt{29}}$$

L'area sarà

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{29} \cdot \frac{7}{\sqrt{29}} = 7$$

ESERCIZIO 35. Determinare l'area del triangolo di cui sono date le equazioni dei lati: $x + 2y - 3 = 0$, $3x + y - 2 = 0$, $y = x$

SOLUZIONE. I vertici del triangolo rappresentano le intersezioni delle rette che contengono i lati. Troviamo tali punti mettendo a sistema le coppie di equazioni:

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 9 - 6y + y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 - 2y \\ y = \frac{7}{5} \end{cases} \qquad A \begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ y = \frac{7}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = x \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 3 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \qquad B(1;1)$$

$$\begin{cases} y = x \\ 3x + y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x \\ 4x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Possiamo trovare l'area calcolando la base BC

$$BC = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

troviamo ora la distanza di A dalla retta che contiene BC, cioè $y - x = 0$

$$AH = \frac{\left\| \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{7}{5} \cdot (-1) + 0 \right\|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}}$$

L'area sarà

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{10}$$

Esercizio 36. Determinare i punti dell'asse x che hanno distanza $2\sqrt{53}$ dalla retta $7x + 2y - 1 = 0$.

Soluzione. Ogni punto, come noto, è determinato da una coppia di numeri reali, che rappresentano le sue coordinate. Trovare un punto, quindi, vuol dire conoscere i due valori incogniti. In questo caso, siccome i punti appartengono all'asse x, avranno coordinate del tipo $(x; 0)$; ciò rende evidente come tale informazione consenta di determinare un solo valore incognito. Conoscendo, altresì, la distanza di tali punti da una retta, applicheremo la formula che consente di ottenere questa distanza; nel nostro caso, l'incognita sarà l'ascissa dei punti cercati.

$$2\sqrt{53} = \frac{|7x_p + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{7^2 + 2^2}}$$

da cui, svolgendo, si ha

$$|7x_p - 1| = 106$$

risolvendo l'equazione in valore assoluto, otterremo

$$\begin{aligned} 7x - 1 = 106 &\qquad per\, x \geq \frac{1}{7} \\ 7x - 1 = -106 &\qquad per\, x < \frac{1}{7} \end{aligned}$$

le soluzioni saranno

$$\begin{aligned} x &= \frac{107}{7} \\ x &= -15 \end{aligned}$$

I punti saranno $P_1\left(\frac{107}{7}; 0\right)$ e $P_2(-15; 0)$

Esercizio 37. Determinare i punti appartenenti alla retta $5x + y + 4 = 0$ che hanno distanza $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$ dalla retta $x + y - 3 = 0$

Soluzione. Informazione: i punti appartengono alla retta assegnata; ne segue che le coordinate di questi punti verificano l'equazione di tale retta e avranno pertanto quali coordinate $P(x; -5x - 4)$, in quanto y è la variabile dipendente da x e la si può ottenere appunto in funzione di tale variabile. Anche in questo modo, le incognite si riducono ad una sola. Calcoliamo la distanza dalla retta $x + y - 3 = 0$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{|1x_p + 1 \cdot (-5x_P - 4) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

svolgendo

$$3 = |x - 5x - 4 - 3|$$

da cui

$$\begin{aligned} -4x - 7 = 3 &\qquad per\, x \leq -\frac{7}{4} \\ 4x + 7 = 3 &\qquad per\, x > -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

le soluzioni saranno

$$\begin{aligned} x &= -\frac{5}{2} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

i punti saranno, sostituendo in $y = -5x - 4$, $P_1\left(-\frac{5}{2}; \frac{17}{2}\right)$ e $P_2(-1; 1)$

ESERCIZIO 38. Trovare la distanza d tra le due rette parallele r ed s di equazioni $r\,:\,y=\frac{1}{2}x-2$ e $s\,:\,3x-6y+4=0$.

SOLUZIONE. le rette sono parallele, avendo lo stesso coefficiente angolare, e quindi tutti i punti corrispondenti stanno alla stessa distanza. I punti della prima retta hanno coordinate $P\left(x,\frac{1}{2}x-2\right)$; calcoliamo la loro distanza dalla retta s:

$$d=\frac{\left|3x_p-6\cdot\left(\frac{1}{2}x_P-2\right)+4\right|}{\sqrt{3^3+6^2}}$$

da cui

$$d=\frac{|3x-3x+12+4|}{3\sqrt{5}}=\frac{16}{3\sqrt{5}}$$

Si può generalizzare tale risultato

$$d=\frac{|q_2-q_1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

ESERCIZIO 39. Determinare i punti $P(2;t)$ equidistanti dalle rette $r\,:\,3x+4y-2=0$ e $s\,:\,4x+3y+1=0$.

SOLUZIONE. Basta calcolare le distanze di tali punti dalle due rette e eguagliarle

$$\begin{aligned} d_r &= \frac{|6+4t-2|}{\sqrt{9+16}} \\ d_s &= \frac{|8+3t+1|}{\sqrt{16+9}} \end{aligned}$$

poiché deve essere $d_r=d_s$,

$$|4t+4|=|3t+9|$$

che si traduce in

$$\begin{array}{rl} 4t+4=3t+9 & \quad t=5 \\ 4t+4=-3t-9 & \quad t=-\dfrac{13}{7} \end{array}$$

ESERCIZIO 40. Assegnato il triangolo di vertici $A(1;-1)$, $B(2;-3)$, $C(4;-1)$, determinare il punto di incontro delle altezze (ortocentro).

SOLUZIONE. Poiché le altezze di un triangolo si incontrano sempre in un unico punto, è possibile individuare l'ortocentro tramite solo due altezze, ad esempio AH e BK. Troviamo quindi la retta AH, sapendo che ha il coefficiente antireciproco della retta BC e passa per il punto A. Troviamo prima il valore di m:

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-1+3}{4-2}=1 \\ m_{AH} &= -1 \end{aligned}$$

utilizzando, quindi, l'equazione di una retta per un punto, A in questo caso, si ha

$$\begin{aligned} y+1 &= -1\,(x-1) \\ \textit{retta } AH \quad y &= -x \end{aligned}$$

La stessa cosa per la retta BK; osservando che i punti A, C sono allineati e appartengono ad una retta parallela all'asse delle x, $m_{AC}=0$, l'altezza apparterrà ad una retta parallela all'asse delle y, in particolare $x=2$, cioè l'ascissa del punto B. Troviamo ora l'ortocentro intersecando queste due rette

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 41. Determinare l'equazione della retta r passante per il punto $P(1;2)$ e perpendicolare alla retta s determinata dai punti $A(2;0)$ e $B(3;1)$, e calcolare l'area del triangolo PAB.

SOLUZIONE. Per trovare la retta r, disponiamo delle due informazioni:

(1) passa per il punto $P(1;2)$, cioè le coordinate di questo punto verificano l'equazione della retta cercata
(2) la retta r è perpendicolare alla s, cioè $m_r=-\frac{1}{m_s}$

Troviamo prima il coefficiente angolare di s:

$$\begin{aligned} m_s &= \frac{1-0}{3-2}=1 \\ m_r &= -1 \end{aligned}$$

Utilizziamo ora l'equazione della retta passante per un punto

$$\begin{aligned} y-y_p &= m\,(x-x_P) \\ y-2 &= -1\,(x-1) \\ x+y-3 &= 0 \end{aligned}$$

Per trovare l'area, calcoliamo la lunghezza della base AB

$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(1-0)^2}=\sqrt{2}$$

l'altezza PH sarà la distanza di P dalla retta AB

$$\begin{aligned} retta\ s:\ y-0 &= 1\,(x-2) \\ x-y-2 &= 0 \end{aligned}$$

$$PH=\frac{|1-2-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

L'area sarà

$$A_{PAB}=\frac{1}{2}AB\cdot PH=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$$

Esercizio 42. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $A(1;2)$ e avente coefficiente angolare $m=3$ e determinare l'area del triangolo individuato dalla retta e dagli assi cartesiani.

Soluzione. Basta applicare la formula che consente di ottenere la retta proprio con i dati assegnati; tale formula descrive anche il fascio di retta proprio con sostegno nel punto e coefficiente angolare variabile, cioè

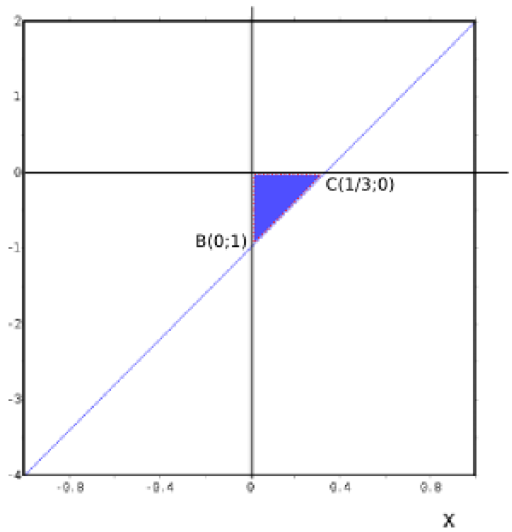
$$y-y_P=m\,(x-x_p)$$

Nel nostro caso

$$\begin{aligned} y-2 &= 3\,(x-1) \\ 3x-y-1 &= 0 \end{aligned}$$

Il triangolo è quello indicato nella figura sotto

:



Le coordinate dei punti B e C sono le intercette della retta con gli assi; ricavandoli per esteso

$$\begin{cases} y = 3x-1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A\left(\frac{1}{3};0\right)$$

$$\begin{cases} y = 3x-1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad B\,(0;-1)$$

L'area del triangolo rettangolo è pertanto il semi prodotto dei due cateti

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Esercizio 43. Scritte le equazioni delle rette r ed $r^{'}$ passanti per $A(0;1)$ e rispettivamente parallela e perpendicolare alla bisettrice del 1° e 3° quadrante, determinare l'area del triangolo limitato dalle due rette e dalla retta $y = 2x - 3$.

Soluzione. La bisettrice del 1° e 3° quadrante ha equazione $y = x$; tale retta ha $m = 1$; la retta, r parallela alla bisettrice, avrà $m_r = 1$ e la retta $r^{'}$, perpendicolare alla bisettrice, avrà $m_{r'} = -1$. Le equazioni si ottengono ancora con l'equazione della retta per un punto

$$\begin{array}{ll} r : y - 1 = 1\,(x - 0) & y = x + 1 \\ r^{'} : y - 1 = -1\,(x - 0) & y = -x + 1 \end{array}$$

Il triangolo ABC è rettangolo perché r e $r^{'}$ sono perpendicolari e l'angolo retto è A. Calcoliamo la lunghezza dei cateti per ottenere l'area, dopo aver determinato le coordinate degli altri due vertici

$$\begin{cases} y = & x + 1 \\ y = & 2x - 3 \end{cases} \quad B \quad \begin{cases} x & = & 4 \\ y & = & 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = & -x + 1 \\ y = & 2x - 3 \end{cases} \quad C \quad \begin{cases} x & = & \frac{4}{3} \\ y & = - & \frac{1}{3} \end{cases}$$

Pertanto i lati saranno

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \\ AC &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{aligned}$$

L'area è

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{4}{3}\sqrt{2} = \frac{16}{3}$$

Esercizio 44. Dopo aver dimostrato che i punti $A(0;0)$, $B(-2;-1)$, $C(-1;-3)$ sono vertici di un triangolo rettangolo isoscele, verificare che l'altezza relativa all'ipotenusa è uguale alla metà dell'ipotenusa stessa.

Soluzione. Per dimostrare che un triangolo è rettangolo, possiamo applicare l'inverso del th. di Pitagora, che afferma: se $ipotenusa^2 = cateto1^2 + cateto2^2$, allora il th. è rettangolo. Calcoliamo pertanto le lunghezze dei lati

$$\begin{array}{lll} AB & = \sqrt{4+1} = & \sqrt{5} \\ AC & = \sqrt{1+9} = & \sqrt{10} \\ BC & = \sqrt{(-2+1)^2 + (-1+3)^2} = & \sqrt{5} \end{array}$$

Il triangolo è isoscele e

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

[si poteva ottenere un risultato, mostrando che due lati sono perpendicolari, attraverso i coefficienti angolari delle rette alle quali appartengono:

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1}{2} \\ m_{BC} &= -2 \end{aligned}$$

Un triangolo rettangolo isoscele è la metà di un quadrato la cui diagonale è l'ipotenusa del triangolo; poiché in un quadrato le diagonali sono uguali e si incontrano nel loro comune punto medio, si dimostra che l'altezza relativa all'ipotenusa (metà diagonale) è uguale alla metà dell'ipotenusa (diagonale intera); verifichiamo numericamente, calcolando il punto medio dell'ipotenusa AC:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{1}{2} \\ M_y &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Allora

$$AM = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

cioè la metà dell'ipotenusa.

Esercizio 45. Determinare le equazioni delle diagonali del quadrato avente tre vertici nei punti $A(0;1)$, $B(2;0)$, $C(3;2)$.

Soluzione. Calcoliamo l'equazione della diagonale AC, tramite la formula della retta passante per due punti, $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

$$AC: \frac{y-1}{2-1}=\frac{x-0}{3-0} \qquad y=\frac{1}{3}x+1$$

Le diagonali del quadrato sono perpendicolari, per cui la retta BD avrà coefficiente angolare antireciproco della retta AC; calcoliamo la retta BD, tramite la formula che esprime l'equazione di una retta passante per un punto, dato il suo coefficiente angolare

$$BD: \quad y-0=-3(x-2) \quad y=-3x+6$$

Esercizio 46. Verificare che i punti $A(1;2)$, $B(-2;1)$, $C(0;-2)$ non sono allineati e che quindi formano un triangolo, di cui si chiede di determinare le equazioni dei lati, le equazioni delle parallele ai lati condotte dai vertici opposti e il perimetro.

Soluzione. tre punti sono allineati se appartengono alla stessa retta, cioè il coefficiente angolare definito dalle coppie di punti deve essere lo stesso.

$$\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{2-1}{1+2}=\frac{1}{3} \\ m_{AC} &= \frac{2+2}{1-0}=4 \\ m_{BC} &= \frac{1+2}{-2-0}=-\frac{3}{2} \end{aligned}$$

i tre punti non sono quindi allineati. Troviamo ora le equazioni delle tre rette contenenti i lati, approfittando del fatto di aver già calcolato i rispettivi valori di m:

$$\begin{aligned} AB:\ y-2=\frac{1}{3}(x-1) &\qquad x-3y+5=0 \\ AC:\ y-2=4(x-1) &\qquad 4x-y-2=0 \\ BC:\ y+2=-\frac{3}{2}x &\qquad 3x+2y+4=0 \end{aligned}$$

Troviamo ora le parallele ai lati per i vertici opposti, utilizzando sempre l'equazione di una retta passante per un punto, di coefficiente angolare noto

$$\begin{aligned} \textit{parall}\,AB:\ y+2=\frac{1}{3}(x-0) &\qquad x-3y-6=0 \\ \textit{parall}\,AC:\ y-1=4(x+2) &\qquad 4x-y+9=0 \\ \textit{parall}\,BC:\ y-2=-\frac{3}{2}(x-1) &\qquad 3x+2y-7=0 \end{aligned}$$

Calcoliamo il perimetro, determinando le lunghezze dei tre lati con la formula della distanza.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1+2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10} \\ AC &= \sqrt{(1+0)^2+(2+2)^2}=\sqrt{17} \\ BC &= \sqrt{(0+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{13} \end{aligned}$$

Il perimetro sarà pertanto la somma dei tre radicali

$$2p=\sqrt{10}+\sqrt{17}+\sqrt{13}$$

Esercizio 47. Dati i punti $A(1;-2)$ e $B(3;4)$, determinare:

(1) l'equazione dell'asse del segmento AB
(2) l'equazione della retta r parallela ad AB e passante per $C(-1;0)$
(3) la distanza d tra la retta r e AB

(4) i punti dell'asse x dai quali si veda il segmento AB sotto un angolo retto. Detti C e D tali punti, trovare l'area del quadrilatero $ADBC$.

SOLUZIONE. l'asse di un segmento è la retta perpendicolare al segmento nel suo punto medio e i punti dell'asse hanno coordinate tali che le loro distanze da A e B sono sempre uguali.

(1) Calcoliamo la distanza tra un generico punto $P(x;y)$ e i due punti assegnati, imponendo che $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(y+2)^2 &= (x-3)^2+(y-4)^2\\ x^2-2x+1+y^2+4y+4 &= x^2-6x+9+y^2-8y+16\end{aligned}$$

eliminando i termini di secondo grado, e sommando i termini simili, si ottiene l'equazione dell'asse

$$\begin{aligned}4x+12y-20 &= 0\\ asse:\quad x+3y-5 &= 0\end{aligned}$$

(2) la retta parallela,r, avrà lo stesso coefficiente angolare della retta della retta AB. Tale retta ha equazione:

$$\begin{aligned}\frac{y+2}{4+2} &= \frac{x-1}{3-1}\\ \frac{y+2}{6} &= \frac{x-1}{2}\\ y &= 3x-5\end{aligned}$$

ora, la retta parallela avrà $m_r = 3$, da cui

$$\begin{aligned}y-0 &= 3(x+1)\\ r:\ 3x-y+3 &= 0\end{aligned}$$

(3) calcoliamo la distanza tra la retta r e la sua parallela AB, calcolando la distanza tra un punto della retta AB, p.es. A, e la retta r:

$$d = \frac{|3\cdot 1+(-2)\cdot(-1)+3|}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

ESERCIZIO 48. Determinare un punto della retta di equazione $y=-4x+1$ che sia equidistante da $A(3;1)$ e $(6;4)$.

SOLUZIONE. Il punto cercato, appartenendo alla retta assegnata, avrà coordinate $P(x;-4x+1)$ in quanto la sua ordinata dovrà soddisfare l'equazione della retta. Calcoliamo pertanto le due distanze e imponiamo la loro uguaglianza.

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2 &= (x-3)^2+(-4x+1-1)^2\\ \overline{PB}^2 &= (x-6)^2+(-4x+1-4)^2\end{aligned}$$

uguagliando e sviluppando, si ha

$$\begin{aligned}x^2-6x+9+16x^2 &= x^2-12x+36+16x^2+24x+9\\ 18x &= -36\end{aligned}$$

da cui

$$x=-2 \qquad y=-4\cdot 2+1=+9$$
$$P(-2;9)$$

ESERCIZIO 49. Data la retta di equazione

$$(a-2)\,x+(1-2a)\,y+1=0$$

determinare per quale valore di a essa è:

(1) parallela a $y=2x-1$
(2) perpendicolare a $3x-y+1=0$

(3) parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante
(4) parallela a $x - 2y + 1 = 0$
(5) due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare; la retta cercata avrà quindi coefficiente angolare $m = 2$; la retta generica, espressa con coefficienti contenenti il parametro a ha coefficiente angolare $m = -\frac{a}{b} = -\frac{a-2}{1-2a} = \frac{a-2}{2a-1}$. Eguagliando i due coefficienti, si ha

$$\begin{aligned}\frac{a-2}{2a-1} &= 2\\ a-2 &= 4a-2\end{aligned}$$

da cui

$$a = 0$$

(6) due rette sono perpendicolari se i loro coefficienti angolari sono antireciproci; quindi, essendo il coefficiente angolare della retta data $m = 3$,

$$\begin{aligned}\frac{a-2}{2a-1} &= -\frac{1}{3}\\ -3a+6 &= -2a+1\end{aligned}$$

da cui

$$a = 5$$

(7) la bisettrice ha equazione $y = x$ e quindi $m = 1$

$$\begin{aligned}\frac{a-2}{2a-1} &= 1\\ a-2 &= 2a-1\end{aligned}$$

da cui

$$a = -1$$

(8) la retta assegnata ha $m = \frac{1}{2}$ e quindi

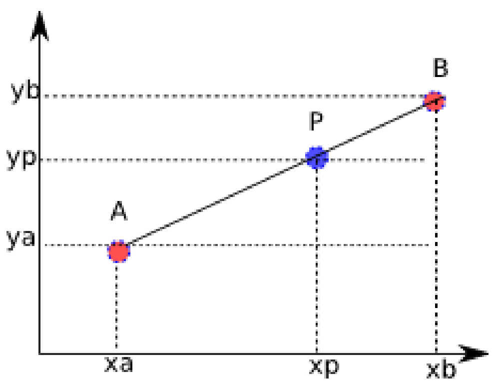
$$\begin{aligned}\frac{a-2}{2a-1} &= \frac{1}{2}\\ 2a-4 &= 2a-1\end{aligned}$$

nessun valore di a.

Esercizio 50. Sono dati i punti $A(3;-2)$, $B(9;4)$, $C(2;3)$; dopo aver trovato le coordinate del punto P che divide internamente il segmento AB in modo che $AP = \frac{1}{2}PB$, determinare l'equazione della retta CP.

Dimostrazione. Mostriamo prima come calcolare le coordinate di un punto che divide un segmento in parti il cui rapporto è noto, $\frac{m}{n}$. Assegnati gli estremi del segmento, di coordinate note, dalla figura sotto, si vede che per il punto P interno, di coordinate incognite, valgono le relazioni derivate dal th. Talete

□



$$\frac{x - x_A}{x_B - x} = \frac{m}{n} \qquad \frac{y - y_A}{y_B - y} = \frac{m}{n}$$

da cui, risolvendo rispetto alle coordinate incognite, x, y:

$$x = \frac{nx_A + mx_B}{n+m} \qquad y = \frac{ny_A + my_B}{n+m}$$

Soluzione. Applicando la formula presentata, con $m = 1$ e $n = 2$, si ha

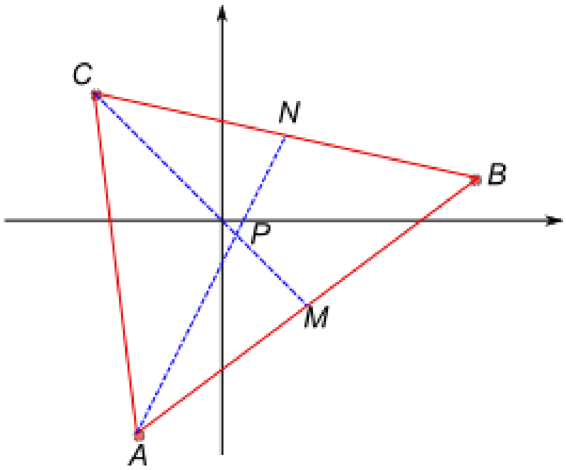
$$P_x = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 9}{3} \qquad P_y = \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot (4)}{3}$$

$$P\,(5; 0)$$

Troviamo ora l'equazione della retta CP passante per i due punti assegnati, applicando la formula di una retta per due punti

$$\begin{aligned} \frac{y-0}{3-0} &= \frac{x-5}{2-5} \\ y &= -x+5 \end{aligned}$$

Esercizio 51. È dato il triangolo di vertici $A(-2; -5)$, $B(6; 1)$, $C(-3; 3)$. Verificare se la mediana relativa al lato AB passa per l'origine e trovare le coordinate del baricentro.



Soluzione. La mediana è il segmento che unisce un vertice di un triangolo con il punto medio del lato opposto. Troviamo allora le coordinate del punto medio del segmento AB.

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{6-2}{2} = 2 \\ M_y &= \frac{1-5}{2} = -2 \end{aligned}$$

Calcoliamo l'equazione della retta CM, mediante la relazione della retta passante per due punti

$$\frac{y-3}{-2-3} = \frac{x+3}{2+3}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{y-3}{-5} &= \frac{x+3}{5} \\ x+y &= 0 \end{aligned}$$

Per verificare se la retta passa per l'origine, sostituiamo le coordinate dell'origine nella retta AM, oppure osserviamo che la retta, scritta nella forma esplicita, $y = -x$ ha $q = 0$ e quindi passa per l'origine. Per trovare il baricentro è necessario ottenere l'equazione di un'altra mediana, dato che il baricentro è sempre l'intersezione di tutte le mediane. Troviamo il punto medio del lato BC

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2} \\ N_y &= \frac{1+3}{2} = 2 \end{aligned}$$

Troviamo ora la retta AN:

$$\begin{aligned} \frac{y+5}{2+5} &= \frac{x+2}{\frac{3}{2}+2} \\ \frac{y+5}{7} &= \frac{2x+4}{7} \end{aligned}$$

cioè

$$2x - y - 1 = 0$$

Il baricentro è il punto di intersezione delle due rette:

$$\begin{cases} x + y & = & 0 \\ 2x - y & = & 1 \end{cases} \quad P \begin{cases} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 52. La retta di equazione $2x + 3y - 17 = 0$ incontra in C l'asse del segmento avente per estremi i punti $A(-1;2)$ e $B(3;6)$. Determinare nel 1° quadrante la posizione del punto D che forma con A, B, C il parallelogramma $ABDC$ e calcolare la sua area.

Soluzione. Troviamo innanzitutto l'equazione dell'asse del segmento AB. Ricordando che, l'asse di un segmento è il luogo dei punti, $P(x;y)$, equidistanti dai suoi estremi, scriviamo la relazione $PA^2 = PB^2$, dove

$$\begin{aligned} PA^2 &= (x+1)^2 + (y-2)^2 \\ PB^2 &= (x-3)^2 + (y-6)^2 \end{aligned}$$

da cui

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-6)^2$$

svolgendo i prodotti notevoli e sommando i termini simili, si ottiene

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 6x + 9 + y^2 - 12y + 36 \\ 8x + 8y - 40 &= 0 \\ x + y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

Troviamo ora le coordinate del punto C, intersezione tra le due rette,

$$\begin{cases} x + y & = & 5 \\ 2x + 3y & = & 17 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y + 5 \\ -2y + 10 + 3y = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & = & -y + 5 \\ y & = & 7 \end{cases} \qquad C \begin{cases} x & = & -2 \\ y & = & 7 \end{cases}$$

Il punto D può essere determinato ricordando la proprietà dei parallelogrammi, secondo la quale, le diagonali si incontrano nel loro punto medio. Troviamo il punto medio, M, della diagonale BC,

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2} \\ M_y &= \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

Il punto D sarà ricavato attraverso la formula inversa del punto medio, cioè

$$\begin{aligned} \frac{A_x + D_x}{2} &= M_x \\ D_x &= 2 \cdot \frac{1}{2} - (-1) = 2 \\ \frac{A_y + D_y}{2} &= M_y \\ D_y &= 2 \cdot \frac{13}{2} - 2 = 11 \end{aligned}$$

Il punto cercato avrà coordinate $D(2;11)$. Per trovare l'area del parallelogramma, calcoliamo la lunghezza di un lato, presa come base, e la distanza di uno dei vertici del lato dal lato opposto. Troviamo la lunghezza del lato AB

$$AB = \sqrt{(3+1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Troviamo l'equazione della retta CD

$$\begin{aligned} \frac{y-7}{11-7} &= \frac{x+2}{2+2} \\ x - y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

troviamo ora la distanza del punto A da tale retta

$$d = \frac{\| -1 - 2 + 9}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

L'area sarà

$$A = 4\sqrt{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = 24$$

ESERCIZIO 53. Dati i punti $A(-5;-2)$ e $B(-2;-4)$, determinare il punto P sul segmento AB tale che la somma del doppio della sua distanza dall'asse y con la sua distanza dall'asse x sia 9.

SOLUZIONE. il punto P appartiene alla retta passante per i due punti dati

$$\frac{y+2}{-4+2}=\frac{x+5}{-2+5}$$

svolgendo

$$3y+6=-2x-10$$

l'equazione di tale retta è quindi

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}$$

Il punto avrà coordinate $P\left(x;-\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}\right)$. Il valore assoluto delle due coordinate rappresenta anche la distanza del punto dagli assi. Inoltre l'ascissa, appartenendo P al segmento AB, deve essere compresa tra -5 e -2, mentre l'ordinata, tra -2 e -4. Queste osservazioni ci consentono di impostare una sola equazione risolvente, senza discutere tutti i casi dei valori assoluti:

$$-2x+\frac{2}{3}x\sqrt{m^2+1}+\frac{16}{3}=9$$

cioè

$$-\frac{4}{3}x=\frac{11}{3}\qquad x=-\frac{11}{4}$$

sostituendo nell'equazione della retta per A,B, si ha

$$y=-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{11}{4}\right)-\frac{16}{3}=-\frac{7}{2}$$

il punto richiesto sarà

$$P\left(-\frac{11}{4};-\frac{7}{2}\right)$$

ESERCIZIO 54. Determinare sulla retta di equazione $x=3(y-1)$ il punto C di ascissa positiva tale che considerati i punti $A(2,1)$ e $B(3;-2)$, sia soddisfatta la relazione $AC=AB\sqrt{2}$. Verificare inoltre che il baricentro del triangolo ABC appartiene alla retta di equazione $x+2y-5=0$.

SOLUZIONE. Il punto C, appartenendo alla retta assegnata, ha coordinate $C(3y-3;y)$. Calcoliamo le distanze tra i punti assegnati e C

$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{(3y-3-2)^2+(y-1)^2}\\ &= \sqrt{10y^2-32y+26}\end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{(3-2)^2+(1+2)^2}=\sqrt{10}$$

Impostiamo ora la relazione alla quale C deve soddisfare e risolviamo

$$\sqrt{10y^2-32y+26} = \sqrt{20}$$

da cui, elevando al quadrato e dividendo tutto per 2,

$$5y^2-16y+3=0$$

le soluzioni sono

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{5}\\ y_2 &= 3\end{aligned}$$

dovendo il punto avere ascissa positiva, $C(6;3)$.
Troviamo ora il baricentro del triangolo

$$\begin{aligned}x_H &= \frac{2+3+6}{3}=\frac{11}{3}\\ y_H &= \frac{1-2+3}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Se appartiene alla retta $x+2y-5=0$, allora le sue coordinate soddisfano l'equazione; sostituiamo

$$\begin{aligned}\frac{11}{3}+\frac{4}{3}-5 &= 0\\ 5-5 &= 0\end{aligned}$$

Il baricentro appartiene alla retta.

Esercizio 55. Condurre per i punti $M(-4;-2)$ e $N(0;-6)$ le parallele m e n alla retta $x-2y+4=0$ e calcolare le coordinate dei punti P e Q di intersezione della retta $y=-x+3$ con m e n. Verificare che il quadrilatero $MNPQ$ è un parallelogrammo e determinare la lunghezza del suo perimetro.

Soluzione. due rette parallele hanno lo stesso coefficiente angolare.

(1) retta m passante per M:

$$\begin{aligned}y+2 &= \frac{1}{2}(x+4)\\ y &= \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

(2) retta n passante per N:

$$\begin{aligned}y+6 &= \frac{1}{2}x\\ y &= \frac{1}{2}x-6\end{aligned}$$

(3) calcolo del punto Q:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -x+3 \end{cases}$$

da cui, sottraendo la seconda alla prima,

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ 0 = \frac{3}{2}x-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$Q(2;1)$$

(4) calcolo del punto P

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x-6 \\ y = -x+3 \end{cases}$$

sempre sottraendo come prima

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x-6 \\ 0 = \frac{3}{2}x-9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 6 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$P(6;-3)$$

(5) Un quadrilatero è un parallelogramma se, ad esempio, le sue diagonali si incontrano nel loro punto medio; troviamo il punto medio di MP:

$$\begin{aligned}x_H &= \frac{-4+6}{2}=1\\ y_H &= \frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Troviamo il punto medio di NQ:

$$\begin{aligned}x_K &= \frac{0+2}{2}=1\\ y_K &= \frac{-6+1}{2}=-\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$MNPQ$ è quindi un parallelogrammo

(6) Calcoliamo la lunghezza dei lati consecutivi per ottenere il perimetro

$$\begin{aligned}MN &= \sqrt{16+16}=4\sqrt{2}\\ MQ &= \sqrt{36+9}=3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Il perimetro è $8\sqrt{2}+6\sqrt{5}$

ESERCIZIO 56. Nel parallelogrammo $ABCD$ un vertice è nel punto $A\,(2;0)$, la diagonale BD sta sulla retta $y = 2$ ed è lunga 3 mentre la diagonale AC è lunga $\sqrt{41}$. Calcolare la lunghezza del perimetro del parallelogrammo.

SOLUZIONE. Il segmento BD sta su una retta parallela all'asse y, pertanto i suoi estremi avranno coordinate $B(x_B;2)$ e $D(x_D;2)$ e $|x_D - x_B| = 3$

:

ESERCIZIO 57. Determinare l'angolo formato dalle rette r, s con $r : x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ e $s : 2x - 2y - 1 = 0$

SOLUZIONE. Per determinare l'angolo, β, formato da due rette bisogna ricordare che (dall'applicazione delle formule della goniometria relative alle funzioni di somma o differenza di angoli)

$$\tan\beta = \frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s}$$

Pertanto $m_r = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $m_s = -\frac{2}{-2} = 1$. Sostituendo avremo

$$\tan\beta = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

razionalizzando

$$\tan\beta = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\frac{2}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

l'angolo tra le rette sarà $\beta = \arctan\left(2 - \sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{12}$.

:

ESERCIZIO 58. Trovare il punto della retta $r : x - y + 1 = 0$ equidistante da $P\,(-2,2)$ e dalla retta $s : x + 2y + 1 = 0$.

SOLUZIONE. Calcoliamo la distanza tra due punti e tra un punto e una retta e uguagliamo le due relazioni.
Sia $A\,(x_A, y_A)$ un generico punto della retta r; appartenendo ad essa, le sue coordinate verificano l'equazione di tale retta, per cui possiamo sostituire ad y_A il valore $x_A + 1$ operando quindi con una sola incognita. Avremo quindi $A\,(x_A, x_A + 1)$. Calcoliamo la distanza tra i due punti

$$PA = \sqrt{(x_A + 2)^2 + (x_A - 1)^2} = \sqrt{2x_A^2 + 2x_A + 5}$$

Calcoliamo ora la distanza di A dalla retta s, utilizzando la formula

$$d_{As} = \frac{|x_A + 2x_A + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|3x_A + 1|}{\sqrt{5}}$$

Uguagliamo le due relazioni che esprimono le due distanze e avremo

$$\sqrt{2x_A^2 + 2x_A + 5} = \frac{|3x_A + 1|}{\sqrt{5}}$$

elevando tutto al quadrato e svolgendo i calcoli necessari

$$10x_A^2 + 10x_A + 25 = 9x_A + 18x_A + 9$$

da cui

$$x_A^2 - 8x_A + 16 = 0 \quad (x_A - 4)^2$$

il punto cercato sarà $A\,(4;5)$.

:

ESERCIZIO 59. Determinare le coordinate del punto C che forma con i punti $A\,(3,1)\,, B\,(-3,2)$ un triangolo di area 4.

SOLUZIONE. Consideriamo il segmento AB come la base del triangolo che vale

$$AB = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

Il terzo vertice sarà quello dal quale abbassare l'altezza del triangolo sulla base AB. Se l'area è $= 4$, allora l'altezza del triangolo sarà

$$h = \frac{2A}{AB} = \frac{8}{\sqrt{37}}$$

Calcoliamo ora la distanza del punto incognito C dalla retta che contiene la base AB il cui coefficiente angolare è $m_{AB} = \frac{2-1}{-3-3} = -\frac{1}{6}$ e passando per A o per B, avrà equazione

$$y - 2 = -\frac{1}{6}(x+3)$$

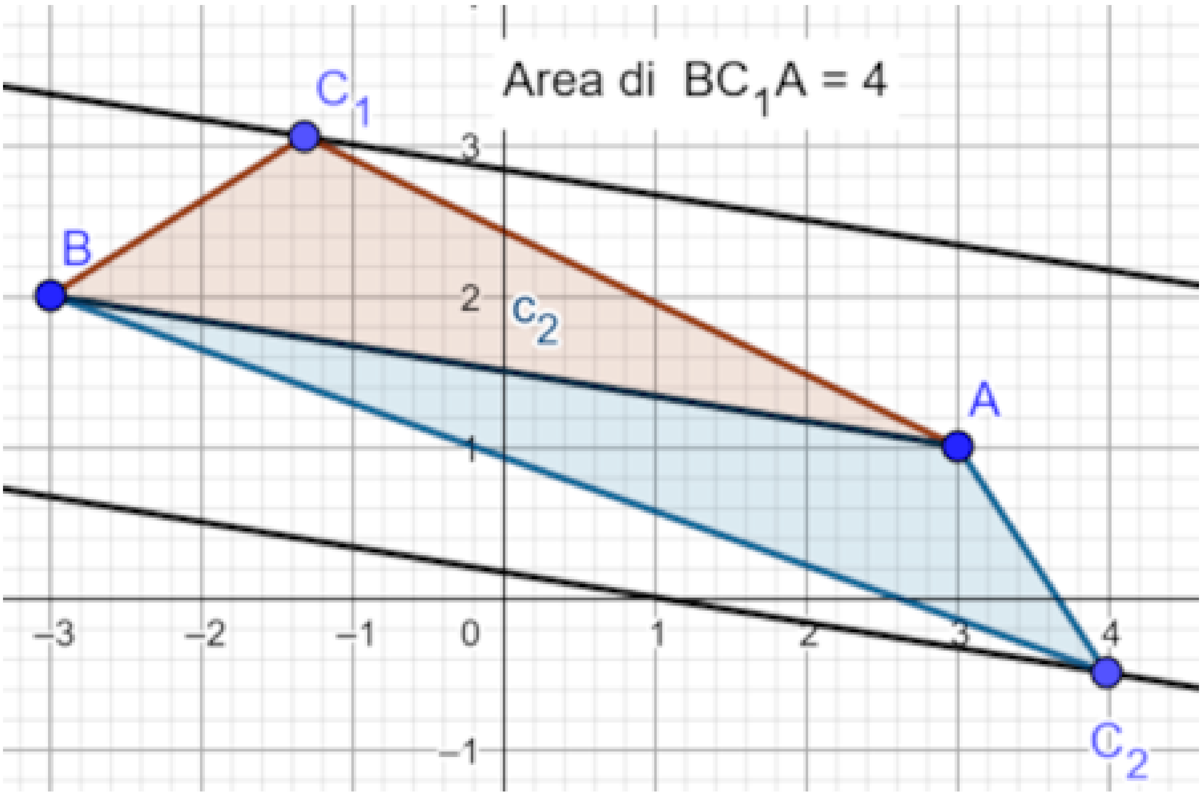
riscrivendola in forma implicita, si ha

$$x + 6y - 9 = 0$$

Ora eguagliamo la lunghezza dell'altezza alla distanza tra C e la retta appena trovata

$$\frac{|x_c + 6y_c - 9|}{\sqrt{37}} = \frac{8}{\sqrt{37}}$$

avremo $x_c + 6y_c - 9 = \pm 8$, che determina due rette parallele $x - 6y - 17 = 0$ e $x - 6y - 1 = 0$. Ciascun punto di queste due rette può costituire il vertice C cercato, come si può vedere dalla figura immaginando di far scorrere i due punti lungo le due rette parallele ad AB.



Fasci propri e impropri di rette

Esercizio 60. Determinare la retta t comune al fascio improprio $3x - y + k = 0$ ed al fascio proprio definito dalle rette r e s di equazioni rispettivamente $x - 3y = 0$ e $2x + y - 7 = 0$.

Soluzione. Ricordiamo che un fascio di rette proprio è l'insieme di tutte le rette del piano passanti per uno stesso punto, detto centro o sostegno del fascio; un fascio improprio è l'insieme di tutte del piano che hanno una stessa direzione, cioè l'insieme delle rette parallele ad una retta data.

Nel nostro caso tutte le rette del fascio improprio avranno una direzione definita dal coefficiente angolare $m = 3$, mentre il fascio proprio avrà come centro il punto dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + y - 7 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

la retta comune ai due fasci dovrà avere coefficiente angolare per cui, scriviamo l'equazione del fascio proprio e imponiamo che il coefficiente angolare sia $= 3$.

$$y - 1 = 3(x - 3)$$

da cui

$$3x - y - 8 = 0$$

Esercizio 61. Determinare le rette del fascio di centro $C(2,1)$ formanti tra loro un angolo $\beta = \frac{\pi}{4}$, una delle quali passa per il punto $P(3,2)$.

Soluzione. L'equazione del fascio proprio sarà

$$y - 1 = m(x-2)$$

Se una retta di questo fascio, oltre che per il punto C passa anche per il punto P, avrà come coefficiente angolare

$$m = \frac{3-2}{2-1} = 1$$

per cui la retta sarà $y = x - 1$ o in forma implicita $x - y - 1 = 0$.

Per trovare ora la seconda retta che forma con quella appena trovata un angolo $= \frac{\pi}{4}$, ricordiamo che l'angolo tra due rette è espresso da $\tan\beta = \pm\frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2}$. Si tratta pertanto di ricavare il valore di m_2 di questa seconda retta. Riscriviamo la relazione attraverso i coefficienti delle equazioni implicite

$$\tan\beta = \pm\frac{-\frac{a_2}{b_2} + \frac{a_1}{b_1}}{1 + \frac{a_2}{b_2}\cdot\frac{a_1}{b_1}} = \pm\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2 + a_1 a_2}$$

Nel nostro caso nella retta nota $x - y - 1 = 0$ avremo $a_1 = 1$ e $b_1 = -1$, per cui, sostituendo (ricordando che $\tan\frac{\pi}{4} = 1$)

$$\tan\beta = \pm\frac{b_2 + a_2}{a_2 - b_2} = 1$$

ossia, considerando il segno $+$

$$b_2 + a_2 = a_2 - b_2$$

avremo quindi $b_2 = 0$ e a_2 qualsiasi. La generica retta $a_2 x + b_2 y + c = 0$ sarà quindi parallela all'asse y.

Considerando il segno $-$, avremo

$$b_1 - a_2 = a_2 + b_2$$

avremo quindi $a_2 = 0$ e b_2 qualsiasi. La generica retta $a_2 x + b_2 y + c = 0$ sarà quindi parallela all'asse x.

:

Esercizio 62. Determinare le rette del fascio individuato da $r: x - y + 1 = 0$ e $s: 2x - y + 5 = 0$ aventi distanza $d = 3$ dall'origine del piano cartesiano.

Soluzione. Determiniamo il centro del fascio

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}$$

l'equazione del fascio sarà $y + 3 = m(x+4)$ e nella forma implicita $mx - y + 4m - 3 = 0$. Applichiamo la formula che esprime la distanza di un punto, $O(0,0)$ da una retta e poniamola $= 3$.

$$d = \frac{|0m - 0\cdot 1 + 4m - 3|}{\sqrt{m^2+1}} = 3$$

da cui

$$|4m - 3| = 3\sqrt{m^2+1}$$

elevando tutto al quadrato ($m^2 + 1 \geq 0$ per ogni valore di m) e svolgendo i calcoli si ha

$$7m^2 - 24m = 0$$

da cui $m = 0$ e $m = \frac{24}{7}$.

Per $m = 0$ la retta diviene $y + 3 = 0$, parallela all'asse x; per $m = \frac{24}{7}$ si ha $24x - 7y + 75 = 0$.

CAPITOLO 3

Equazione della Circonferenza

La circonferenza è, per definizione, il luogo dei punti equidistanti da un punto fisso assegnato, detto centro. La distanza tra un qualunque punto del luogo e il centro è detta raggio della circonferenza. Pertanto, la conoscenza del centro e del raggio consentono di esprimere la circonferenza in forma algebrica.

Infatti dato il centro $C(\alpha,\beta)$ e il raggio r, l'equazione è costruita partendo dalla definizione, cioè la ricerca di tutti i punti $P(x,y)$ che distano r da C.

Avremo

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

l'equazione si può anche scrivere in forma canonica svolgendo i calcoli e sostituendo nel modo seguente le costanti $a=-2\alpha$, $b=-2\beta$, $c=\alpha^2+\beta^2-r^2$. Si ottiene la seguente equazione

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Dalla relazione che esprime c si può dedurre che non tutte le equazioni come quella sopra rappresentano delle circonferenze, infatti se la risolviamo rispetto al raggio otteniamo $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$, ed è necessario che $\alpha^2+\beta^2-c>0$ affinché la radice esista e, quindi, che la lunghezza del raggio sia rappresentata da un valore positivo.

:

Esercizio 63. Determinare il raggio e il centro della circonferenza $x^2+y^2+4x-2=0$

Soluzione. Ricordando le relazioni prima menzionate, $\alpha=-\frac{a}{2}$, $\beta=-\frac{b}{2}$, $r=\sqrt{\alpha^2+\beta^2-c}$, osservando l'equazione avremo $a=4$, cioè $\alpha=-2$; $b=0$, cioè $\beta=0$; per cui $C(-2,0)$ e $r=\sqrt{4+0-(-2)}=\sqrt{6}$.

Esercizio 64. Determinare il raggio e il centro della circonferenza $2x^2+2y^2-x+2y-6=0$

Soluzione. Come nell'esercizio precedente dopo aver diviso tutti i coefficienti per 2, coefficienti comune delle due variabili di secondo grado. L'equazione diventa

$$x^2+y^2-\frac{1}{2}x+y-3=0$$

Avremo quindi $C\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{2}\right)$ e $r=\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+3}=\frac{\sqrt{53}}{4}$.

Esercizio 65. Scrivere l'equazione della circonferenza avente il centro in $C(1,1)$ e tangente alla retta di equazione $x+2y+3=0$.

Soluzione. La distanza tra il centro e la retta tangente è il raggio della circonferenza; pertanto

$$r=\frac{|1+2+3|}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$$

l'equazione della circonferenza cercata sarà

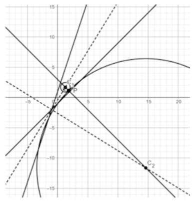
$$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{36}{5}$$

o

$$x^2+y^2-2x-2y-\frac{26}{5}=0$$

:

Esercizio 66. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $P(2,1)$ e tangente alle rette $t_1: x-y-1=0$ e $t_2: 3x-y+1=0$.



SOLUZIONE. Il punto P appartiene a una delle bisettrici. Infatti sostituendo le sue coordinate nell'equazione $x-y-1=0$, questa viene verificata (la figura mostra questa condizione).

Il centro delle circonferenze deve appartenere alle bisettrici degli angoli formati dalle due rette essendo le bisettrici per definizione il luogo dei punti equidistanti dalle due rette. Inoltre il centro sulla bisettrice dell'angolo acuto appartiene anche alla perpendicolare passante per il punto P, per i teoremi riguardanti le tangenti a una circonferenza.

Dette b_1 e b_2 rispettivamente le bisettrici degli angoli acuto e ottuso, determiniamo la loro equazione imponendo la condizione del luogo che le caratterizza per ricavare le coordinate dei centri $C\left(x,y\right)$

$$\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3x-y+1|}{\sqrt{10}}$$

svolgendo

$$\sqrt{5}\left(x-y-1\right)=\pm\left(3x-y+1\right)$$

1ª bisettrice b_2: $x\left(3-\sqrt{5}\right)+y\left(\sqrt{5}-1\right)+1+\sqrt{5}=0$

(il suo coefficiente angolare è $m_{b_1}=-\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}+1}<0$, quindi è la bisettrice dell'angolo ottuso

2ª bisettrice b_1: $x\left(3+\sqrt{5}\right)-y\left(\sqrt{5}+1\right)+1-\sqrt{5}=0$

(il suo coefficiente angolare è $m_{b_2}=\frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}>0$, quindi è la bisettrice dell'angolo acuto

Calcoliamo le coordinate dei centri intersecando successivamente le due bisettrici con la perpendicolare passante per P che ha equazione $x+y-3=0$ ($m_{tg}=1$, $m_{perp}=-1$ passante per $P\left(2,1\right)$).

Primo caso:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x\left(3-\sqrt{5}\right)+y\left(\sqrt{5}-1\right)+1+\sqrt{5}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3-y \\ \left(3-y\right)\left(3-\sqrt{5}\right)+y\left(\sqrt{5}-1\right)+1+\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y \\ 10-2\sqrt{5}+y\left(\sqrt{5}-1-3-\sqrt{5}\right)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3+3\sqrt{5}+5=8+3\sqrt{5} \\ y=\frac{\sqrt{5}-5}{\sqrt{5}-2}\cdot\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}+2}=-3\sqrt{5}-5 \end{cases}$$

il centro della circonferenza sarà $C_2\left(8+3\sqrt{5};-3\sqrt{5}-5\right)$; e il suo raggio

$$r^2=\left(8+3\sqrt{5}-2\right)^2+\left(-3\sqrt{5}-5-1\right)^2=162+72\sqrt{5}$$

l'equazione sarà

$$\left(x-8-3\sqrt{5}\right)^2+\left(y+3\sqrt{5}+5\right)^2=162+72\sqrt{5}$$

Secondo caso:

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ x\left(3+\sqrt{5}\right)+y\left(\sqrt{5}+1\right)+1-\sqrt{5}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3-y \\ \left(3-y\right)\left(3+\sqrt{5}\right)+y\left(\sqrt{5}+1\right)+1-\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3-y \\ 10+2\sqrt{5}+y\left(3+\sqrt{5}+\sqrt{5}+1\right)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3-3\sqrt{5}+5=8-3\sqrt{5} \\ y=\frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+2}\cdot\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2}=3\sqrt{5}-5 \end{cases}$$

il centro della circonferenza sarà $C_1\left(8-3\sqrt{5};3\sqrt{5}-5\right)$; e il suo raggio

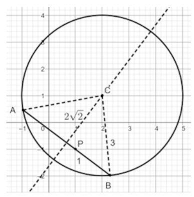
$$r^2=\left(6-3\sqrt{5}\right)^2+\left(3\sqrt{5}-6\right)^2=162-72\sqrt{5}$$

l'equazione sarà

$$\left(x-8+3\sqrt{5}\right)^2+\left(y-3\sqrt{5}+5\right)^2=162-72\sqrt{5}$$

:

ESERCIZIO 67. Fra le due rette del fascio $P\left(1,-1\right)$ determinare quelle che intercettano sulla circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x-2y-4=0$ una corda di lunghezza 2.



Soluzione. Possiamo determinare il centro e il raggio della circonferenza, ricordando le relazione riportate sopra. $C(2;1)$ e $r=\sqrt{4+1+4}=3$. La corda può essere considerata come la base del triangolo isoscele (in figura) ABC. Per cui applicando il teorema di Pitagora possiamo calcolare la distanza tra il centro e la corda: $d=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$. Il fascio di rette passanti per $P(1,-1)$ sarà $mx-y-m-1=0$. Imponiamo quindi che la distanza di C dalle rette del fascio deve essere $2\sqrt{2}$:

$$2\sqrt{2}=\frac{|2m-1-m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

risolvendo, elevando al quadrato

$$8m^2+8=m^2-4m+4$$

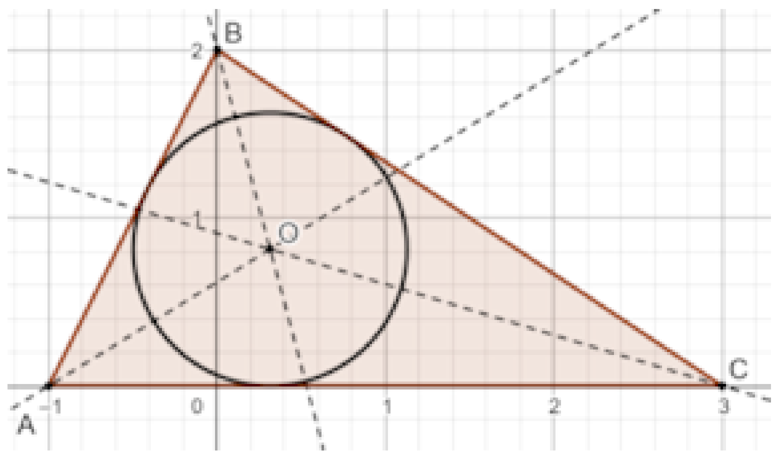
da cui

$$7m^2+4m+4=0$$

tale equazione di secondo grado ha il discriminante negativo e quindi non vi sono rette del fascio che soddisfano alla condizione data.

:

Esercizio 68. Scrivere l'equazione della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici $A(-1,0), B(0,2), C(3,0)$.



Soluzione. Il centro della circonferenza inscritta, o incentro, è l'intersezione delle bisettrici degli angoli interni del triangolo, è cioè equidistante da tutti i lati e tale distanza è il raggio della circonferenza. Troviamo dapprima le equazioni delle rette che contengono i lati.

La retta che contiene AC è l'asse x e la sua equazione è $y=0$;

La retta che contiene AB ha coefficiente angolare $m_{AB}=2$ e passa per $B(0,2)$, quindi la sua equazione sarà $2x-y+2=0$; infine la retta che contiene BC ha coefficiente angolare $-\frac{2}{3}$ e passa pure per $B(0,2)$ e la sua equazione sarà $2x+3y-6=0$.

Vi possono essere due percorsi risolutivi: uno consiste nel ricavare le equazioni di due bisettrici per trovare poi la loro intersezione, che rappresenterà il centro della circonferenza, dopo di che il raggio sarà avrà una lunghezza pari all'ordinata del centro; l'altro consiste nel considerare il centro come equidistante dai lati del triangolo per trovare poi il raggio come prima.

Sceglieremo questa seconda procedura, ponendo $O(\alpha,\beta)$ e calcolando la sua distanza dalle rette BC e AB e ponendo tale distanza $=\beta$. Avremo

$$\frac{|2\alpha-\beta+2|}{\sqrt{5}}=\frac{|2\alpha+3\beta-6|}{\sqrt{13}}=\beta$$

Risolviamo queste equazioni in due incognite mediante il sistema

$$\begin{cases}|2\alpha-\beta+2|=\sqrt{5}\beta\\|2\alpha+3\beta-6|=\sqrt{13}\beta\end{cases}$$

la presenza dei valori assoluti determina il formarsi di quattro diversi sistemi, uno solo dei quali determinerà il centro della circonferenza richiesta. Una condizione è che l'ordinata del centro sia positiva. Gli altri sistemi daranno i centri delle circonferenze exinscritte, cioè le circonferenze che hanno i centri sempre sulle tre bisettrici ma sono tangenti esternamente ai tre lati.

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+2=\sqrt{5}\beta \\ 2\alpha+3\beta-6=\sqrt{13}\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta+2=\sqrt{5}\beta \\ 2\alpha+3\beta-6=-\sqrt{13}\beta \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+2=-\sqrt{5}\beta \\ 2\alpha+3\beta-6=\sqrt{13}\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha-\beta+2=-\sqrt{5}\beta \\ 2\alpha+3\beta-6=-\sqrt{13}\beta \end{cases}$$

Invece di risolverli tutti, ricordiamo che esiste una relazione tra l'area e il perimetro di un triangolo in funzione del raggio della circonferenza inscritta (basta considerare l'area come la somma dei tre triangoli AOB, AOC, BOC che hanno tutti come una altezza il raggio.

$$2A = AC\cdot r + AB\cdot r + BC\cdot r = 2p\cdot r$$

da cui $r=\frac{A}{p}$. I tre lati hanno lunghezze $|AC| = |3-(-1)| = 4$; $|AB| = \sqrt{(0+1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{5}$ e $|BC| = \sqrt{(3-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{13}$. Pertanto $r=\frac{8}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}=\beta$.

Osservando i segni dei termini noti, si può vedere che il sistema che fa al caso nostro è

$$\begin{cases} 2\alpha-\beta+2=\sqrt{5}\beta \\ 2\alpha+3\beta-6=-\sqrt{13}\beta \end{cases} \quad \begin{cases} 4\beta+\sqrt{5}\beta+\sqrt{13}\beta=8 \\ 2\alpha=\beta\left(1+\sqrt{5}\right)-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta\left(4+\sqrt{5}+\sqrt{13}\right)=8 \\ -------- \end{cases} \quad \begin{cases} \beta=\frac{8}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}} \\ \alpha=\frac{4\left(1+\sqrt{5}\right)}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta=\frac{8}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}} \\ \alpha=\frac{4+4\sqrt{5}-4-\sqrt{5}-\sqrt{13}}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{13}}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}} \end{cases}$$

La circonferenza avrà equazione

$$\left(x-\frac{8}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}\right)^2+\left(y-\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{13}}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}\right)^2=\left(\frac{8}{4+\sqrt{5}+\sqrt{13}}\right)^2$$

:

Esercizio 69. Si scriva l'equazione della circonferenza che passa per i punti $O(0;0)$ e $A(7;0)$ e stacca sul semiasse positivo delle y un segmento $OP=3$. Si calcoli la differenza fra la lunghezza del diametro e quella della corda intercettata sulla bisettrice del primo quadrante.

Soluzione. Soluzione: Se la circonferenza passa per il punto P che sta sull'asse y, le sue coordinate sono $P(0;3)$. Possiamo quindi calcolare l'equazione della circonferenza passante per i tre punti dati:

$$\begin{cases} c=0 \\ 49+7a+c=0 \\ 9+3b+c=0 \end{cases}$$

da cui si ha

$$\begin{cases} a = -7 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

L'equazione è

$$x^2+y^2-7x-3y=0$$

tale cerchio ha centro nel punto

$$x_c = -\frac{a}{2}=\frac{7}{2}$$
$$y_c = -\frac{b}{2}=\frac{3}{2}$$

il raggio è

$$r=\sqrt{\frac{49}{4}+\frac{9}{4}-0}=\frac{1}{2}\sqrt{58}$$

il diametro sarà $d=\sqrt{58}$

La bisettrice del primo-terzo quadrante ha equazione $y=x$ e incontra la circonferenza nei punti

$$\begin{cases} x^2+y^2-7x-3y=0 \\ y=x \end{cases}$$

da cui

$$2x^2 - 10x = 0$$

le intersezioni saranno

$$M\,(0;0) \qquad N\,(5;5)$$

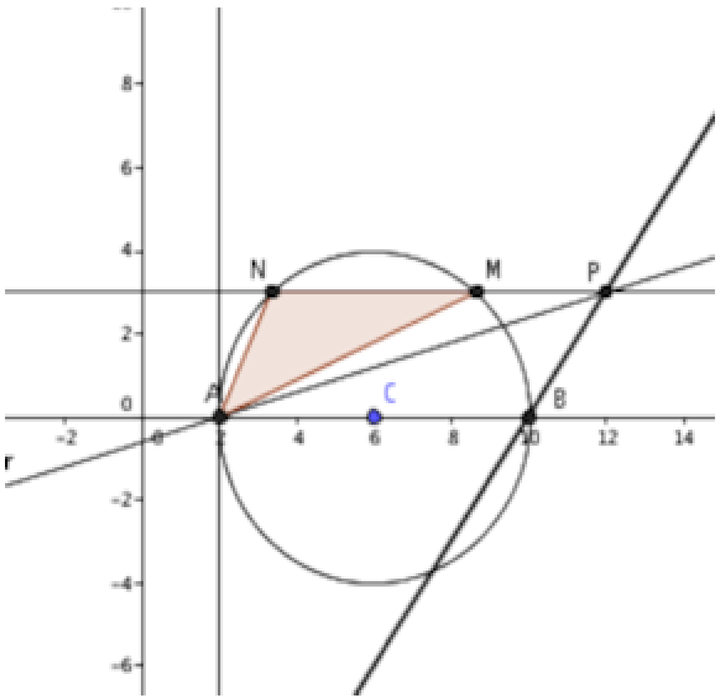
la corda avrà lunghezza

$$MN = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

la differenza tra le due corde è

$$\Delta = \sqrt{58} - 5\sqrt{2} \simeq 0.54$$

Esercizio 70. Scrivere l'equazione della circonferenza di diametro AB. I punti A e B sono le intersezioni tra l'ascissa e le rette $r: 3x - 10y - 6 = 0$ ed $s: 3x - 2y - 30 = 0$. Sia P il punto di intersezione delle due rette. P è interno alla circonferenza? Si conduca da P la perpendicolare alla tangente condotta per A e siano M e N le intersezioni con la circonferenza. Si calcoli la misura dell'area del triangolo MNA.

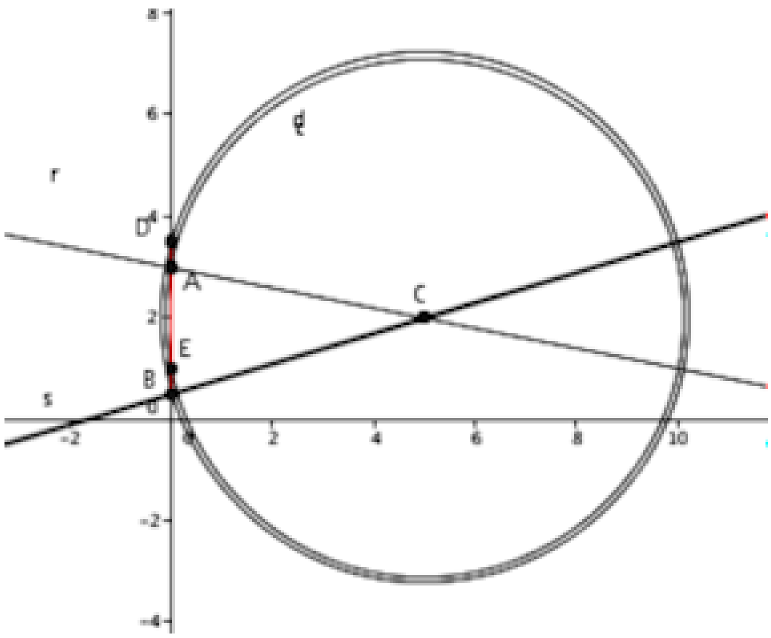


Soluzione:: La figura, costruita con Geogebra, mostra abbastanza chiaramente la decodifica del testo del problema.

(1) troviamo il punto A di ordinata $y = 0$, appartenente alla retta r:
$$3x - 6 = 0 \qquad\qquad x = 2$$
$$A(2;0)$$
(2) troviamo il punto B ancora di ordinata $y = 0$, appartenente alla retta s:
$$-3x + 30 = 0 \qquad\qquad x = 10$$
$$B(10;0)$$
(3) la circonferenza avrà pertanto centro nel punto medio $C\,(6;0)$ e raggio $r = \frac{10-2}{2} = 4$: l'equazione sarà
$$(x-6)^2 + y^2 = 4^2$$
sviluppando, si ottiene
$$x^2 + y^2 - 12x + 20 = 0$$
(4) troviamo il punto P, l'intersezione tra le due rette r, s:
$$\begin{cases} 3x - 10y - 6 & = & 0 \\ 3x - 2y - 30 & = & 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} 8y - 24 & = & 0 \\ 3x - 2y - 30 & = & 0 \end{cases}$$
$$P\,(3;12)$$
(5) la tangente alla circonferenza sarà una retta parallela all'asse y di equazione $y = 2$

(6) la perpendicolare alla tangente passante per P sarà una retta parallela all'asse x di equazione $y = 3$
(7) Le intersezioni della circonferenza con la perpendicolare $y = 3$ saranno
$$x^2 + 9 - 12x + 20 = 0$$
cioè
$$x^2 - 12x + 29 = 0$$
applicando la formula ridotta,
$$\begin{array}{rcl} x_{1,2} & = & 6 \pm \sqrt{36-29} \\ M\left(3; 6-\sqrt{7}\right) & & N\left(3; 6+\sqrt{7}\right) \end{array}$$
(8) Il triangolo AMN avrà la base $MN = 6 + \sqrt{7} - 6 + \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$ e altezza 3; l'area sarà
$$A_{AMN} = \frac{2\sqrt{7} \times 3}{2} = 3\sqrt{7}$$

Esercizio 71. Sono date le rette r e s aventi rispettivamente equazione
$$y = -\frac{1}{5}x + 3 \qquad y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2}$$
Sia C la loro intersezione. Si scrivano le equazioni delle circonferenze con centro in C e passanti rispettivamente per A e B, intersezioni di ciascuna delle rette date con l'asse y. Siano D e E le ulteriori intersezioni di ciascuna delle circonferenze con l'asse delle ordinate. Si determini il rapporto DE/AB.



Soluzione. La figura descrive il problema; vediamo le singole procedure:
(1) intersezione C tra le due rette:
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + 3 \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{2} = -\frac{1}{5}x + 3 \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x = \frac{5}{2} \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2} \end{cases} \quad C \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$
(2) intersezioni delle rette con l'asse y
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{5}x + 3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$
$$A(0;3)$$
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{3}{10}x + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$B\left(0; \frac{1}{2}\right)$$

(3) circonferenza γ di centro C e passante per A; il raggio sarà la distanza

$$AC = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

l'equazione sarà

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 26$$

svolgendo i prodotti notevoli, si ha

$$\gamma: \qquad x^2 + y^2 - 10x - 4y + 3 = 0$$

(4) circonferenza γ' di centro C e passante per B; il raggio sarà la distanza

$$BC = \sqrt{25 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{109}{4}}$$

l'equazione sarà

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 = \frac{109}{4}$$

svolgendo, si ha

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + \frac{7}{4} = 0$$

oppure

$$\gamma^{'}: \qquad 4x^2 + 4y^2 - 40x - 16y + 7 = 0$$

le due circonferenze sono concentriche.

(5) Intersezioni della circonferenza γ con l'asse y

$$\gamma \qquad \begin{cases} x & = & 0 \\ y^2 - 4y + 3 & = & 0 \end{cases}$$

$$A\,(0;3) \qquad E\,(0;1)$$

(6) Intersezioni della circonferenza γ' con l'asse y

$$\gamma' \qquad \begin{cases} x & = & 0 \\ 4y^2 - 16y + 7 & = & 0 \end{cases}$$

risolvendo l'equazione di secondo grado

$$y_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{4} = \frac{7}{2}; \frac{1}{2}$$

per cui

$$D\left(0; \frac{7}{2}\right)$$

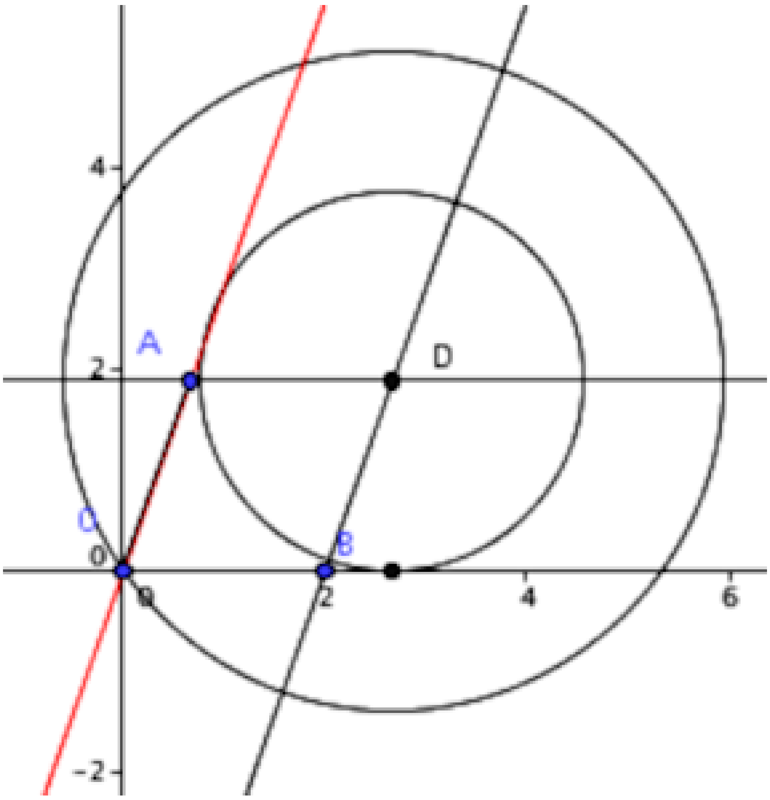
(7) Calcoliamo ora il rapporto tra le due corde

$$\frac{DE}{AB} = \frac{\frac{7}{2}-1}{3-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = 1$$

Esercizio 72. Si consideri la retta di equazione

$$y = 2\sqrt{2}x$$

e su di essa un punto A nel primo quadrante. Sia $B(2;0)$, si scrivano le equazioni dei lati del rombo di vertici AOB, sia D l'ultimo vertice. (O è l'origine degli assi). Si scriva l'equazione della circonferenza con centro in D passante per l'origine e l'equazione della circonferenza ad essa concentrica tangente all'asse delle x. Si calcoli la differenza delle lunghezze delle due circonferenze.



Soluzione. il disegno mostra le caratteristiche del problema; in particolare la scelta del punto è vincolata dal fatto che il lato $AO = OB$, dovendo risultare un rombo (la retta data è colorata in rosso).

(1) Il lato OB del rombo ha una lunghezza pari a 2; anche $AO = 2$. Il punto A appartiene alla retta data e quindi le sue coordinate sono $A\left(x; 2\sqrt{2}x\right)$. Pertanto, attraverso la formula della distanza si ha
$$2 = \sqrt{x^2 + \left(2\sqrt{2}x\right)^2} = 3x$$
il modulo non è necessario, essendo per ipotesi $x_A > 0$
$$x = \frac{2}{3}$$
il punto avrà coordinate $A\left(\frac{2}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$

(2) l'equazione della retta che contiene il lato OB è quella dell'asse x, cioè $y = 0$; l'equazione della retta AO è data $y = 2\sqrt{2}x$; la retta BD è parallela alla retta AO; avrà quindi lo stesso coefficiente angolare: utilizziamo l'equazione delle rette per un punto
$$y - 0 = 2\sqrt{2}\,(x - 2) \quad cio\grave{e} \quad y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$$
la retta per AD è parallela all'asse x e sarà $y = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(3) per trovare le coordinate di D possiamo utilizzare la proprietà del rombo di avere diagonali che si incontrano nel punto medio, oppure, data la semplicità del calcolo, intersecare le due rette che lo hanno in comune
$$\begin{cases} y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ \frac{4\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2} \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x = \frac{16\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \end{cases}$$
razionalizzando
$$D: \begin{cases} y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x = \frac{8}{3} \end{cases}$$

(4) l'equazione della circonferenza di centro D e raggio $DO^2 = \frac{32}{9} + \frac{64}{9} = \frac{32}{3}$, avrà equazione
$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{3}$$

svolgendo

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8\sqrt{2}}{3}y = 0$$

l'altra circonferenza ha centro sempre in D ed è tangente all'asse x, cioè la distanza tra l'asse x e la retta parallela passante per D è la lunghezza del raggio; pertanto il raggio avrà lunghezza pari all'ordinata di D: $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. L'equazione sarà

$$\left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$$

svolgendo

$$x^2 + y^2 - \frac{16}{3}x - \frac{8\sqrt{2}}{3}y + \frac{64}{9} = 0$$

(5) Calcoliamo la lunghezza delle due circonferenze, ricordando la formula $2\pi r$

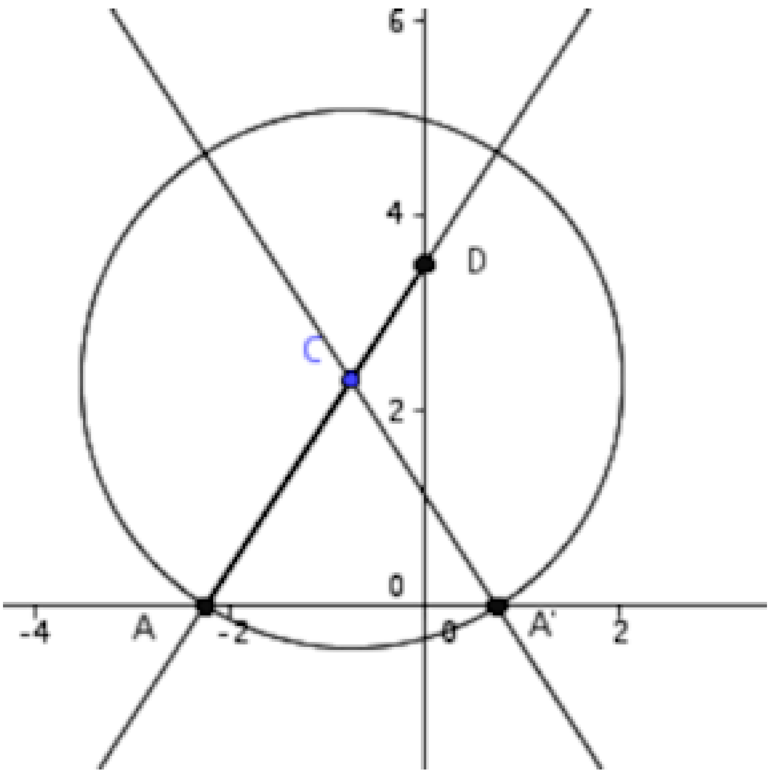
$$\gamma = 2\pi\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8\pi\sqrt{6}}{3} \qquad \gamma' = 2\pi\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$$

$$\gamma - \gamma\ ' = \frac{8\pi\sqrt{2}}{3}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

Esercizio 73. È data la retta di equazione

$$y = \frac{14}{9}x + \frac{7}{2}$$

Siano D ed A i punti in cui interseca rispettivamente l'asse y e l'asse x. Sul segmento AD si prenda un punto C tale che risulti $AC = 2CD$. Si scriva l'equazione della circonferenza di centro C e passante per A. Si calcoli la lunghezza della corda AA' intercettata dalla circonferenza sull'asse delle x. Si scriva l'equazione della retta CA'.



Soluzione. Soluzione: la figura mostra già il caso in cui il punto C verifica la condizione assegnata.

(1) Calcoliamo le intercette della retta assegnata: il punto D avrà ascissa $x = 0$, per cui $D\left(0; \frac{7}{2}\right)$; il punto A avrà ordinata $y = 0$, per cui $A\left(-\frac{9}{4}; 0\right)$

(2) Se $AC = 2CD$ allora $AD = 3CD = \frac{3}{2}AC$. Per trovare le coordinate del punto C possiamo supporre di tracciare la parallela agli assi x e y passanti per C. In tal modo per un teorema della geometria relativa alle rette parallele, anche i segmenti OA e OD vengono divisi nello stesso rapporto, per cui

$$\begin{aligned} x_A : x_C &= 3:1 \\ y_D : y_C &= 3:2 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{3}x_A = -\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{3}{4} \\ y_c &= \frac{2}{3}y_D = \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

(3) La circonferenza di centro $C\left(-\frac{3}{4};\frac{7}{3}\right)$ e passante per A, cioè di raggio $CA = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right)^2 + \left(0-\frac{7}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{277}{36}}$. La sua equazione sarà

$$\gamma : \left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(y-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{277}{36}$$

svolgendo, si ha

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x - \frac{14}{3}y - \frac{27}{16} = 0$$

(4) Le coordinate di $A^{'}$ si ottengono intersecando la circonferenza con l'asse x, cioè con la retta $y = 0$:

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{27}{16} = 0$$

una soluzione è sicuramente $-\frac{9}{4}$ e dalle proprietà delle soluzioni delle equazioni di secondo grado si ottiene

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= -\frac{27}{16} \\ -\frac{9}{4}x_2 &= -\frac{27}{16} \\ x_2 &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Il punto avrà coordinate $A^{'}\left(\frac{3}{4};0\right)$; la corda $AA^{'} = \left|\frac{3}{4}+\frac{9}{4}\right| = 3$

(5) la retta $CA^{'}$ avrà equazione

$$\frac{y-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}} = \frac{x}{\frac{7}{3}}$$

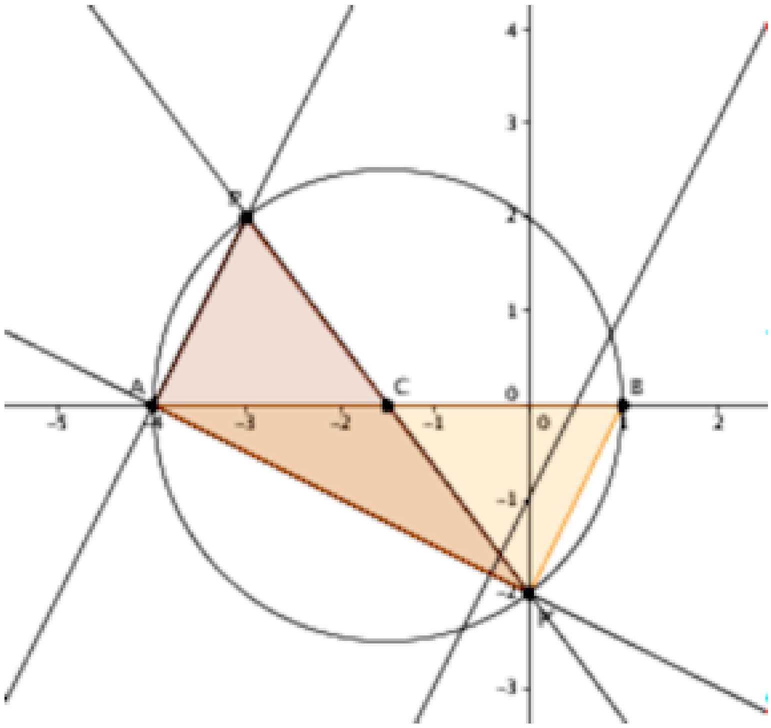
da cui svolgendo

$$y = -\frac{9}{14}x + \frac{3}{4}$$

Esercizio 74. È data la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$$

che interseca nel punto A il semiasse negativo delle ascisse. Scrivere le equazioni della (1) retta passante per A e parallela alla retta di equazione $2x - y - 1 = 0$; (2) della retta passante per A e perpendicolare alla retta di equazione $2x - y - 1 = 0$. Siano P e $P^{'}$ le ulteriori intersezioni con la circonferenza. Scritta l'equazione della retta $PP^{'}$ si provi che essa passa per il centro della circonferenza. Si calcoli infine il rapporto delle aree dei triangoli PAP' e ABP', dove B è l'intersezione di ascissa positiva della circonferenza con l'asse x.



Soluzione. Dall'equazione della circonferenza è possibile ottenere le coordinate del centro $C\left(-\frac{3}{2};0\right)$

$$\begin{aligned} x_C &= -\frac{a}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_C &= 0 \end{aligned}$$

(1) troviamo le coordinate dei punti A e B, mettendo a sistema l'equazione della circonferenza e dell'asse x, $y=0$; si ha

$$x^2+3x-4=0$$

applicando le proprietà delle soluzioni si ottiene

$$\begin{array}{cc} x_1=-4 & x_2=1 \\ A(-4;0) & B(1;0) \end{array}$$

la retta data $2x-y-1=0$ ha coefficiente angolare $m=2$ e la retta passante per A e parallela avrà equazione

$$r: \quad y=2(x+4)=2x+8$$

(2) troviamo l'equazione della retta perpendicolare alla data e passante per A allo stesso modo, sapendo che tale perpendicolare avrà coefficiente angolare $m=-\frac{1}{2}$

$$s \quad y=-\frac{1}{2}(x+4)=$$

(3) troviamo le intersezioni delle due rette con la circonferenza

$$P\begin{cases} x^2+y^2+3x-4 &= 0 \\ y-2x+8 &= 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+4x^2-32x+64+3x-4 &= 0 \\ -2x+8 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} 5x^2-29x+60 &= 0 \\ -2x+8 &= y \end{cases}$$

una soluzione è $x_1=-4$ (ascissa del punto A); l'altra sarà $x_1x_2=12$ $\left(\frac{c}{a}\right)$, da cui $x_2=-3$. Il punto avrà coordinate $P(-3;2)$. La stessa procedura per ricavare P'

$$P\begin{cases} x^2+y^2+3x-4 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+\frac{1}{4}x^2+2x+4+3x-4 &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{4}x^2+5x &= 0 \\ -\frac{1}{2}x-2 &= y \end{cases}$$

da cui si ottengono le soluzioni $x_1=-4$ e $x_2=0$. Il punto avrà coordinate $P^{'}(0;-2)$

(4) calcoliamo l'equazione delle retta passante per $PP^{'}$

$$\frac{y+2}{2+2}=\frac{x}{-3}$$

da cui si ricava

$$4x+3y+6=0$$

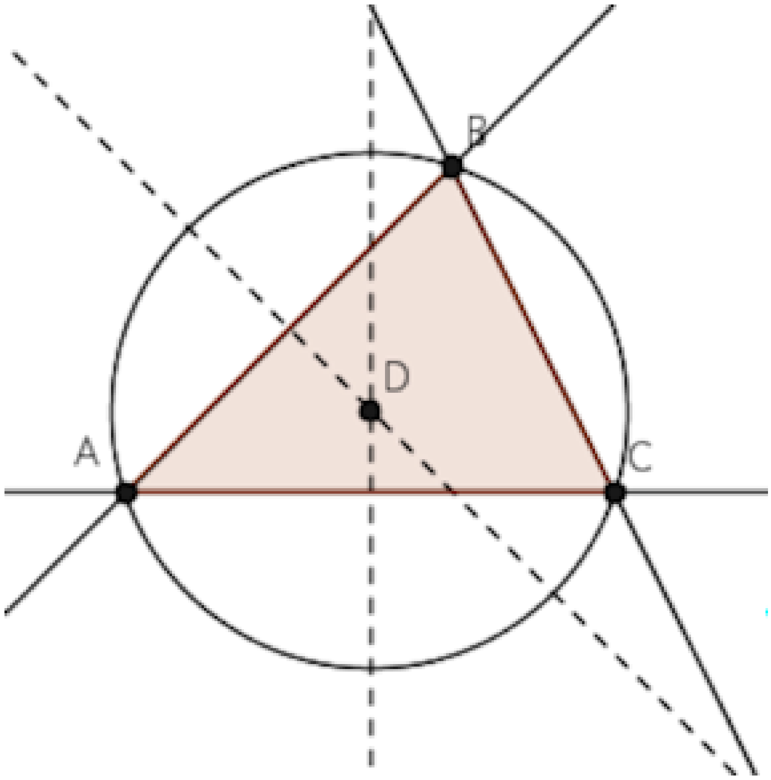
Il centro C della circonferenza appartiene a tale retta, infatti $4\left(-\frac{3}{2}\right)+6=0$ è verificata.

(5) I due triangoli sono entrambi rettangoli essendo inscritti in una semicirconferenza. Avendo $AP^{'}$ in comune e $PP^{'} = AB$, diametri della stessa circonferenza, ed essendo retti i due triangoli risultano congruenti. Il rapporto tra le loro aree è uguale a 1, poiché triangoli congruenti sono anche equivalenti.

Esercizio 75. Un triangolo ha i lati appartenenti alle rette

$$y = x \quad y = 1 \quad y = -2x + 4$$

Scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta al triangolo e determinare le coordinate del circocentro.



Soluzione. la figura mostra le tre rette nel piano cartesiano e le loro intersezioni, evidenziando il triangolo ABC (scala ingrandita)

(1) troviamo le coordinate dei vertici del triangolo, intersecando le rette che li hanno a due a due in comune; il vertice A è determinato dalla intersezione delle rette $y = x$ e $y = 1$, quindi

$$A\,(1;1)$$

il vertice B è l'intersezione tra le rette $y = x$ e $y = -2x + 4$, da cui

$$B\left(\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$$

il vertice C è quello in comune tra le rette $y = -2x + 4$ e $y = 1$, da cui

$$C\left(\frac{3}{2};1\right)$$

(2) troviamo l'equazione della circonferenza passante per i tre punti. Sostituiamo pertanto, nell'equazione generale della circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, le coordinate dei tre punti; otterremo in tal modo un sistema a tre equazioni nelle incognite a, b, c

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1+1+a+b+c & = & 0 \\ \frac{16}{9}+\frac{16}{9}+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c & = & 0 \\ \frac{9}{4}+1+\frac{3}{2}a+b+c & = & 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} a+b+c & = & -2 \\ \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c & = & -\frac{32}{9} \\ \frac{3}{2}a+b+c & = & -\frac{13}{4} \end{array}\right.$$

sostituiamo alla terza equazione la differenza tra la terza e la prima, ricavando in tal modo a

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2}a & = & -\frac{5}{4} \\ \frac{4}{3}a+\frac{4}{3}b+c & = & -\frac{32}{9} \\ a+b+c & = & -2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -\frac{5}{2} \\ \frac{4}{3}b+c & = & -\frac{2}{9} \\ b+c & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

sostituiamo la seconda equazione con la differenza tra la seconda e la terza

$$\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{3}b = -\frac{13}{18} \\ b+c = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = -\frac{13}{6} \\ c = \frac{8}{3} \end{cases}$$

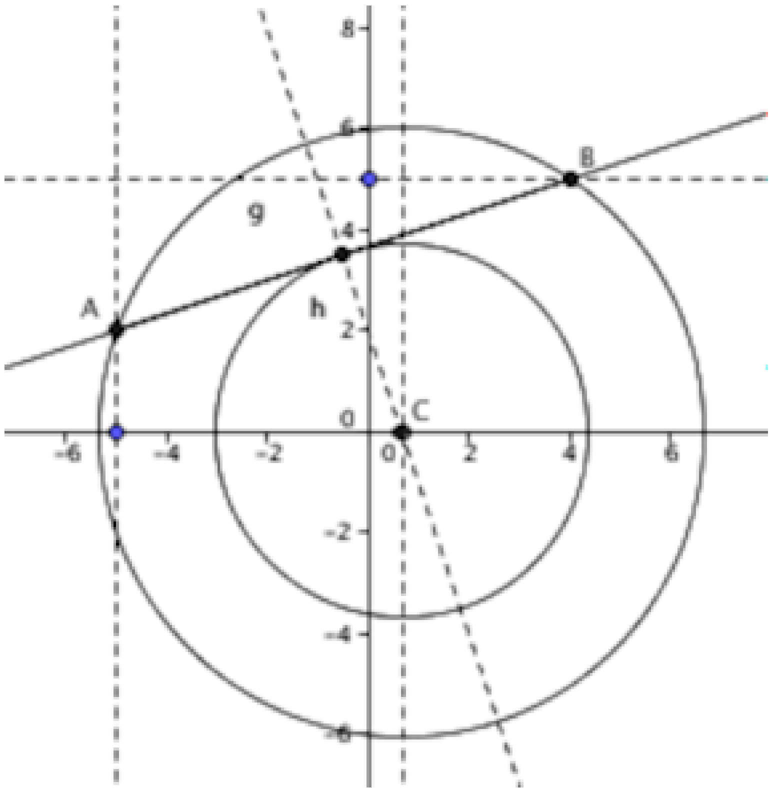
L'equazione della circonferenza è

$$x^2+y^2-\frac{5}{2}x-\frac{13}{6}y+\frac{8}{3}=0$$

(3) Le coordinate del circocentro sono ovviamente quelle del centro della circonferenza circoscritta e sono immediatamente ricavabili dall'equazione della circonferenza

$$\begin{aligned} x_D &= -\frac{a}{2}=\frac{5}{4} \\ y_D &= -\frac{b}{2}=\frac{13}{12} \end{aligned}$$

Esercizio 76. È data la retta AB di equazione $x-3y+11=0$. Si sa che $x_A=-5$ e che $y_B=5$. Scrivere l'equazione della circonferenza che ha AB come corda e centro in un punto C di ascissa $x=\frac{2}{3}$. Scrivere inoltre l'equazione della circonferenza concentrica alla precedente e tangente ad AB.



Soluzione. Soluzione: la figura mostra la retta AB e le due circonferenze; il centro C è ottenuto dall'intersezione tra le retta di ascissa data e l'asse della corda AB.

(1) troviamo le coordinate dei punti A e B. Appartenendo alla retta data, possiamo sostituire al posto di x il valore $x_A=-5$, ottenendo $y=2$; lo stesso con $y_B=5$, da cui $x=15-11=4$. I punti avranno coordinate $A\,(-5;2)$ e $B\,(4;5)$

(2) troviamo le coordinate del centro C della circonferenza avente AB come corda. Sappiamo che $x_C=\frac{2}{3}$ e che quindi appartiene alla retta $x=\frac{2}{3}$; il centro appartiene inoltre all'asse della corda AB, per le proprietà geometriche delle corde. Troviamo il punto medio di AB

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{-5+4}{2}=-\frac{1}{2} \\ M_y &= \frac{5+2}{2}=\frac{7}{2} \end{aligned}$$

il coefficiente angolare della retta per AB è ${}_{AB} = \frac{1}{3}$; il coefficiente angolare dell'asse sarà $m = -3$, essendo perpendicolare alla corda. L'equazione dell'asse si ottiene da

$$\begin{aligned} y - y_M &= -3\,(x - x_M) \\ y - \frac{7}{2} &= -3\left(x + \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

calcolando, si ottiene

$$y = -3x + 2$$

Intersecando ora le due rette alle quali C appartiene si ha

$$C\left(\frac{2}{3}; 0\right)$$

La circonferenza avrò raggio

$$AC = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + 5\right)^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{325}}{3}$$

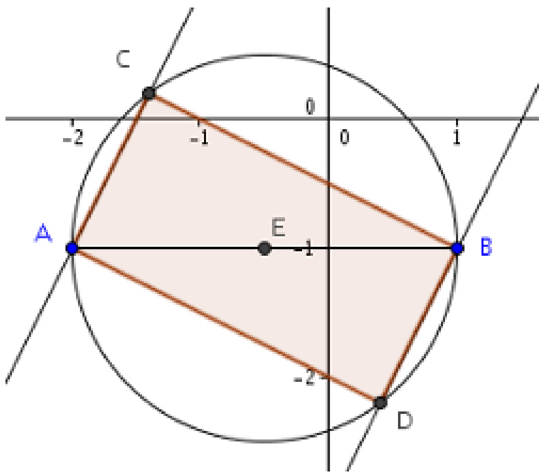
La circonferenza avrà equazione

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{325}{9}$$

(3) La seconda circonferenza ha raggio $CM = \sqrt{\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{245}{18}}$ e avrà equazione

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{245}{18}$$

Esercizio 77. I punti $A(-2; -1)$ e $B(1; -1)$ sono gli estremi di un diametro di una circonferenza di cui si chiede l'equazione. Si provi che la retta $y = 2x + 3$ passa per A. Si conduca ad essa la parallela passante per B. Siano C e D le ulteriori intersezioni di tali retta, considerate nell'ordine, con la circonferenza. Si provi che $ABCD$ è un rettangolo verificando con il calcolo le pendenze delle rette AD e CB. Si calcoli infine la misura del suo perimetro.



Soluzione. La figura mostra la geometria del problema.

(1) Essendo AB un diametro, il suo punto medio è il centro E della circonferenza e la sua semi lunghezza, il raggio:

$$E\left(-\frac{1}{2}; -1\right) \qquad r = \frac{\overline{AB}}{2} = \frac{3}{2}$$

la circonferenza ha equazione

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{4}$$

svolgendo

$$x^2 + y^2 + x + 2y - 1 = 0$$

(2) Se il punto A appartiene alla retta $y = 2x + 3$, allora le sue coordinate verificano tale equazione

$$-1 = -4 + 3 = -1$$

il punto A appartiene pertanto alla retta assegnata

(3) La circonferenza interseca la retta $y = 2x + 3$, oltre che in A anche in

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y - 1 = 0 \\ y = 2x + 3 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 + 12x + 9 + x + 4x + 6 - 1 &= 0 \\ 5x^2 + 17x + 14 &= 0 \end{aligned}$$

il prodotto delle sue soluzioni è $\frac{14}{5}$ e una soluzione è -2, per cui

$$\begin{aligned} -2x_2 &= \frac{14}{5} \\ x_2 &= -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

il punto avrà coordinate $C\left(-\frac{7}{5}; \frac{1}{5}\right)$

(4) Per ricavare le coordinate del punto D è necessario prima calcolare l'equazione della retta parallela a $y = 2x + 3$ e passante per il punto B

$$y + 1 = 2(x - 1)$$

cioè

$$y = 2x - 3$$

Troviamo ora D

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + 2y - 1 = 0 \\ y = 2x - 3 \end{cases}$$

sostituendo

$$\begin{aligned} x^2 + 4x^2 - 12x + 9 + x + 4x - 6 - 1 &= 0 \\ 5x^2 - 7x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

risolvendo, si ha

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{10} = \frac{7 \pm 3}{10} = 1 \, e \, \frac{2}{5}$$

Le coordinate del punto sono $D\left(\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}\right)$

(5) Verifichiamo che il quadrilatero $ABDC$ è un rettangolo. Innanzitutto le rette AC e BD sono parallele per costruzione e hanno coefficiente angolare uguale

$$m_{AB} = m_{CD} = 2$$

troviamo il coefficiente angolare di BC e AD

$$\begin{aligned} m_{BC} &= \frac{-1 - \frac{1}{5}}{1 + \frac{7}{5}} = -\frac{1}{2} \\ m_{AD} &= \frac{-1 + \frac{11}{5}}{-2 - \frac{2}{5}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

le due rette sono parallele e inoltre sono perpendicolare agli altri due lati, poiché il prodotto tra i coefficienti angolari è $2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

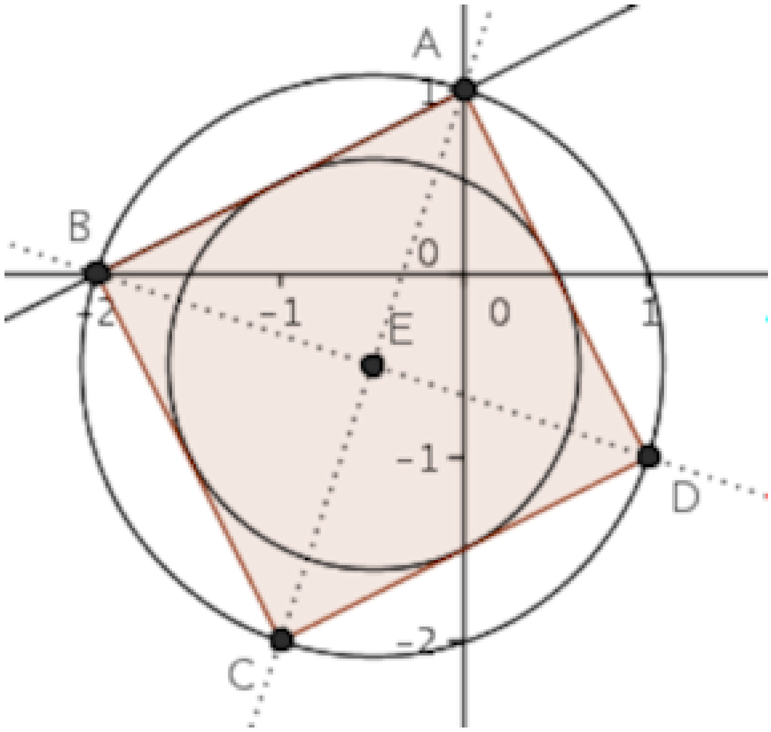
(6) Il perimetro del rettangolo si ottiene calcolando la lunghezza di due lati consecutivi

$$\begin{aligned} AD &= \sqrt{\left(-1 + \frac{11}{5}\right)^2 + \left(-2 - \frac{2}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \\ AC &= \sqrt{\left(-1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(-2 + \frac{7}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

Il perimetro è

$$2p = 2\left(\frac{6\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{18\sqrt{5}}{5}$$

Esercizio 78. È assegnata la retta r di equazione $y = \frac{1}{2}x + 1$. A è il suo punto di ordinata 1 e B l'intersezione con l'asse delle x. Si costruisca il quadrato di lato AB nel semipiano $y < y_r$. Si determinino le equazioni dei lati e le coordinate dei vertici. Si scrivano le equazioni delle circonferenze inscritta e circoscritta.



Soluzione. Il semipiano con $y < y_r$ rappresenta il semipiano al di sotto della retta r. Il centro delle due circonferenze è comune e si trova sull'intersezione delle diagonali del quadrato (come mostrato in figura).

(1) Il punto A rappresenta l'ordinata all'origine della retta r e ha coordinate $A\,(0;2)$; il punto B, intersezione con l'asse x, è un punto ad ordinata nulla; sostituendo pertanto $y = 0$ nell'equazione della retta r, si trova $B(-2;0)$.

(2) Per trovare il quadrato, osserviamo che la retta CD è parallela ad AB e dista da essa $\sqrt{5}$, cioè la lunghezza del lato del quadrato. Tale retta avrà quindi equazione

$$\sqrt{5} = \frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}}$$

svolgendo si ha

$$\begin{aligned} x - 2y + 2 &= 5 \\ x - 2y + 2 &= -5 \end{aligned}$$

dovendo tale retta trovarsi nel semipiano $y < y_r$ consideriamo solo l'equazione

$$\begin{aligned} x - 2y + 2 &= 5 \quad \textit{cioè} \\ CD: \; x - 2y - 3 &= 0 \end{aligned}$$

la retta BC è perpendicolare ad AB, con $m = \frac{1}{2}$, e passante per il punto B, cioè

$$y - 0 = -2\,(x + 2)$$

da cui

$$BC: \; y = -2x - 4$$

la retta AD è parallela a BC e passa per A:

$$y - 1 = -2x$$

cioè

$$AD: \quad y = -2x + 1$$

Per trovare il punto C si può, per esempio, intersecare le rette BC, CD (lo si può calcolare anche imponendo $BC=\sqrt{5}$).

$$\begin{cases} y=-2x-4 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-2x-4 \\ x+4x+8-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \qquad C\,(-1;-2)$$

Analogamente per D:

$$\begin{cases} y=-2x+1 \\ x-2y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-2x+1 \\ x+4x-2-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \quad D\,(1;-1)$$

(3) Troviamo il centro comune alle due circonferenze, calcolando il punto medio della diagonale BD

$$E\left(\frac{-2+1}{2};\frac{0-1}{2}\right) \qquad E\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$$

Il raggio della circonferenza inscritta è la metà del lato del quadrato, cioè $\frac{\sqrt{5}}{2}$. L'equazione della circonferenza inscritta è

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$

cioè

$$x^2+y^2+x+y-\frac{3}{4}=0$$

La circonferenza circoscritta ha raggio uguale alla semi diagonale, cioè $\frac{d}{2}=\frac{l\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{4}$$

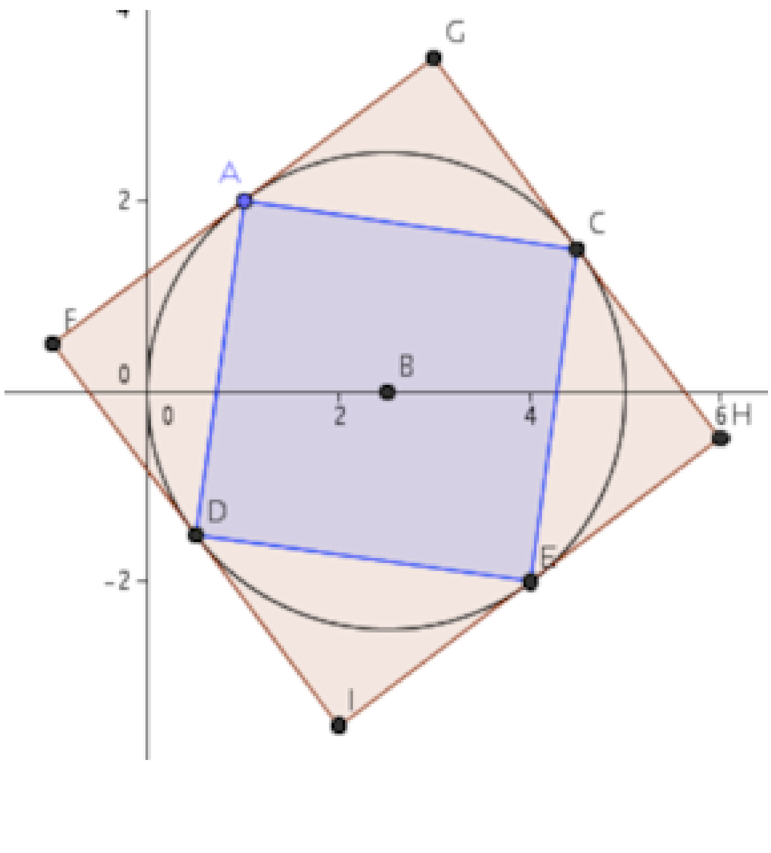
cioè

$$x^2+y^2+x+y-2=0$$

Esercizio 79. È data la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2-5x=0$$

Provare che il punto $A\,(1;2)$ le appartiene. Scrivere le coordinate dei vertici del quadrato inscritto $ACED$ e successivamente le equazioni dei lati del quadrato circoscritto con punti di contatto A, C, E, D



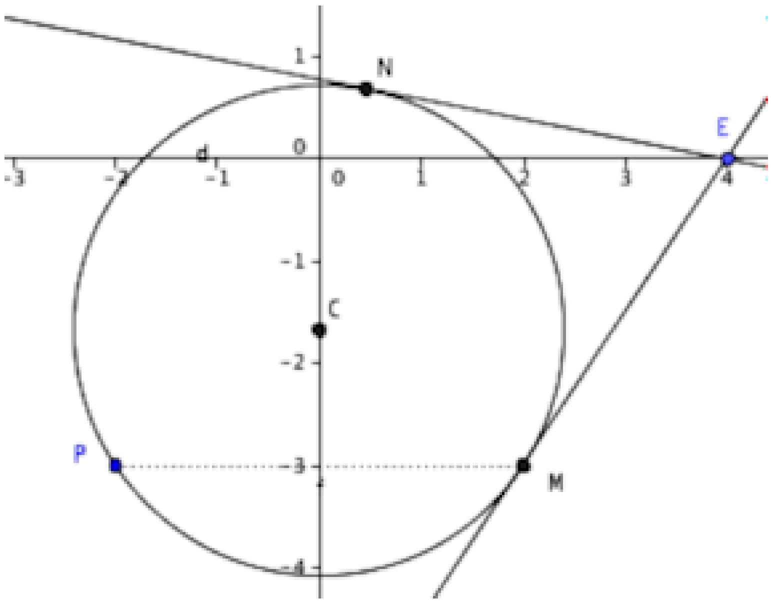
Soluzione. La figura mostra la disposizione dei quadrati determinata dalla posizione del punto A. La circonferenza ha centro $B\left(\frac{5}{2};0\right)$ e raggio $r=\frac{5}{2}$, passando tale circonferenza per l'origine.

(1) Verifichiamo l'appartenenza di A alla circonferenza, sostituendo le sue coordinate nell'equazione della stessa:
$$1^2+2^2-5\cdot 1 = 0$$
il punto A appartiene alla circonferenza.

(2) Troviamo i rimanenti vertici del quadrato. Il centro B è il punto medio di AE, da cui
$$\begin{aligned} E_x &= 2x_B-x_A=5-1=4 \\ E_y &= 2y_B-y_A=0-2=-2 \end{aligned}$$
la diagonale AE è perpendicolare alla diagonale CD ed entrambe si incontrano nel loro punto medio, B. Pertanto, troviamo il coefficiente angolare di AE
$$m_{AE}=\frac{2+2}{1-4}=-\frac{4}{3}$$
la retta CD passante per B, sarà
$$y-0=\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}x-\frac{15}{8}$$
Questa retta interseca la circonferenza in
$$\begin{cases} y=\frac{3}{4}x-\frac{15}{8} \\ x^2+\left(\frac{3}{4}x-\frac{15}{8}\right)^2-5x=0 \end{cases}$$
da cui
$$\begin{gathered} x^2+\frac{9}{16}x^2+\frac{225}{64}-\frac{45}{16}x-5x=0 \\ \frac{25}{16}x^2-\frac{125}{16}x+\frac{225}{64}=0 \end{gathered}$$
risolvendo
$$x_1=\frac{1}{2} \qquad x_2=\frac{9}{2}$$
I rimanenti vertici del quadrato avranno coordinate
$$C\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right) \qquad D\left(\frac{9}{2};\frac{3}{2}\right)$$

(3) Per ottenere le equazioni del quadrato circoscritto, basta osservare che essi sono paralleli alle diagonali del quadrato inscritto. Le rette dei lati FG e HI avranno coefficiente angolare uguale a quello di CD, cioè $\frac{3}{4}$, e quindi
$$\begin{aligned} FG: &\quad y-2=\frac{3}{4}(x-1) \\ FG: &\quad y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{4} \\ \\ HI: &\quad y+2=\frac{3}{4}(x-4) \\ HI &\quad y=\frac{3}{4}x-5 \end{aligned}$$
Le rette dei lati FI e GH hanno coefficiente angolare $m=-\frac{4}{3}$, e quindi
$$\begin{aligned} FI: &\quad y-\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right) \\ FI: &\quad y=-\frac{4}{3}x+\frac{15}{2} \\ \\ GH: &\quad y+\frac{3}{2}=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right) \\ GH: &\quad y=-\frac{4}{3}x-\frac{5}{6} \end{aligned}$$

Esercizio 80. Scrivere l'equazione della circonferenza con centro in $C\left(0;-\frac{5}{3}\right)$ e passante per il punto $P(-2;-3)$. Dal punto $E(4;0)$ si conducano le tangenti alla circonferenza e si verifichi che il punto di tangenza di ordinata negativa è simmetrico di P rispetto all'asse delle ordinate.



Soluzione. Soluzione: due punti si dicono simmetrici rispetto all'asse y se hanno la stessa ordinata e ascissa opposta.

(1) troviamo il raggio della circonferenza

$$CP=\sqrt{2^2+\left(-\frac{5}{3}+3\right)^2}=\sqrt{4+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{52}{9}}$$

L'equazione della circonferenza è

$$x^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$$

svolgendo

$$x^2+y^2+\frac{10}{3}y-3=0$$

(2) Per trovare le coordinate dei punti M,N poniamo a sistema l'equazione della circonferenza con il fascio di rette centrato in E. Il fascio di rette proprio di centro E è

$$y=m(x-4)=mx-4m$$

risolviamo pertanto il sistema

$$\begin{cases} y=mx-4m \\ x^2+m^2x^2-8m^2x+16m^2+\frac{10}{3}mx-\frac{40}{3}m-3=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=mx-4m \\ x^2\left(1+m^2\right)-2mx\left(4m-\frac{5}{3}\right)+16m^2-\frac{40}{3}m-3=0 \end{cases}$$

Affinché le rette del fascio risultino tangenti, è necessario che il discriminante dell'equazione risolvente sia nullo, cioè

$$m^2\left(4m-\frac{5}{3}\right)^2-\left(1+m^2\right)\left(16m^2-\frac{40}{3}m-3\right)=0$$

svolgendo, si ottiene

$$16m^4-\frac{40}{3}m^3+\frac{25}{9}m^2-16m^2+\frac{40}{3}m+3-16m^4+\frac{40}{3}m^3+3m^2=0$$

$$92m^2-120m-27=0$$

le soluzioni sono

$$m_{1,2}=\frac{60\pm\sqrt{3600+2484}}{92}=\frac{60\pm 78}{92}$$

i valori sono

$$m_1=\frac{138}{92}=\frac{3}{2} \qquad m_2=-\frac{9}{46}$$

Le tangenti hanno equazione

$$y=\frac{3}{2}x-6 \qquad y=-\frac{9}{46}x+\frac{18}{23}$$

(3) La retta che interseca la circonferenza nel punto M ha coefficiente angolare positivo e quindi sarà $y=\frac{3}{2}x-6$. Il raggio CM sarà perpendicolare a tale retta e avrà equazione

$$y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$$

Il punto M sarà pertanto l'intersezione delle due rette

$$\begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ y=\frac{3}{2}x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{3}{2}x-6 \end{cases}$$

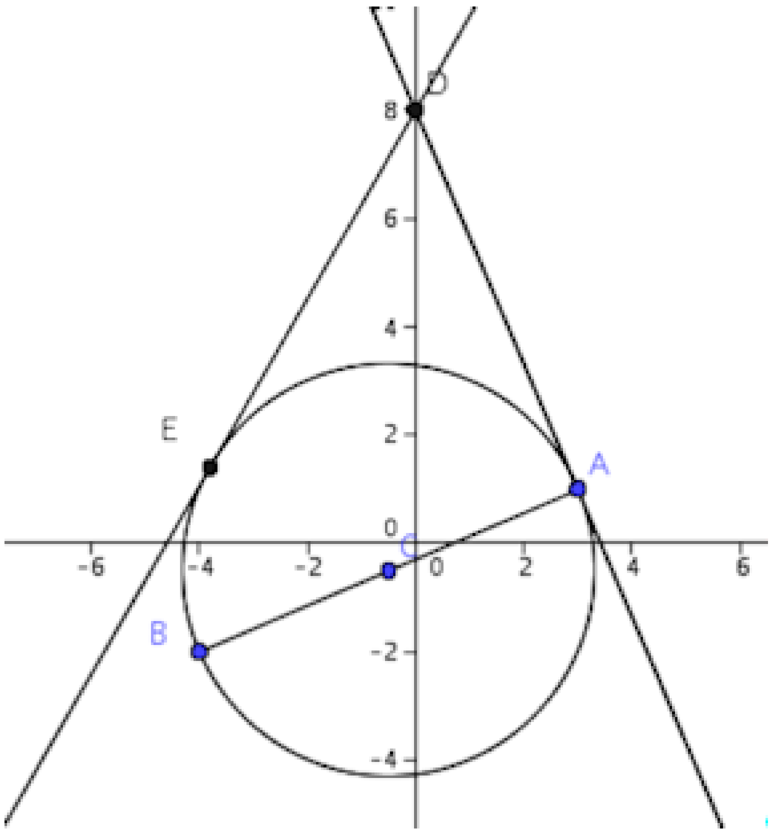
$$\begin{cases} \frac{13}{6}x=\frac{13}{3} \\ y=\frac{3}{2}x-6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

Risulta pertanto verificato che il punto M è simmetrico di P rispetto all'asse y, avendo i due punti uguale ordinata e ascissa opposta.

Esercizio 81. Data la circonferenza di equazione

$$x^2+y^2+x+y-14=0$$

provare che i punti $A\,(3;1)$ e $B\,(-4;-2)$ sono estremi di un diametro. Si scriva l'equazione della tangente in A e si mandi dal punto in cui essa interseca l'asse delle y la ulteriore tangente alla circonferenza.



Soluzione. Ricordando le relazioni che legano i coefficienti dell'equazione alle coordinate del centro ($x_c=-\frac{a}{2}$; $y_c=-\frac{b}{2}$) e al raggio ($r^2=x_c^2+y_c^2-c$), si ha

$$C\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right) \qquad r=\sqrt{\frac{29}{4}}$$

(1) I punti A, B appartengono alla circonferenza

$$9+1+3+1-14=0 \qquad 14-14=0 \quad sì$$
$$16+4-4-2-14=0 \qquad 20-20=0 \quad sì$$

Calcoliamo il punto medio del segmento AB

$$\frac{3-4}{2}=-\frac{1}{2}\qquad\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}$$

proprio le coordinate del centro.

(2) la retta AB ha coefficiente angolare

$$m_{AB}=\frac{1+2}{3+4}=\frac{3}{7}$$

la retta tangente in A avrà quindi $m=-\frac{7}{3}$ e equazione

$$y-1=-\frac{7}{3}(x-3)\qquad y=-\frac{7}{3}x+8$$

Tale retta interseca pertanto l'asse delle y nel punto $D\,(0;8)$

(3) Per calcolare l'equazione della tangente in E, invece del solito sistema, possiamo utilizzare le simmetrie assiali. Il punto E, infatti, è simmetrico di A rispetto alla retta CD, per le proprietà geometriche delle tangenti ad una circonferenza tracciate da un punto esterno. Troviamo l'equazione della retta CD: passando per $D(0;8)$ avrà il parametro $q=8$; il suo $m=\frac{8+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=17$; la retta sarà

$$y=17x+8$$

Ora, la perpendicolare alla retta CD passante per A è

$$\begin{aligned} y-1 &= -\frac{1}{17}(x-3)\\ y &= -\frac{1}{17}x+\frac{20}{17}\end{aligned}$$

tale retta interseca la retta CD nel punto medio del segmento EA. Troviamo questo punto medio

$$\begin{cases} y=17x+8\\ 17x+8=-\frac{1}{17}x+\frac{20}{17}\end{cases}\qquad\begin{cases} y=\frac{6}{5}\\ x=-\frac{116}{290}=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

Dalle formule inverse del punto medio possiamo ricavare E

$$\begin{aligned} E_x &= 2x_M-x_A=-\frac{19}{5}\\ E_y &= 2y_M-y_A=\frac{7}{5}\end{aligned}$$

La tangente cercata è la retta passante per $D(0;8)$, quindi con $q=8$ e di coefficiente angolare $m=\frac{8-\frac{7}{5}}{\frac{19}{5}}=\frac{33}{19}$; la retta avrà pertanto equazione

$$y=\frac{33}{19}x+8$$

CAPITOLO 4

Equazione della Parabola

L'equazione di una parabola con asse di simmetria coincidente con l'asse y e vertice nell'origine ha la forma

$$y = ax^2$$

mentre, l'equazione di una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y e vertice non coincidente con l'origine è del tipo:

$$y = ax^2 + bx + c$$

infatti è possibile individuare una opportuna traslazione che riduce questa seconda equazione nella prima. Le equazioni di questa traslazione sono

$$\begin{cases} X = x + \frac{b}{2a} \\ Y = y + \frac{b^2-4ac}{4a} \end{cases}$$

Il vertice avrà quindi coordinate $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$; il fuoco $F\left(-\frac{b}{2a}; \frac{1-\Delta}{4a}\right)$; la direttrice $y = -\frac{1+\Delta}{4a}$ e l'asse di simmetria $x = -\frac{b}{2a}$.

Esercizio 82. Data la parabola $y = x^2 - 2x + 3$, determinare fuoco, direttrice, vertice e asse di simmetria e rappresentarla graficamente

Soluzione. Esercizio di pura applicazione delle formule appena introdotte, dove $a = 1$, $b = -2$ e $c = 3$. Pertanto

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad y_v = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{4-12}{4} = 2$$

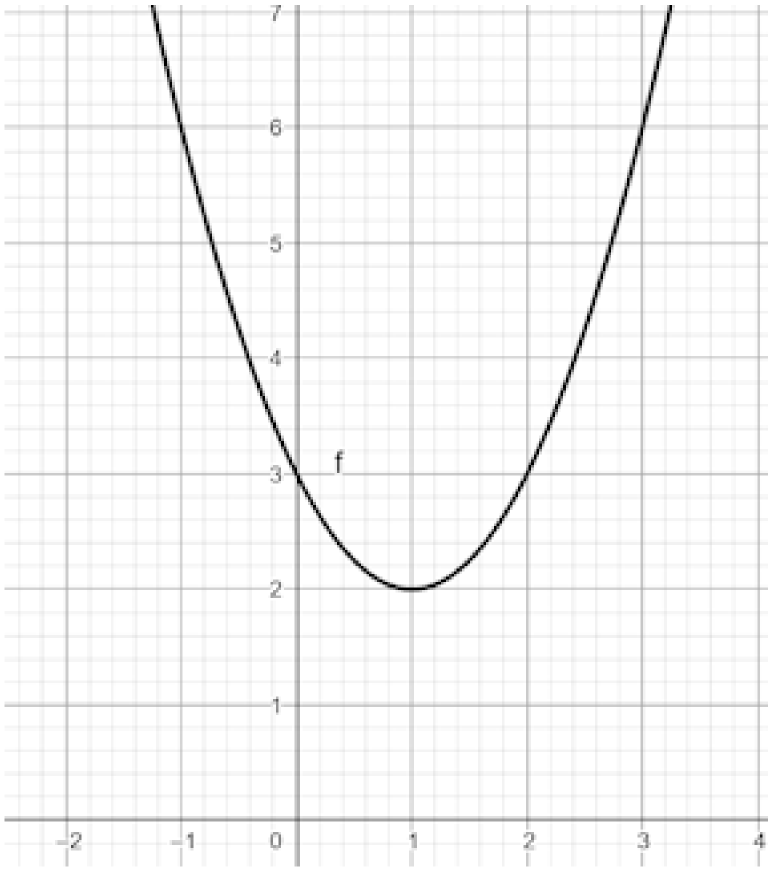
$$x_F = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \quad y_F = \frac{1-b^2+4ac}{4a} = -\frac{1-(4-12)}{4} = \frac{9}{4}$$

$$direttrice: \quad y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a} = -\frac{1+4-12}{4} = \frac{7}{4}$$

$$asse\,di\,simmetria: \qquad x = 1$$

La parabola ha concavità verso l'altro $(a > 0)$; interseca l'asse y nel punto $A(0;3)$ (infatti $c = 3$) e non interseca l'asse x poiché il determinante dell'equazione di secondo associata al secondo membro è negativo

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -8 < 0$$



ESERCIZIO 83. Scrivere l'equazione della parabola avente vertice $V(-1;2)$ e per direttrice la retta $y=3$.

SOLUZIONE. La direttrice è parallela all'asse x, pertanto l'asse di simmetria della parabola sarà parallelo all'asse y e l'equazione generale è del tipo $y=ax^2+bx+c$. Tale equazione ha tre parametri, a,b,c che identificano in modo univoco ogni singola parabola, e quindi, per ricavarli, sono necessarie tre relazioni che li colleghino. Nel nostro caso le tre relazioni sono date dall'ascissa e dall'ordinata del vertice e la terza dall'equazione della direttrice.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=-1 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a}=2 \\ -\frac{1}{4a}-\frac{b^2-4ac}{4a}=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=2a \\ -\frac{4a^2-4ac}{4a}=2 \\ -\frac{1}{4a}+2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-\frac{1}{2} \\ c=a+2=\frac{7}{4} \\ a=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

l'equazione della parabole è

$$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$$

ESERCIZIO 84. Scrivere l'equazione della parabola con asse di simmetria la retta $x=2$ passante per l'origine del piano cartesiano e qui tangente alla bisettrice del I e III quadrante.

SOLUZIONE. La parabola avrà ancora come equazione generale $y=ax^2+bx+c$; la retta tangente ha equazione $y=x$. Passando per l'origine avremo $c=0$. Essendo tangente ricaviamo la condizione, (l'intersezione tra le due curve è caratterizzata da due punti coincidenti, quindi il sistema tra le due equazioni dovrà avere discriminante nullo)

$$\begin{cases} y=ax^2+bx \\ y=x \end{cases}$$

da cui

$$ax^2+(b-1)x=0$$

il discriminante è nullo se $b-1=0$, che dà $b=1$ che utilizziamo come terza condizione

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a}=-2 \\ c=0 \\ b=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

l'equazione è

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 1$$

Esercizio 85. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y avente vertice $V(2,1)$ e passante per il punto $P(4;3)$.

Soluzione. Anche in questo caso possiamo ricavare dal testo tre condizioni che ci consentono di ottenere i tre parametri dell'equazione. Due sono contenute nelle coordinate del vertice, la terza nell'appartenenza di un punto alla curva. Ciò implica che le coordinate di questo punto siano soluzioni dell'equazione e quindi se le sostituisco alle due incognite, l'uguaglianza è verificata.

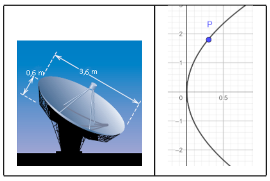
$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} = 1 \\ 3 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ -\frac{16a^2-4ac}{4a} = 1 \\ 3 = 16a - 16a + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4a \\ c - 4a = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

e l'equazione è

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$$

Esercizio 86. L'interno di un'antenna TV satellitare è una parabola avente la forma di un paraboloide (finito) che ha un diametro di $3,6\,m$ ed è profondo $0,6\,m$, come mostrato nella figura di sx. Trova la distanza dal centro del piatto al fuoco.



Soluzione. La parabola generatrice è tracciata su un piano xy nella figura di dx, dove si è posto il vertice della parabola nell'origine e il suo asse lungo l'asse x. In un caso simile l'equazione della parabola è $x = \frac{1}{4p}y^2$, dove p è la richiesta distanza dal centro della parabola al fuoco. Un punto della parabola ha coordinate $(0,3;1,8)$, per cui

$$0,3 = \frac{1}{4p}1,8^2 \quad 1,2p = 3,24 \quad p = 2,7$$

Esercizio 87. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse y passante per i tre punti $A(0;2)$, $B(1;5)$, $C(-1;1)$.

Soluzione. L'equazione della parabola si ricava risolvendo il sistema lineare

$$\begin{matrix} per\,A \\ per\,B \\ per\,C \end{matrix} \quad \begin{cases} 2 = 0 + 0 + c \\ 5 = a + b + c \\ 1 = a - b + c \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 3 \\ a - b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

applichiamo il metodo di combinazione lineare sostituendo la seconda equazione con la somma delle prime due, avremo

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ a + b = 3 \\ c = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

l'equazione sarà

$$y = x^2 + 2x + 2$$

Esercizio 88. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x passante per i tre punti $A(0;0)$, $B(1;2)$, $C(-2;3)$.

Soluzione. In questo caso, essendo l'asse di simmetria parallelo all'asse x, l'equazione generale è $x = ay^2 + by + c$. La modalità risolutiva è tecnicamente la stessa.

$$\begin{array}{l} per\,A \\ per\,B \\ per\,C \end{array} \quad \begin{cases} 0 = 0 + 0 + c \\ 1 = 4a + 2b + c \\ -2 = 9a + 3b + c \end{cases} \quad \begin{cases} 4a + 2b = 1 \\ 9a + 3b = -2 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{2} - 2a \\ 9a + \frac{3}{2} - 6a = -2 \\ c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{7}{6} \\ b = \frac{17}{6} \\ c = 0 \end{cases}$$

l'equazione è

$$x = -\frac{7}{6}y^2 + \frac{17}{6}y$$

Esercizio 89. Determina l'equazione della parabola con asse di simmetria parallelo all'asse x avente vertice $V(1,3)$ e passante per il punto $P(2;4)$.

Soluzione. Anche in questo caso possiamo ricavare dal testo tre condizioni che ci consentono di ottenere i tre parametri dell'equazione. Due sono contenute nelle coordinate del vertice $\left(-\frac{\Delta}{4a}; -\frac{b}{2a}\right)$, la terza nell'appartenenza di un punto alla curva. Ciò implica che le coordinate di questo punto siano soluzioni dell'equazione e quindi se le sostituisco alle due incognite, l'uguaglianza è verificata.

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ -\frac{b^2-4ac}{4a} = 1 \\ 2 = 16a + 4b + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6a \\ -\frac{36a^2-4ac}{4a} = 1 \\ 2 = 16a - 24a + c \end{cases} \quad \begin{cases} b = -6a \\ c = 1 + 9a \\ c = 2 + 8a \end{cases}$$

sottraendo la seconda con la terza equazione

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 10 \end{cases}$$

e l'equazione è

$$x = y^2 - 6y + 10$$

Esercizio 90. Dire se per la parabola di equazione $y = x^2 + x + 1$, la retta di equazione $y = -x + \frac{3}{2}$ è tangente, secante o esterna,

Soluzione. Se osserviamo che la relazione tra le due curve si distingue, come per il cerchio, in base al numero di intersezioni e che le intersezioni corrispondono alle soluzioni del sistema tra le due equazioni, avremo che se l'equazione risolvente del sistema (cioè quando si riduce a una sola incognita) ammette due soluzioni reali e distinte le intersezioni saranno due (retta secante), se si hanno due soluzioni reali e uguali le intersezioni sono due punti coincidenti (retta tangente) e, infine, se non vi sono soluzioni reali la retta sarà esterna. Non ci serve in questo caso conoscere le intersezioni, ma solo il loro numero e quindi basterà, per ottenere tale informazione, calcolare il discriminante dell'equazione risolvente; infatti si ricorderà che se 1°) $\Delta > 0$ si hanno due soluzioni reali e distinte, se 2°) $\Delta = 0$ due soluzioni reali e coincidenti e 3°) $\Delta < 0$ nessuna soluzione reali.

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1 \\ y = -x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

l'equazione risolvente è, applicando la proprietà transitiva dell'uguaglianza

$$x^2 + x + 1 = -x + \frac{3}{2}$$

da cui

$$x^2 + 2x - \frac{1}{2} = 0$$

il discriminante è

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 2 > 0$$

per cui la retta sarà secante.

Esercizio 91. Dopo aver verificato l'appartenenza del punto $P(0;-2)$ alla parabola di equazione $y = x^2 - 2x - 2$, determina l'equazione della retta tangente alla parabola e passante per P.

Soluzione. Il punto P appartiene alla parabola? Ricordiamo che un punto appartiene al grafico di una parabola se le sue coordinate verificano l'equazione della stessa; sostituiamo $x = 0$ e $y = -2$

$$-2 = 0 + 0 - 2$$

il punto P appartiene alla parabola assegnata.

La tangente a una curva è la retta che interseca la curva in un solo punto; questa proprietà geometrica si traduce analiticamente nel determinare il discriminante dell'equazione risolvente il sistema tra le due equazioni e porlo uguale a zero, perché questa è la condizione per la quale un'equazione di 2° grado ammette due soluzioni reali e coincidenti (un punto della retta coincide con un punto della parabola: *condizione di tangenza*). La retta tangente apparterrà al fascio di rette proprio avente come centro il punto P; tale equazione avrà la forma

$$y - y_P = m\,(x - x_p)$$

e, nel nostro caso $y + 2 = mx$. Si tratta quindi di individuare il coefficiente angolare della retta tangente.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x - 2 \\ y = mx - 2 \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$x^2 - 2x - 2 = mx - 2 \quad x^2 - (m+2)\,x = 0$$

il discriminante di questa equazione è uguale a zero se

$$(m+2)^2 - 0 = 0$$

cioè $m = 2$. Pertanto, l'equazione della tangente sarà $y = -2x - 2$, o in forma implicita $2x + y + 2 = 0$

Esercizio 92. Dopo aver verificato la non appartenenza del punto $P\,(0; -14)$ alla parabola di equazione $y = 3x^2 - 2x - 2$, determina l'equazione della retta tangente alla parabola e passante per P.

Soluzione. Verifica $-14 = 0 + 0 - 2$; il punto P non appartiene alla parabola. In tal caso vi saranno due rette tangenti alla parabole uscenti dal punto P. Le rette tangenti appartenenti al fascio centrato in P avranno equazione $y + 14 = mx$

$$\begin{cases} y = 3x^2 - 2x - 2 \\ y = mx - 14 \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$3x^2 - 2x - 2 = mx - 14 \quad 3x^2 - (m+2)\,x + 12 = 0$$

il discriminante sarà uguale a zero se

$$\Delta = \quad (m+2)^2 - 144 = 0 \quad m^2 + 4m - 140 = 0$$

$$m = -2 \pm \sqrt{4 + 140} = -2 \pm 12$$

le equazioni delle tangenti saranno

$$y_1 = -14 - 14 \qquad y_2 = 10x - 14$$

Esercizio 93. Determina la retta tangente alla parabola di equazione $y = -x^2 + 3x$ e parallela alla retta di equazione $y = -3x$. Determina poi le coordinate del punto di contatto.

Soluzione. Dalla condizione di parallelismo tra la retta tangente e la retta $y = -3x$ otteniamo che anche la tangente ha coefficiente angolare $m_{tg} = -3$. La sua equazione sarà quindi del tipo $y = -3x + q$. Pertanto

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = -3x + q \end{cases} \quad \begin{cases} -x^2 + 3x + 3x - q = 0 \\ y = -3x + q \end{cases}$$

imponiamo la condizione di tangenza all'equazione risolvente $(\Delta = 0)$

$$\frac{\Delta}{4} = 9 - q \qquad q = 9$$

la tangente avrà per equazione $y = -3x + 9$ e l'equazione risolvente diviene $x^2 - 6x + 9 = 0$, cioè $(x-3)^2 = 0$ per cui il punto di contatto sarà $P\,(3; 0)$.

Esercizio 94. Determina l'equazione della parabola che ha come asse di simmetria la retta $x = 3$, che passa per il punto $P\,(1; 6)$ e tale che la corda intercettata dalla parabola sull'asse x sia lunga 2.

SOLUZIONE. La parabola ha un'equazione della forma $y = ax^2 + bx + c$, avendo l'asse di simmetria parallelo all'asse y. Applichiamo le prime due condizioni

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 3 \\ 6 = a + b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -6a \\ 6 = c - 5a \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -6a \\ c = 6 + 5a \end{cases}$$

l'equazione con il solo parametro a sarà quindi $y = ax^2 - 6ax + 6 + 5a$. Troviamo le sue intersezioni con l'asse x.

$$\begin{cases} y = ax^2 - 6ax + 6 + 5a \\ y = 0 \end{cases}$$

avremo

$$ax^2 - 6ax + 6 + 5a = 0 \qquad x = \frac{3a \pm \sqrt{4a^2 - 6a}}{a}$$

la lunghezza della corda, segmento orizzontale lungo l'asse x, sarà

$$\left| \frac{\cancel{3a} + \sqrt{4a^2 - 6a} - \cancel{3a} + \sqrt{4a^2 - 6a}}{a} \right| = 2$$

$$2 \left| \frac{\sqrt{4a^2 - 6a}}{a} \right| = 2$$

cioè, elevando al quadrato

$$\frac{4a^2 - 6a}{a^2} = 1 \qquad 3a^2 - 6a = 0$$

le soluzioni per a sono $a = 0$ e $a = 2$. Nel caso in cui $a = 0$, la parabola degenera in una retta, per cui consideriamo solo il caso $a = 2$ e la parabola cercata ha equazione

$$y = 2x^2 - 12x + 16$$

ESERCIZIO 95. Determina se esistono le intersezioni della seguente coppia di parabole di equazione $y = x^2 - 2x$ e $y = 2x^2 - 3x$.

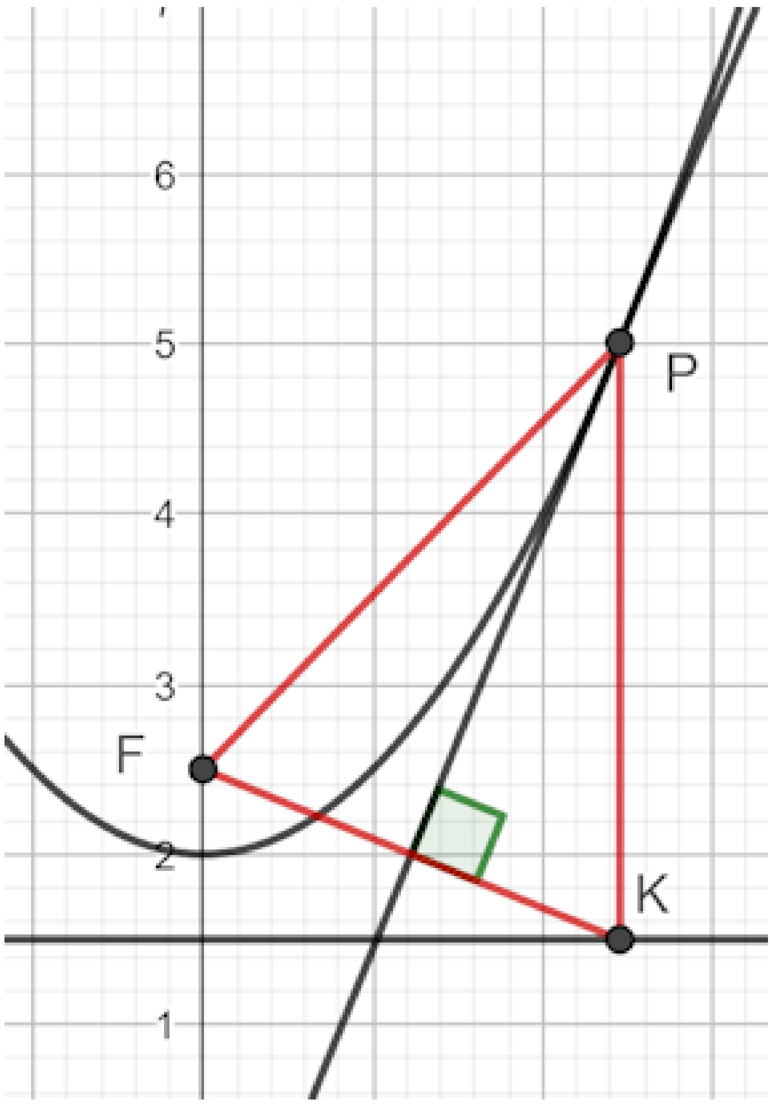
SOLUZIONE. In questo caso, la risposta dal punto di vista analitico è data dal sistema tra le due equazioni. (Si può verificare la correttezza del calcolo, rappresentando graficamente le due parabole)

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x^2 - 3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 2x = 2x^2 - 3x \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ - - - - - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 96. Dimostrare analiticamente che la tangente a una parabola in un suo punto P è l'asse del segmento FK, dove F è il fuoco e K la proiezione ortogonale di P sulla direttrice.

SOLUZIONE. Mostriamo graficamente questa proprietà.



Dal punto di vista analitico, si tratta di mostrare che i coefficienti angolari della retta tangente e di contenente il segmento FK hanno il coefficiente angolare antireciproco. Per la definizione di parabola come luogo geometrico (luogo dei punti equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta, detta direttrice; ne segue che $PF = PK$, il triangolo FPK è isoscele e, quindi, se la tangente è altezza di FK è anche la sua mediana.

Richiamiamo le relazioni che esprimono le coordinate dei punti in questione e l'equazione della direttrice.

$$P\left(x_p; y_p\right) \quad F\left(-\tfrac{b}{2a}; \tfrac{1-\Delta}{4a}\right) \quad K\left(x_p; -\tfrac{1+\Delta}{4a}\right)$$

Troviamo le generiche equazioni delle tangenti in un punto

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y - y_p = m\left(x - x_p\right) \end{cases}$$

l'equazione risolvente è

$$ax^2 + bx + c = y_p + mx - mx_p \qquad ax^2 + x\left(b - m\right) + c - y_p + mx_p$$

applichiamo la condizione di tangenza

$$\Delta = \left(b - m\right)^2 - 4ac + 4ay_p - 4amx_p = 0$$

risolviamo rispetto a m e, con un poco di calcolo algebrico, otteniamo

$$m^2 - 2m\left(2ax_p + b\right) + b^2 - 4ac + 4ay_p = 0$$

risolvendo avremo

$$m = \left(2ax_p + b\right) \pm \sqrt{4a^2x_P^2 + \cancel{b^2} + 4abx_P - \cancel{b^2} + 4ac - 4ay_P}$$

$$m = \left(2ax_p + b\right) \pm 2\sqrt{a^2x_P^2 + abx_P + ac - ay_P} =$$

ma appartenendo il punto P alla parabola, possiamo scrivere $y_p = ax_P^2 + bx_P + c$

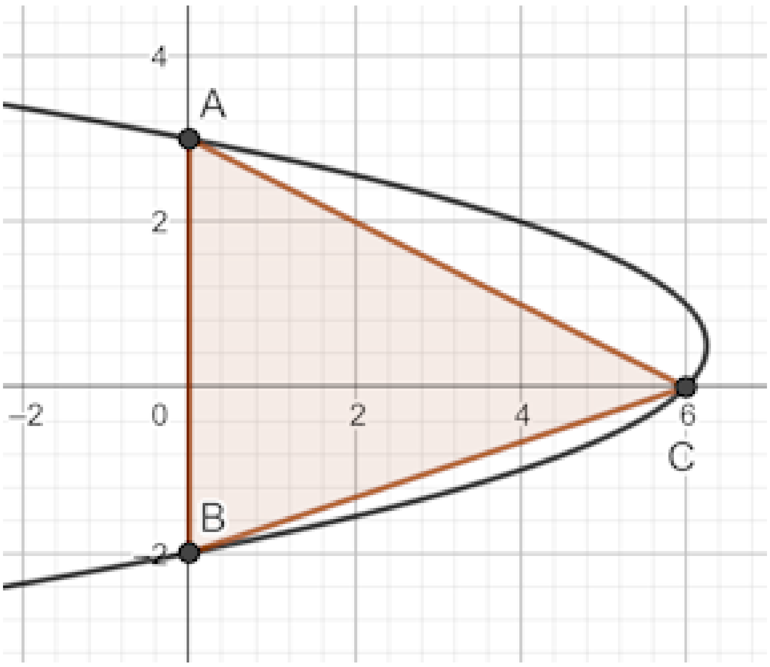
$$m = \left(2ax_p + b\right) \pm 2\sqrt{a^2x_P^2 + ax_pb - a^2x_P^2 - abx_P \cancel{-c}} = 2ax_p + b$$

Troviamo ora il coefficiente angolare della retta FK

$$m_{FK}=\frac{\frac{1-\Delta+1+\Delta}{4a}}{-x_p-\frac{b}{2a}}=\frac{\frac{1}{2a}}{\frac{-(2ax_P+b)}{2a}}=-\frac{1}{2ax_P+b}$$

I due coefficienti risultano effettivamente tra loro antireciproci.

Esercizio 97. Data la parabola $x=-y^2+y+6$, siano A e B i punti di intersezione de suo grafico con l'asse y e C il suo punto di intersezione con l'asse x, Determinare l'area del triangolo ABC.



Soluzione. Determiniamo le intersezioni con l'asse y

$$\begin{cases} x=-y^2+y+6 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} -y^2+y+6=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=3 \\ x_1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_2=-2 \\ x_2=0 \end{cases}$$

troviamo ora l'intersezione con l'asse x

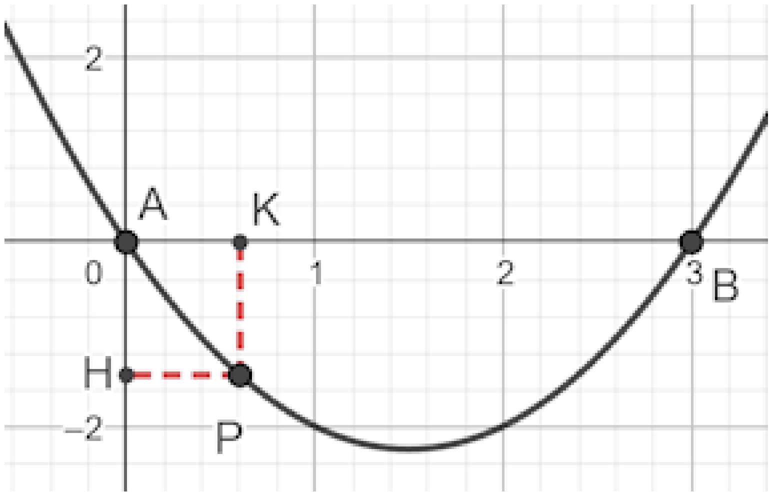
$$\begin{cases} x=-y^2+y+6 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=0 \end{cases}$$

I tre punti avranno coordinate $A\,(0;3)$, $B\,(0;-2)$, $C\,(6;0)$

(Tralasciamo il calcolo delle lunghezze dei segmenti, perché è immediato essendo i segmenti sugli assi cartesiani)

$$A=\frac{AB\times CH}{2}=\frac{5\times 6}{2}=15$$

Esercizio 98. Siano A e B i punti di intersezione della parabola $y=x^2-3x$ con gli assi cartesiani. Determina il punto P, appartenente all'arco AB, tale che la somma delle sue distanze dagli assi sia 2.



Soluzione. Le coordinate del vertice sono $V\left(\frac{3}{2};-\frac{9}{4}\right)$. I punti di intersezione con gli assi sono

$$\begin{cases} y=x^2-3x \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

prendiamo a caso il punto P appartenente all'arco AB, le sue coordinate saranno $P\left(x,x^2-3x\right)$ con $0<x<3$ e $-\frac{9}{4}<y<0$. Ora, le distanze di P dagli assi non sono altro che i moduli delle sue coordinate, avremo

$$\left|x^2-3x\right|+|x|=2$$

ma l'ordinata di P è negativa, mentre l'ascissa è positiva, per cui

$$-x^2+3x+x=2$$

cioè

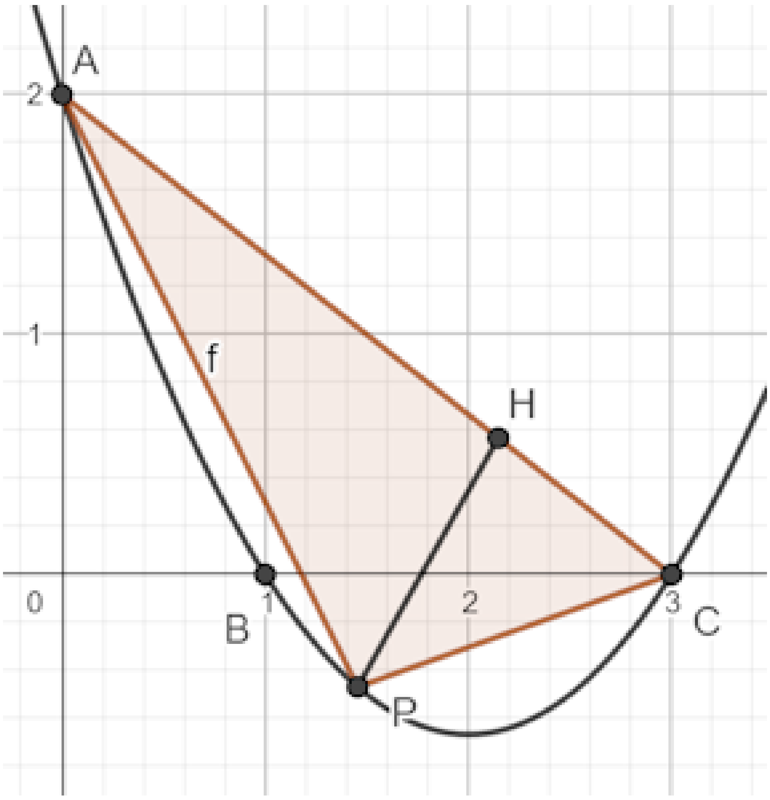
$$x^2-4x+2=0$$

risolvendo

$$x=2\pm\sqrt{2}$$

ma $x+2\sqrt{2}>3$, per cui non è accettabile. Il punto P pertanto avrà coordinate $P\left(2-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

Esercizio 99. È data la parabola $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+2$; sia A il punto di intersezione con l'asse y e B,C (con $<x_C$) i punti di intersezione con l'asse x. Trovare un punto P sulla parabola che formi con A e C un triangolo di area 2.



Soluzione. Troviamo l'intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \qquad A \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

troviamo le intersezioni con l'asse x

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

risolvendo si ottiene

$$B \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad C \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Per calcolare l'area determiniamo la lunghezza della base AC e l'altezza ad essa relativa tramite la formula della distanza di un punto da una retta. La lunghezza del segmento AC vale

$$AC = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

troviamo il coefficiente angolare della retta AC:

$$m_{AC} = -\frac{2}{3}$$

la retta avrà pertanto equazione $y - 0 = -\frac{2}{3}(x-3)$, cioè $2x + 3y - 6 = 0$; troviamo ora l'altezza PH assegnando al punto P le coordinate (x_P, y_P)

$$PH = \frac{|2x_P + 3y_P - 6|}{\sqrt{13}}$$

ma $y_P = \frac{2}{3}x_P^2 - \frac{8}{3}x_P + 2$ per cui

$$PH = \frac{\left|2x_P + 2x_P^2 - 8x_P \cancel{+6-6}\right|}{\sqrt{13}}$$

L'area sarà quindi

$$2 = \frac{\sqrt{13}}{2} \times \frac{\left|-6x_P + 2x_P^2\right|}{\sqrt{13}}$$

da cui

$$2\left|x_P^2 - 3x_P\right| = 4$$

e dopo aver diviso per 2, si ha

$$x_P^2 - 3x_P = \pm 2$$

cioè per $x_P^2 - 3x_P + 2 = 0$, si ha $x_P = 2$, $x_P = 1$; per $x_P^2 - 3x_P - 2 = 0$, si ha $x_P = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

Esercizio 100. Determina ciascuna delle due parabole che hanno asse parallelo all'asse y, passano per $A\,(0;2)$ e per $B\,(-2;-4)$ e sono tangenti alla retta di pendenza -1 e intercetta 3.

Soluzione. Troviamo prima la retta tangente traducendo le informazioni date

$$\textit{pendenza}:\ m=-1 \qquad \textit{intercetta}:\ q=3 \qquad y=-x+3$$

Per semplificare il nostro calcolo troviamo prima l'equazione delle parabole in funzione di un solo parametro imponendo il passaggio per i due punti assegnati

$$\begin{array}{l} \textit{per }A \\ \textit{per }B \end{array} \begin{cases} c=2 \\ -4=4a-2b+c \end{cases} \qquad \begin{cases} c=2 \\ 4-2b+6=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c=2 \\ b=2a+3 \end{cases}$$

l'equazione della parabola sarà allora $y=ax^2+(2a+3)\,x+2$. Studiamo ora la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y=ax^2+(2a+3)\,x+2 \\ y=-x+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2+2\,(a+2)\,x-1=0 \\ y=-x+3 \end{cases}$$

imponiamo che il discriminante sia nullo

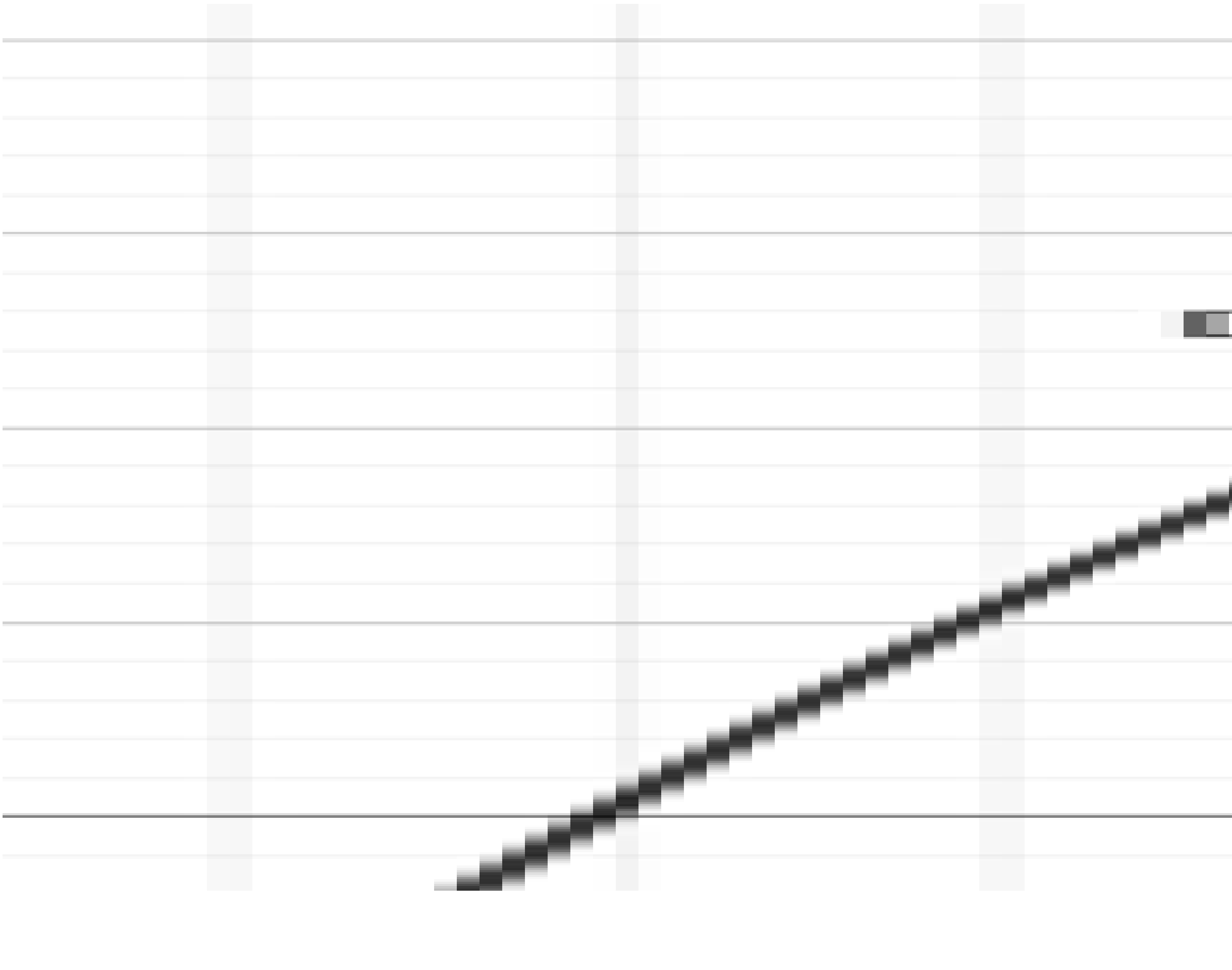
$$\frac{\Delta}{4}=(a+2)^2+a=0 \quad a^2+5a+4=0$$

le soluzioni sono $a=-4$ e $a=-1$; avremo quindi

$$\begin{cases} a=-4 \\ b=-5 \\ c=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

e le parabole avranno equazione $y=-4x^2-5x+2$ e $y=-x^2+x+2$

Esercizio 101. Considera la regione finita di piano compresa tra la parabola $y=-x^2+8$ e l'asse x. Si può inscrivere in essa un rettangolo di area 14? Se sì, stabilisci se la soluzione è unica e determina i vertici del rettangolo. Altrimenti spiega perché non lo è.



SOLUZIONE. La parabola interseca l'asse x nei punti per cui $x^2 = 8$, cioè $x = \pm 2\sqrt{2}$; Sia A un vertice del rettangolo le cui coordinate si possono esprimere come $A\left(x; -x^2+8\right)$. Il punto D è il simmetrico di A rispetto all'asse y e quindi $D\left(-x; -x^2+8\right)$. Il segmento $AD = |2x|$ mentre il segmento $AB = \left|-x^8+8\right|$. L'area del rettangolo (entrambi i segmenti sono positivi) è

$$A = 2x\left(-x^2+8\right) = 14$$

da cui, dividendo tutto per 2,

$$-x^3+8x-7=0$$

Si può facilmente osservare che il polinomio in x si annulla per $x=1$ e applicando la regola di Ruffini possiamo ricavare il secondo fattore. L'equazione di terzo grado si riduce così a

$$(x-1)\left(x^2+x-7\right)=0$$

le soluzioni $x=1$, $x=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}$ e $x=\frac{-1+\sqrt{29}}{2}$. Ma $x=\frac{-1-\sqrt{29}}{2}<-2\sqrt{2}$ e non è pertanto accettabile.

I vertici del rettangolo sono nei due casi

$$\begin{array}{cccc} A_1\,(1;7) & B_1\,(1;0) & C_1\,(-1;0) & D_1\,(-1;7) \\ A_2\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) & B_2\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2};0\right) & C_2\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};0\right) & D_2\left(\frac{1-\sqrt{29}}{2};\frac{1+\sqrt{29}}{2}\right) \end{array}$$

ESERCIZIO 102. Un corpo viene lanciato dall'altezza di $50\,m$ da terra con una velocità iniziale di $45\,\frac{m}{s}$ che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. Rispondi ai seguenti quesiti:

SOLUZIONE. 1) trova le equazioni parametriche del moto. Basta ricordare un poco di fisica. Il moto parabolico di un "proiettile"è un moto piano e lo si studia scomponendolo nelle sue componenti orizzontale e verticale. Il moto orizzontale è descrivibile come un moto rettilineo uniforme non essendo sottoposto, dopo il lancio, ad alcuna forza esterna orizzontale; calcoliamo la componente orizzontale della velocità orizzontale $v_x = v_0\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ricordando le proprietà dei triangoli con gli angoli di 30, 60, 90 gradi, che sono la metà di triangoli equilateri)

$$x = v_x t = \frac{45\sqrt{3}}{2}t$$

il moto verticale è descritto come un moto uniformemente accelerato a causa della forza di gravità che spinge il corpo verso il basso; la componente verticale della velocità sarà $v_y = \frac{45}{2}$.

$$y = x_0 + v_y t + \frac{1}{2}at^2 = 50 + \frac{45}{2}t - 4,9t^2$$

2) Determina un'equazione cartesiana della traiettoria scrivendo i coefficienti in notazione scientifica con il fattore a moltiplicare la potenza del 10 con un solo decimale. Per ottenere la relazione tra le coordinate spaziali, dobbiamo eliminare il parametro t

$$\begin{cases} x = \frac{45\sqrt{3}}{2}t \\ y = 50 + \frac{45}{2}t - 4,9t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} t = \frac{2x}{45\sqrt{3}} \\ y = 50 + \frac{45}{2}\frac{2x}{45\sqrt{3}} - 4,9 \times \frac{4x^2}{6075} \end{cases}$$

semplificando e riordinando si ha

$$y = -3,2\cdot 10^{-3}x^2 + 5,8\cdot 10^{-1}x + 5\cdot 10$$

3) Qual è, approssimata al metro, l'altezza massima raggiunta dal corpo? Essendo la traiettoria descritta dall'equazione di una parabola con concavità verso il basso, il punto di massimo è rappresentato dall'ordinata del vertice

$$h_{max} = V_y = -\frac{b^2-4ac}{4a} = -\frac{0,58^2 + 4\times 50\times 3,2\cdot 10^{-3}}{-0,0128} \simeq 76\,m$$

4) In quale istante l'altezza ha un massimo? Scegliamo il calcolo più rapido. Essendo $t = \frac{2x}{45\sqrt{3}}$, calcoliamo l'ascissa del vertice e la sostituiamo al posto di x

$$V_x = -\frac{b}{2a} \simeq 91\,m$$

per cui

$$t = \frac{2\times 91}{45\sqrt{3}} \simeq 2,3\,s$$

5) Qual è la gittata approssimata al metro? La gittata è la distanza, proiettata sull'orizzontale, tra il punto di lancio e quello di arrivo a terra, cioè intersechiamo la parabola con l'asse x.

$$0,0016x^2 - 0,29x - 25 = 0$$

la cui radice positiva è $x = 245\,m$

6) quanto tempo impiega a cadere a terra? se deve percorrere orizzontalmente $245\,m$, impiegherà

$$t=\frac{2\times 245}{45\sqrt{3}}\simeq 6,3\,s$$

7) qual è la velocità di impatto a terra? calcoliamo le due componenti della velocità; v_x è sempre costante e vale $v_{0x}=\frac{45\sqrt{3}}{2}\simeq 36\,\frac{m}{s}$; v_y varia con il tempo $v_y=v_{oy}-at=\frac{45}{2}-9,8t=22,5-9,8\times 6,3=-39,2\,\frac{m}{s}$. La velocità di impatto sarà

$$v_f=\sqrt{v_{0x}^2+v_{oy}^2}=\sqrt{36^2+39,2^2}\simeq 55\,\frac{m}{s}$$

4.1. Fasci di parabole

Esercizio 103. Scrivere l'equazione del fascio generato dalle parabole di equazione $y=x^2$e $y=2x^2-3x-4$.

Soluzione. Un fascio di parabole è dato dalla combinazione lineare delle due equazioni

$$y=x^2+k\left(2x^2-3x+4\right)$$

che si può scrivere

$$y=(2k+1)\,x^2-3kx-4k$$

le due parabole base si intersecano nei punti

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x^2-3x-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ y=x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1;\,4 \\ y=1;\;\;16 \end{cases}$$

le parabole sono secanti nei punti $(-1;1)$ e $(1;16)$.

Esercizio 104. Considera il fascio di parabole di equazione $y=kx^2-4kx+3$. Rispondi ai seguenti quesiti.

Soluzione. 1) Determina i punti base: l'equazione data si può scrivere come $y=3+k\left(x^2-4x\right)$. Se intersechiamo le due equazioni ricavabili dalla combinazione lineare otteniamo

$$\begin{cases} y=3 \\ y=x^2-4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0;\;4 \\ y=3 \end{cases}$$

si intersecano nei punti $(0;3)$ e $(4;3)$.

2) trova la parabola appartenente al fascio passante per $(1;1)$: se il punto appartiene a una parabola, allora le sue coordinate ne soddisfano l'equazione

$$1=k-4k+3 \qquad -2=-3k \qquad k=\tfrac{2}{3}$$

la parabola avrà equazione $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{8}{3}x+3$.

3) trova la parabola appartenente avente vertice sulla retta $y=-5$. Troviamo le coordinate del vertice

$$V_x=\tfrac{-4k}{-2k}=2 \quad V_y=-\tfrac{16k^2-12k}{4k}=-\left(4k-3\right)$$

tutte le parabole avranno asse di simmetria $x=2$ e la parabola richiesta si ottiene da

$$-4k+3=-5 \qquad k=-2$$

la parabola ha equazione $y=-2x^2+8x+3$

4) trova la parabola tangente alla retta $y=2x$. Applichiamo la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y=kx^2-4kx+3 \\ y=2x \end{cases} \qquad \begin{cases} kx^2-2x\,(2k+1)+3=0 \\ y=2x \end{cases}$$

poniamo il discriminante dell'equazione risolvente uguale a zero

$$\tfrac{\Delta}{4}=(2k+1)^2-3k=0 \qquad 4k^2+k+1=0$$

in questo caso il discriminante è minore di zero e non vi sono soluzioni reali.

Esercizio 105. Determina l'equazione della circonferenza che ha il centro sulla retta di equazione $5x-3y=0$ e che passa per i punti di intersezione tra gli assi cartesiani e la parabola di equazione $x=-y^2+5y$.

Soluzione. L'equazione generale della crf è $x^2+y^2+ax+by+c=0$ e il centro ha coordinate $C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$; inoltre, la parabola interseca gli assi nei punti

$$asse\ x\ \begin{cases} x=-y^2+5y \\ y=0 \end{cases} \qquad A\,(0;0)$$

$$asse\ y\ \begin{cases} x=-y^2+5y \\ x=0 \end{cases} \qquad (0;0) \quad B\,(0;5)$$

quindi per determinare l'eq. dell crf abbiamo tre relazioni

$$\begin{matrix} per\ A \\ per\ B \\ C \end{matrix} \quad \begin{cases} c=0 \\ 25+5b+c=0 \\ -\frac{5a}{2}+\frac{3b}{2}=0 \end{cases} \quad \begin{cases} c=0 \\ b=-5 \\ -5a=15 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-3 \\ b=-5 \\ c=0 \end{cases}$$

l'equazione della circonferenza sarà

$$x^2+y^2-3x-5y=0$$

Problemi di ottimizzazione con funzioni di secondo grado

Esercizio 106. Un'azienda vinicola vuole lanciare un prodotto di lusso in edizione limitata da offrire sul mercato ogni anno. La pubblicità costa 300000 €/anno. Il costo per produrre una bottiglia è di 25 €. Il prezzo di vendita dipende dal numero di bottiglie messe in commercio (più bottiglie in vendita minore il loro prezzo). Quindi il prezzo p è funzione di x bottiglie secondo la relazione $p\,(x)=120-0,004x$. Affronta i seguenti quesiti:

Soluzione. 1) determina una funzione che esprima, in euro, il costo C di produzione; per la produzione dobbiamo sommare il costo della pubblicità e delle bottiglie prodotte, per cui

$$C\,(x)=300000+25x$$

2) Determina una funzione che esprima, in euro, il ricavo totale R annuo, supponendo di vendere tutte le bottiglie prodotte; sarà il numero di bottiglie per il loro prezzo

$$R\,(x)=x(120-0,004x)=120x-0,004x^2$$

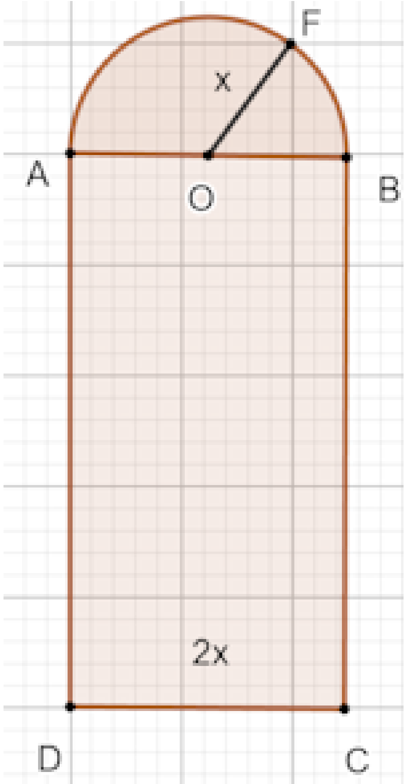
3) Per quale numero di bottiglie prodotte e vendute si ha il massimo guadagno? Il guadagno, come è noto, è la differenza tra il ricavo e il costo

$$G\,(x)=R\,(x)-C\,(x)=120x-0,004x^2-300000-25x=-0,004x^2+95x-300000$$

La funzione così ottenuta può essere vista come l'equazione di una parabola, che, avendo la concavità verso il basso, avrà come valore massimo quello corrispondente all'ascissa del vertice

$$V_x=G_{max}=\frac{95}{0,008}=11875\ \ bottiglie$$

Esercizio 107. Una finestra è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio di diametro coincidente con un lato del rettangolo. Se il perimetro della finestra è di $24\,m$, determinare le dimensioni della finestra affinché l'area sia massima.



Soluzione. Come indicato in figura, indichiamo con il segmento OF, raggio della semicrf. Di conseguenza, il lato $CD = 2x$. Il perimetro della figura è dato dalla somma da $CD + 2BC + \widehat{AB}$, per cui

$$2x + 2BC + \pi x = 24$$

da cui

$$BC = \frac{24 - 2x - \pi x}{2}$$

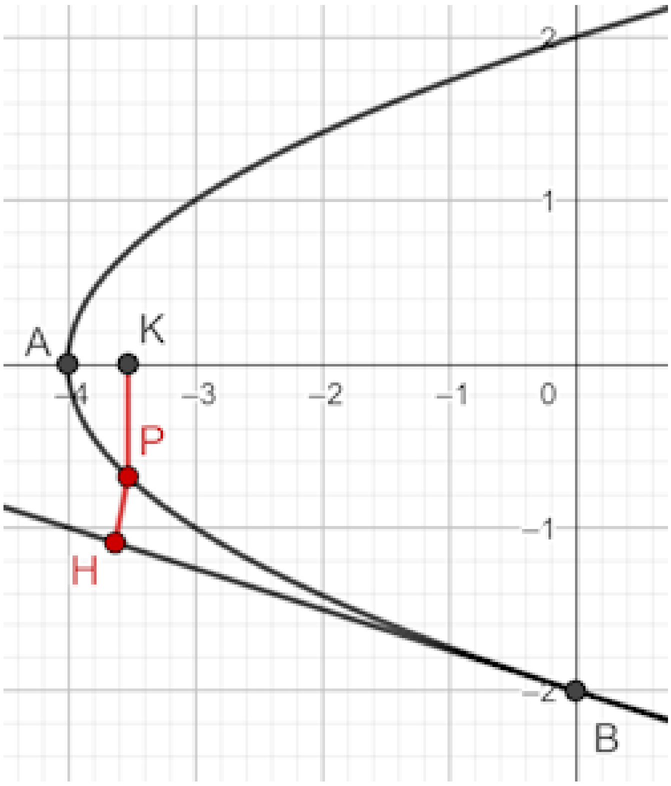
Pertanto l'area della figura sarà

$$y = A(x) = 2x\left(12 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2 = -\left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2 + 24x$$

La funzione così ottenuta può essere vista come l'equazione di una parabola, che, avendo la concavità verso il basso, avrà come valore massimo quello corrispondente all'ascissa del vertice

$$y_{max} = V_x = \frac{24}{4+\pi} \simeq 36\, m^2$$

Esercizio 108. Si consideri la parabola di equazione $x = y^2 - 4$ e si indichi con A il suo punto di intersezione con l'asse x e con B il suo punto di intersezione con il semiasse delle ordinate negative. Si consideri sull'arco AB un punto P e si indichi con H e K rispettivamente le proiezioni di P sull'asse x e sulla retta tangente alla parabola in B. Determinare le coordinate di P per cui è minima la somma $\overline{PH} + \sqrt{17}\overline{PK}$ e il valore minimo di tale somma.



Soluzione. Il punto P appartenendo alla parabola avrà coordinate $P\left(y^2-4;y\right)$ con $-4<x<0$ e $-2<y<0$. Pertanto il segmento $PH=|y|$. Troviamo la tangente alla parabola in B

$$\begin{cases} x=y^2-4 \\ y+2=mx \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\frac{y+2}{m} \\ \frac{y+2}{m}=y^2-4 \end{cases}$$

l'equazione risolvente dovrà avere il discriminante null0

$$my^2-y-(4m+2)=0 \quad \Delta=0 \quad 16m^2+8m+1=(4m+1)^2=0$$

da cui $m=-\dfrac{1}{4}$; la tangente avrà equazione $x+4y+8=0$. Calcoliamo ora la lunghezza del segmento PH come la distanza del punto P dalla retta tangente

$$PK=\frac{\left|y^2-4+4y+8\right|}{\sqrt{1+16}}=\frac{\left|y^2+4y+4\right|}{\sqrt{17}}=\frac{(y+2)^2}{\sqrt{17}}$$

Possiamo quindi scrivere la somma dei due segmenti

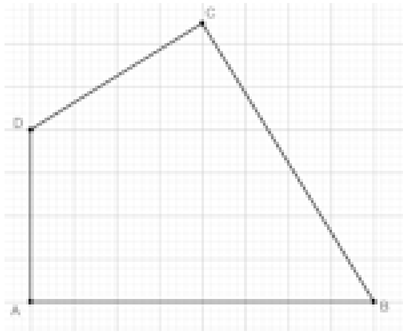
$$PH+\sqrt{17}PK=|y|+\frac{(y+2)^2}{\sqrt{17}}=-y+y^2+4y+4=y^2+3y+4$$

il minimo nel vertice (concavità verso l'alto), per cui

$$V_x=-\tfrac{\Delta}{4a}=\tfrac{7}{4} \qquad V_y=-\tfrac{b}{2a}=-\tfrac{3}{2}$$

la somma minima per $y=-\frac{3}{2}$ e il valore della somma è $\frac{7}{4}$.

Esercizio 109. Considera il quadrilatero di vertici $A\,(1;2)$, $B\,(9;2)$, $C\left(5,4+2\sqrt{5}\right)$, $D\,(1;6)$. Dimostra che tale quadrilatero è inscrivibile in una crf. Determina poi un'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y che ha vertice in $V\,(1;-1)$ ed è tangente alla retta di equazione $y=-2x$.



Soluzione. Un quadrilatero è inscrivibile in una crf se gli angoli opposti sono supplementari. Osservando la figura, determiniamo se gli angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{C}$ sono retti, cioè se le rette AB e AD sono perpendicolari così come le rette DC e BC. La retta AB è orizzontale e ha equazione $y=2$, mentre la retta AD è verticale ed ha equazione $x=1$; pertanto saranno perpendicolari.

$$m_{BC}=\tfrac{4+2\sqrt{5}-2}{5-9}=-\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\qquad m_{CD}=\tfrac{6-4-2\sqrt{5}}{1-5}=\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$

e

$$m_{BC}\cdot m_{CD}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=-\frac{4}{4}=-1$$

quindi anche queste due rette sono perpendicolari e il quadrilatero è inscrivibile.

Troviamo ora l'equazione della parabola che avrà equazione $y=ax^2+bx+c$. Consideriamo dapprima le coordinate del vertice

$$\begin{cases}-\frac{\Delta}{4a}=\frac{4ac-b^2}{4a}=-1\\ -\frac{b}{2a}=1\end{cases}\qquad\begin{cases}\frac{4ac-4a^2}{4a}=c-a=-1\\ b=-2a\end{cases}\qquad\begin{cases}c=a-1\\ b=-2a\end{cases}$$

l'equazione si riduce a $y=ax^2-2ay+a+1$. Studiamo ora la condizione di tangenza

$$\begin{cases}y=ax^2-2ax+a-1\\ y=-2x\end{cases}\qquad\begin{cases}-2x=ax^2-2ax+a-1\\ y=-2x\end{cases}\qquad\begin{cases}ax^2-2x\,(a-1)+(a-1)=0\\ y=-2x\end{cases}$$

imponiamo che il discriminante dell'equazione risolvente sia zero

$$\frac{\Delta}{4}=a^2-2a+1-a^2+a=0$$

cioè

$$\begin{cases}a=1\\ b=-2\\ c=0\end{cases}$$

la parabola avrà quindi equazione $y=x^2-2x$.

Esercizio 110. Si vuole costruire un recinto di forma rettangolare con un filo lungo $320\,m$. Trovare l'area massima delimitata da tale filo.

Soluzione. Il semiperimetro, cioè la somma di base e altezza del rettangolo è $160\,m$. Detta $AB=x$ la base del rettangolo, si avrà $BC=160-x$, altezza del rettangolo. L'area sarà

$$y=A=x\,(160-x)=-x^2+160x$$

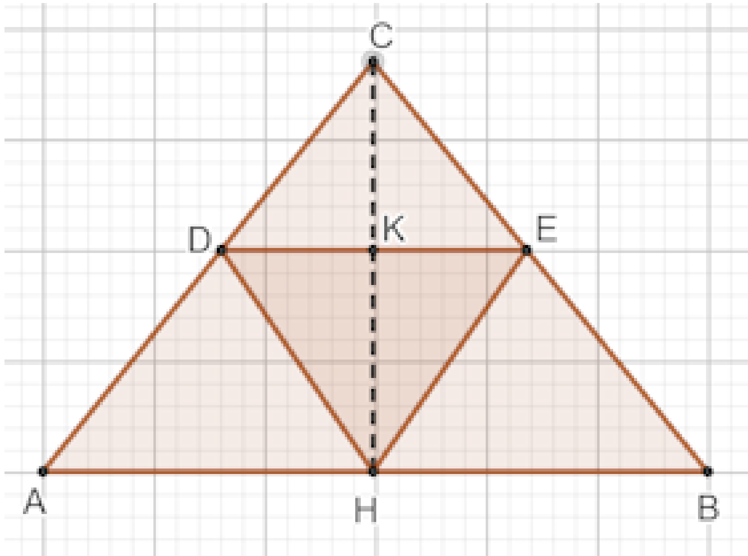
La funzione è di secondo grave e il suo grafico è dato da una parabola con la concavità verso il basso; quindi, il valore di x per l'area è massima sarà quello dell'ascissa del vertice.

$$V_x=-\frac{b}{2a}=\frac{160}{2}=80$$

il valore dell'area massima corrisponde all'ordinata del vertice

$$V_y=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{25600-0}{4}=6400$$

Esercizio 111. In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, si ha $AC=10\,cm$ e $AB=12\,cm$. Si tracci una corda retta parallela alla base AB che interseca i lati obliqui del triangolo nei punti D,E. Trovare DE tale che l'area del triangolo DEH sia massima, dove H è il piede dell'altezza del triangolo isoscele.



SOLUZIONE. I triangoli DCE e DHE sono entrambi isosceli e inoltre il triangolo DCE è simile al triangolo ABC, avendo tutti gli angoli uguali. Conoscendo la misura della base e del lato obliquo del triangolo ABC, possiamo ottenere l'altezza CH tramite il th. di Pitagora

$$CH = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8\,cm$$

Applicando la similitudine ai due triangoli prima indicati si ha

$$AB : DE = CH : CK$$

Posto $DE = x$, abbiamo

$$CK = \frac{8x}{12} = \frac{2}{3}x$$

per cui $HK = 8 - \frac{2}{3}x$. Possiamo ora trovare l'area del triangolo DHE

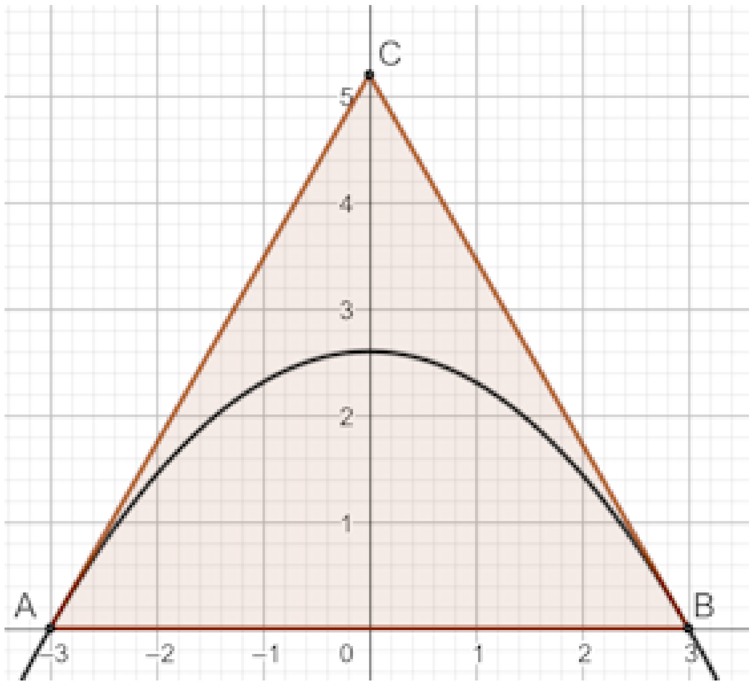
$$y = A = x \cdot \left(8 - \frac{2}{3}x\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}x^2 + 4x$$

la parabola ha concavità rivolta verso il basso e il valore massimo corrisponde al suo vertice; per cui

$$V_x = \frac{-4}{-\frac{2}{3}} = 6 \qquad V_y = \frac{16}{\frac{4}{3}} = 12$$

Pertanto $DE = 6\,cm$ e $A = 12\,cm^2$.

ESERCIZIO 112. Si consideri un triangolo equilatero ABC, di lato $\overline{AB} = 6$. Si rappresenti il triangolo in un opportuno sistema di assi cartesiani e si scriva l'equazione della parabola tangente in A al lato AC e passante per B. Si determini poi l'area di ciascuna elle due parti in cui il triangolo ABC è diviso dall'arco di parabola AB.



Soluzione. Il sistema di riferimento è quello mostrato in figura con l'origine nel piede dell'altezza relativa al lato AB. Pertanto i vertici avranno coordinate $A\,(-3;0)$, $B\,(3;0)$ e $C\left(0;3\sqrt{3}\right)$ (si ricordi che l'altezza di un triangolo equilatero è pari alla metà del lato per $\sqrt{3}$; si può verificare anche col th. di Pitagora). In questo modo la tangente AC contiene il lato del triangolo. Troviamo l'equazione della parabola in funzione del solo parametro a.

$$\begin{array}{l} per\ A \\ per\ B \end{array} \quad \begin{cases} 0 = 9a - 3b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases} \quad \begin{cases} c = -9a \\ b = 0 \end{cases}$$

per cui l'equazione si riduce a

$$y = ax^2 - 9a$$

Troviamo ora l'equazione della tangente AC.

$$m_{AC} = \tfrac{3\sqrt{3}-0}{0+3} = \sqrt{3} \quad y = \sqrt{3}\,(x+3) \quad y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3}$$

Troviamo ora l'equazione della parabola, imponendo la condizione di tangenza

$$\begin{cases} y = ax^2 - 9a \\ y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \end{cases} \quad \begin{cases} ax^2 - 9a - \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} = 0 \\ y = \sqrt{3}x + 3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Delta = 3 + 4a\left(3\sqrt{3} + 9a\right) = 3 + 12a\sqrt{3} + 36a^2 = \left(6a + \sqrt{3}\right)^2 = 0$$

da cui $a = -\frac{\sqrt{3}}{6}$ e la parabola

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x^2 + \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Il vertice della parabola avrà coordinate $(V_x; V_y) \equiv \left(0; \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$. L'arco AB divide il triangolo equilatero in un triangolo mistilineo e un segmento di parabola. L'area di tale segmento parabolico delimitato dal segmento AB e dall'arco è data da

$$A_{seg\,par} = \frac{2}{3}AB \cdot V_y = \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

pertanto l'area del triangolo mistilineo sarà

$$A_{eql} - A_{seg\,par} = 9\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

Esercizio 113. Si consideri la parabola di equazione $y = \frac{1}{2}x^2$. Siano r e s le rette tangenti condotte dal punto $P\,(0;-8)$ e la retta t tangente nel punto Q della parabola di ascissa $x = 2$. Determinare l'ortocentro del triangolo individuato dalle tre rette e verificare che esso appartiene alla direttrice.

Soluzione. Il punto P non appartiene al grafico della parabola; infatti

$$0 \neq \frac{1}{2} \times 64$$

Troviamo le due rette tangenti uscenti da P. Il fascio di rette con sostegno il punto P ha equazione $y = mx - 8$, pertanto

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y = mx - 8 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - mx + 8 = 0 \\ ------ \end{cases}$$

applichiamo la condizione di tangenza

$$\Delta = m^2 - 16 = 0 \quad m_1 = -4 \quad m_2 = 4$$

le due rette avranno equazione: $r: 4x - y - 8 = 0$; $s: 4x + y + 8 = 0$.

Ora le coordinate del punto sono $Q(2; 2)$; troviamo la tangente in questo punto:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2 \\ y - 2 = mx - 2m \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - mx + 2m - 2 = 0 \\ ------ \end{cases}$$

imponiamo la condizione di tangenza

$$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 = 0$$

da cui $m = 2$ e la retta avrà equazione: $t: 2x - y - 2 = 0$.

Troviamo ora le intersezioni di queste rette per identificare il triangolo. Il punto P sarà l'intersezione tra le due rette r e s che sono simmetriche rispetto all'asse y al quale appartiene il punto.

$$M \begin{cases} y = 4x - 8 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 6 = 0 \\ ---- \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$N \begin{cases} y = -4x - 8 \\ y = 2x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 6 = 0 \\ ---- \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}$$

i punti avranno coordinate $M(3; 4)$, $N(-1; 4)$, $P(0; -8)$. Ricordiamo che l'ortocentro è il punto di incontro delle tre altezze relative ai lati. Tutti i triangolo ammettono un tale punto e per determinarlo basterà intersecare due altezze.

$$m_{NH} = -\tfrac{1}{4} \quad retta\,NH: y = -\tfrac{1}{4}x - \tfrac{17}{4}$$

$$m_{MH} = \tfrac{1}{4} \quad retta\,MH: y = \tfrac{1}{4}x\tfrac{13}{4}$$

$$O \begin{cases} y = -\frac{1}{4}x - \frac{17}{4} \\ y = \frac{1}{4}x\frac{13}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{15}{2} = 0 \\ ---- \end{cases} \quad \begin{cases} x = -15 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

l'ortocentro avrà quindi coordinate $O\left(-15; -\frac{1}{2}\right)$ e sarà esterno al triangolo che si può quindi identificare come un triangolo ottusangolo.

La direttrice della parabola ha equazione

$$y = -\frac{1 + \Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$$

e come si può notare questa è proprio l'ordinata dell'ortocentro.

Esercizio 114. Si considerino le parabole $\gamma: y = x^2 - x$ e $\gamma': y = 2x^2 - 4x$. Si determinino i due punti $P \in \gamma$ e $P' \in \gamma'$ aventi la stessa ascissa, tali che la tangente a γ in P sia parallela alla tangente a γ' in P'.

Soluzione. Il fascio di rette passante per P è dato da $y - y_p = m(x - x_p)$, mentre quello per P' è $y - y_{p'} = m(x - x_{P'})$, poiché essendo le due tangenti parallele, avranno lo stesso coefficiente angolare m.

Calcoliamo separatamente le due tangenti

Tangente in P:

$$\begin{cases} y = x^2 - x \\ y = m(x - x_p) + y_P \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx - x + mx_p - y_P \\ ---- \end{cases}$$

ma $y_p = x_P^2 - x_P$, per cui l'equazione risolvente sarà

$$x^2 - x(m+1) + mx_P - x_P^2 + x_P = 0$$

imponiamo la condizione di tangenza

$$\Delta = m^2 + 2m + 1 - 4mx_P + 4x_P^2 - 4x_P = 0$$

cioè

$$m^2 - 2m(2x_P - 1) + (2x_P - 1) = 0$$

che si può riscrivere come quadrato di un trinomio

$$(m - 2x_P + 1)^2 \qquad m = 2x_P - 1$$

Procediamo allo stesso modo per la seconda tangente

Tangente in P' avente la stessa ascissa, cioè $x_{P'} = x_P$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 4x \\ y = m\left(x - x_P\right) + y_{P'} \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - mx - 4x + mx_p - y_{P'} = 0 \\ ---- \end{cases}$$

ma $y_p = 2x_P^2 - 4x_P$, per cui l'equazione risolvente sarà

$$2x^2 - x\left(m+4\right) + mx_P - 2x_P^2 + 4x_P = 0$$

imponiamo la condizione di tangenza

$$\Delta = m^2 + 8m + 16 - 8mx_P + 16x_P^2 - 32x_P = 0$$

cioè

$$m^2 + 8m\left(1 - x_P\right) + 16\left(1 - x_P\right)^2 = 0$$

che si può riscrivere come quadrato di un trinomio

$$\left(m - 4 - 4x_P\right)^2 \qquad m = 4x_P - 4$$

dovendo essere uguali i due coefficienti angolari, avremo

$$4x_P - 4 = 2x_P - 1 \quad 2x_P = 3 \quad x_P = \tfrac{3}{2}$$

Le coordinate dei due punti saranno

$$P\left(\tfrac{3}{2}; \tfrac{9}{4} - \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{4}\right)^2 \qquad P'\left(\tfrac{3}{2}; 2 \times \tfrac{9}{4} - 4 \times \tfrac{3}{2} = -\tfrac{3}{2}\right)$$

Coniche in generale

L'espressione analitica di una conica (circonferenza, parabola, ellisse) è data dall'equazione

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

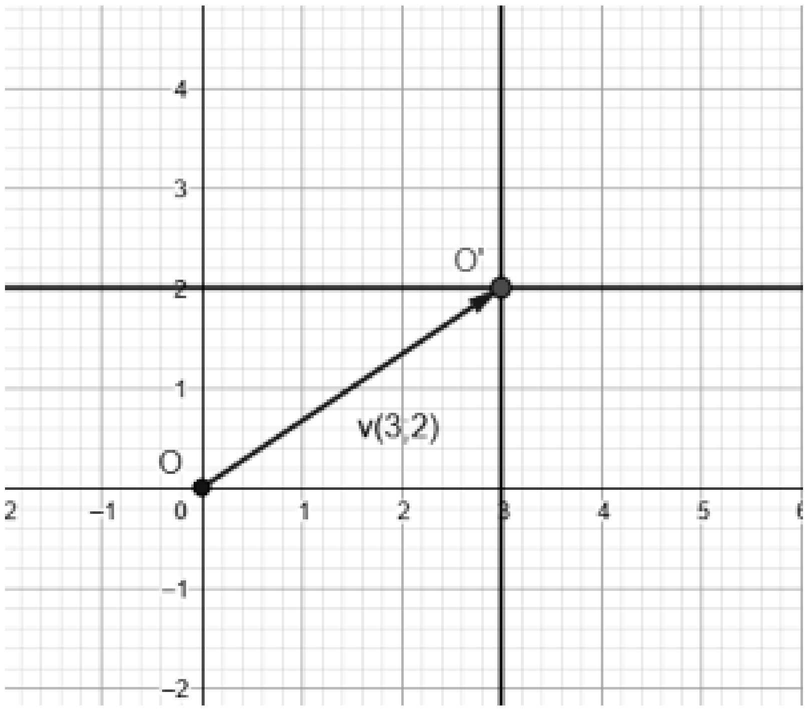
Ogni conica è caratterizzata dalla relazione

CAPITOLO 5

Isometrie

Trattiamo in particolare la traslazione e la rotazione attorno ad un punto. Tali trasformazioni associano a una figura un'altra figura lasciando invariate le distanze tra i punti, il parallelismo e la perpendicolarità

La **traslazione** richiede di conoscere direzione, modulo e verso del vettore che trasporta il punto di riferimento di una figura nell'omologo punto dell'altra figura. Siccome lo spostamento deve essere considerato come rigido, tutti gli altri punti della prima figura si trasformeranno negli omologhi dell'altra figura spostata. In un piano cartesiano, tale vettore può essere espresso dalle sue componenti lungo gli assi.



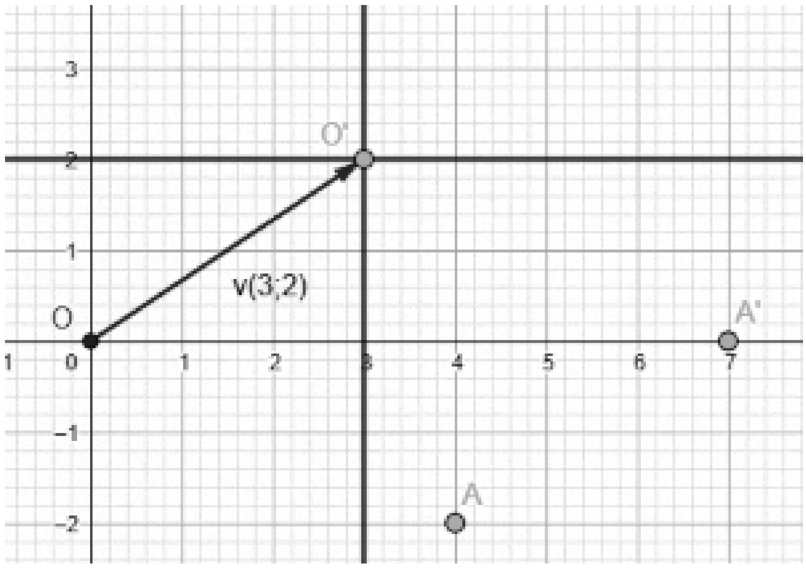
Una traslazione può essere descritta dal sistema di equazioni che porta la figura da un sistema di assi ad un altro. Se indichiamo con x, y le ascisse e ordinate della figura nel piano cartesiano avente origine in O e con x', y', quelle della figura nel piano cartesiano avente per origine il punto O', e con $\overrightarrow{v}(a, b)$ il vettore di traslazione, si può scrivere

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

Esempio. Dato il punto $A(4; -2)$ nel sistema xOy, determinare le coordinate del punto A' ottenuto con una traslazione di vettore $v(3; 2)$.

Soluzione. Applicando le formule indicate, essendo $a = 3$ e $b = 2$ avremo

$$\begin{cases} x' = 4 + 3 = 7 \\ y' = -2 + 2 = 0 \end{cases}$$



La **rotazione** di una figura attorno all'origine del piano cartesiano, presa come antioraria, di un angolo α è espressa dalle relazioni

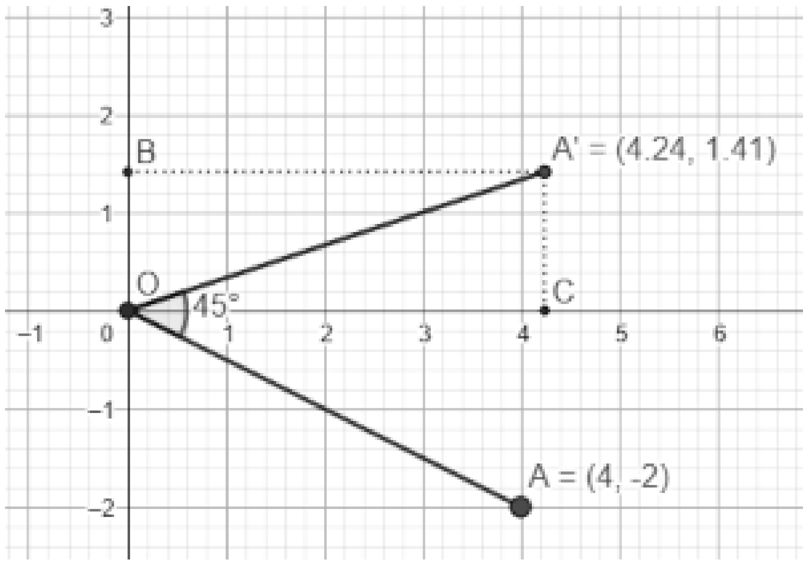
$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Esempio. Dato il punto $A\,(4;-2)$ nel sistema xOy, determinare le coordinate del punto A' ottenuto con una rotazione di angolo $\alpha = 45°$.

Soluzione. Applicando le formule indicate

$$A' \begin{cases} x' = 4\cos 45° - (-2)\sin 45° \\ y' = 4\sin 45° - 2\cos 45° \end{cases}$$

$$A' \begin{cases} x' = 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\ y' = 4\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$



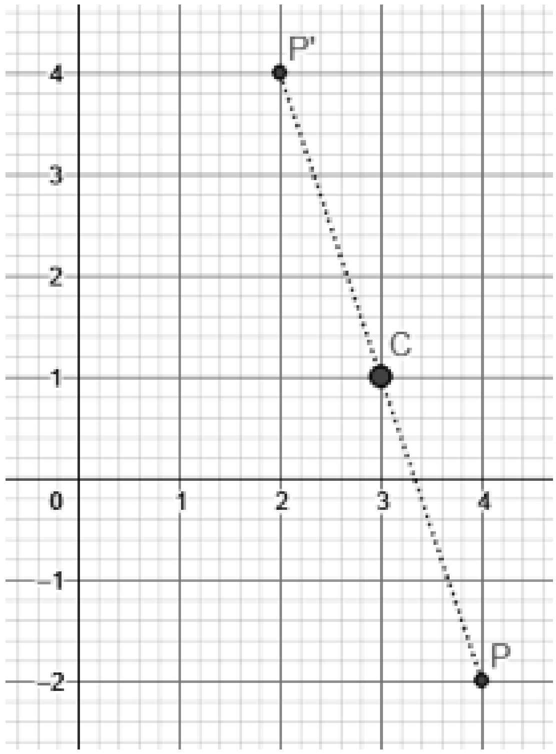
La **simmetria centrale** di centro $C\,(x_0, y_0)$ associa a ogni punto P del piano il punto P', simmetrico rispetto a P. I due punti P e P' sono pertanto equidistanti da C, o C è il punto medio del segmento PP'. Le equazioni della simmetria centrale sono

$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$

Esempio. Dato il punto $C\,(3;1)$ trovare il simmetrico P' rispetto a tale punto di $P\,(4;-2)$

Soluzione. Applichiamo le equazioni indicate

$$\begin{cases} x' = 2\cdot 3 - 4 = 2 \\ y' = 2\cdot 1 - (-2) = 4 \end{cases}$$

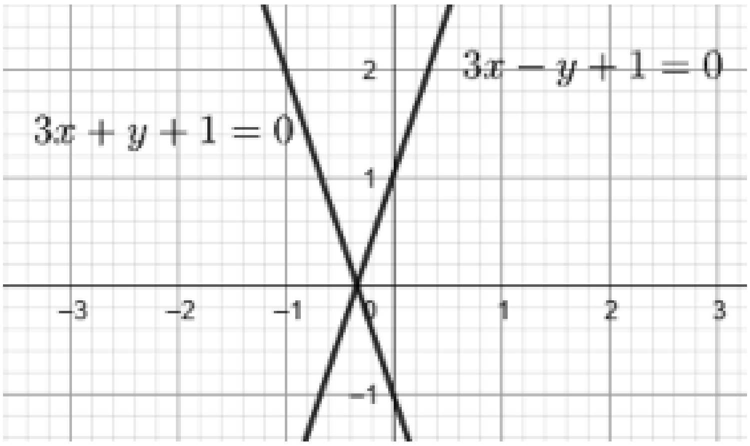


Simmetrie rispetto ad una retta. In questo caso si hanno più possibilità a seconda di come è disposta nel piano la retta che rappresenta l'asse di simmetria. Tali casi si possono riassumere come segue:

- simmetria rispetto all'asse x (eq. $y = 0$): l'ascissa di ogni punto rimane invariata, l'ordinata cambia di segno
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$
- simmetria rispetto all'asse y (eq. $x = 0$): l'ascissa cambia di segno, l'ordinata rimane invariata
$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$
- simmetria rispetto a una retta parallela all'asse x (eq. $y = y_0$): le equazioni sono
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y_0 - y \end{cases}$$
- simmetria rispetto a una retta parallela all'asse y (eq. $x = x_0$): le equazioni sono
$$\begin{cases} x' = 2x_0 - x \\ y' = y \end{cases}$$
- simmetria rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante (eq: $y = x$): le equazioni sono
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$
- analogamente, la simmetria rispetto alla bisettrice del 2° e 4° quadrante (eq: $y = -x$) avrà come equazioni
$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}$$

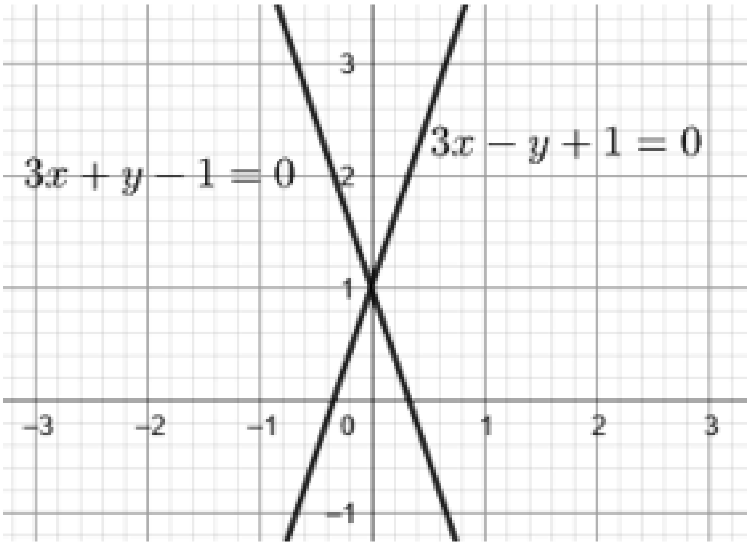
Esempio. Data la retta di equazione $3x - y + 1 = 0$, trovare le equazioni

Soluzione. della retta simmetrica rispetto all'asse x: applicando le sostituzioni indicate
$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$
si ha
$$3x - 1(-y) + 1 = 0 \qquad 3x + y + 1 = 0$$



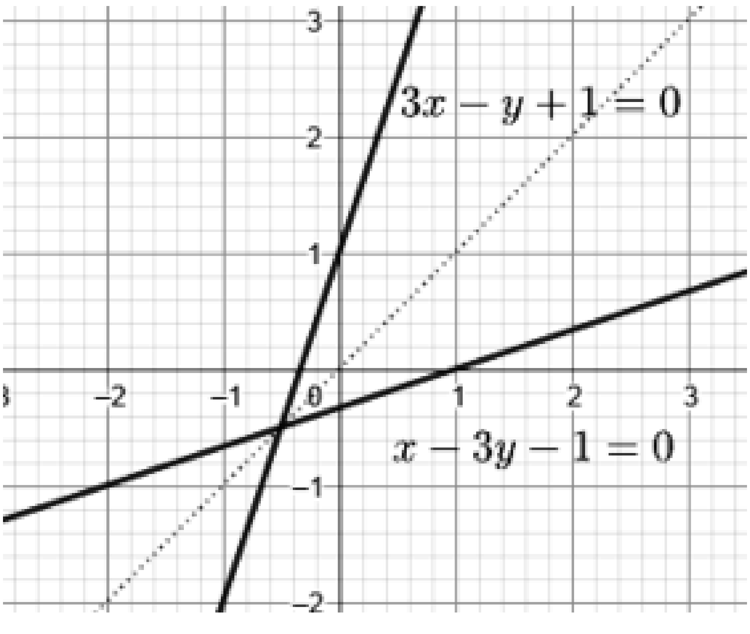
della retta simmetrica rispetto all'asse y

$$3(-x) - y + 1 = 0 \qquad 3x + y - 1 = 0$$



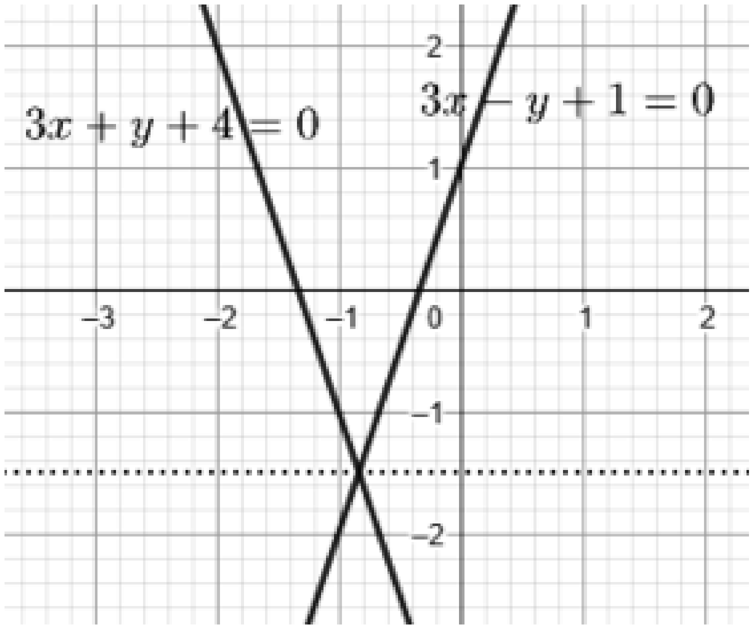
della retta simmetrica alla bisettrice $y = x$

$$3(y) - (x) + 1 = 0 \qquad x - 3y - 1 = 0$$



della retta simmetrica alla retta $y=-\frac{3}{2}$

$$3x-\left[2\left(-\frac{3}{2}\right)-y\right]+1=0 \qquad 3x+y+4=0$$



Dilatazioni e omotetie (trasformazioni non isometriche). La dilatazione è l'ingrandimento o rimpicciolimento di una figura, per cui tra la figura di partenza e quella associata esiste un rapporto costante tra le ascisse e le ordinate di tutti i punti. L'omotetia è una trasformazione composta da una dilatazione e da una isometria.

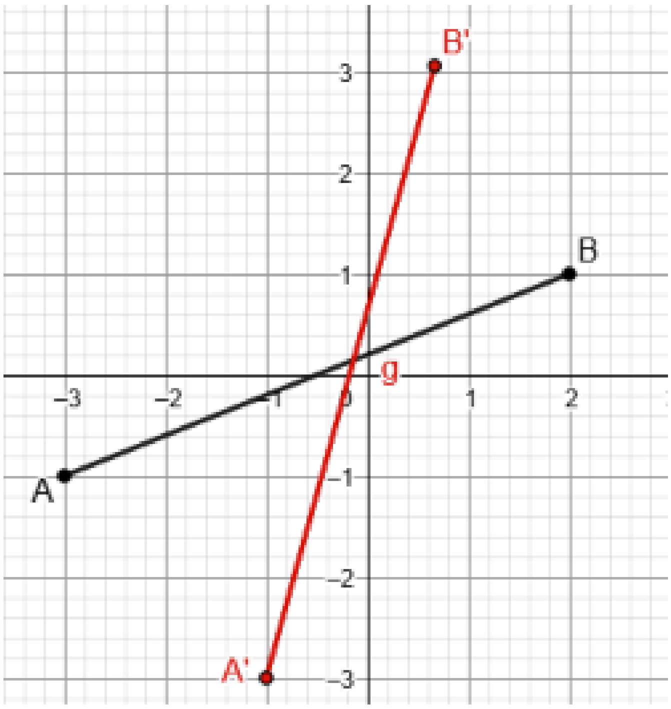
Consideriamo dapprima le dilatazioni con centro nell'origine dove le ascisse stanno tra loro nel rapporto uguale a h e le ordinate nel rapporto uguale a k

$$\begin{cases} x'=hx \\ y'=ky \end{cases}$$

Esempio. Dato un segmento AB di estremi $A(-3;-1)$ e $B(2;1)$ trovare gli estremi del segmento tali che le ascisse divengano un terzo e le ordinate triplichino. Le informazioni date si traducono nel sistema

$$A'\begin{cases} x'_A=\frac{1}{3}x=-1 \\ y'_A=3y=-3 \end{cases} \qquad B'\begin{cases} x'_B=\frac{1}{3}x=\frac{2}{3} \\ y'_B=3y=3 \end{cases}$$

le coordinate degli estremi saranno $A'(-1;-3)$ e $B'\left(\frac{2}{3};9\right)$



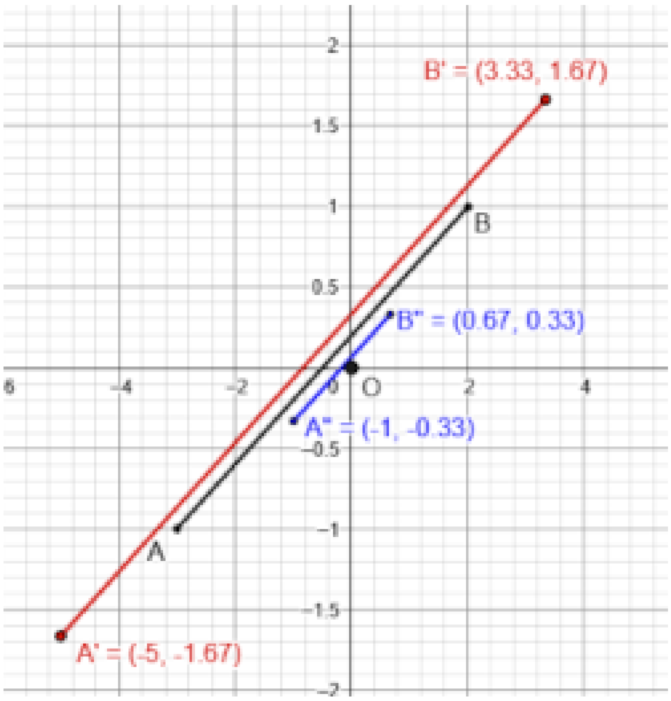
ESEMPIO. Lo stesso esercizio precedente nel caso in cui $h = k$, con $h = k < 1$ e $h = k > 1$

SOLUZIONE. 1° caso: $h = k = \frac{5}{3} > 1$

$$A' \left\{ \begin{array}{l} x'_A = \frac{5}{3}(-3) = -5 \\ y'_A = \frac{5}{3}(-1) = -\frac{5}{3} \end{array} \right. \quad B' \left\{ \begin{array}{l} x'_B = \frac{5}{3}(2) = \frac{10}{3} \\ y'_B = \frac{5}{3}(1) = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

2° caso: $h = k = \frac{2}{3} < 1$

$$A' \left\{ \begin{array}{l} x'_A = \frac{2}{3}(-3) = -2 \\ y'_A = \frac{2}{3}(-1) = -\frac{2}{3} \end{array} \right. \quad B' \left\{ \begin{array}{l} x'_B = \frac{2}{3}(2) = \frac{4}{3} \\ y'_B = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$



L'omotetia è la composizione di una dilatazione e di una traslazione; il nuovo centro è $C(a; b)$ e le equazioni saranno

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = hx + a \\ y' = ky + b \end{array} \right.$$

ESERCIZI

Esercizio 115. Determina le equazioni delle simmetria centrale che trasforma il punto $A(-2;2)$ nel punto $B(3;6)$.

Soluzione. Il centro di questa simmetria è il punto medio M del segmento AB, pertanto

$$M_x = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \quad M_y = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$$

da cui $M\left(\frac{1}{2};4\right)$. Le equazioni saranno

$$\begin{cases} x' = 2x_M - x \\ y' = 2y_M - y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 1 - x \\ y' = 8 - y \end{cases}$$

Esercizio 116. Di un parallelogramma ABCD si conoscono i due vertici $A(3;-1)$ e $B(5;1)$ e il punto di intersezione delle diagonali, $M\left(\frac{7}{2};\frac{3}{2}\right)$. Determina i vertici C e D.

Soluzione. In un parallelogrammo le diagonali si bisecano, per cui M è il punto loro medio comune. C sarà il simmetrico di A rispetto a M e D lo sarà di B. La formula che determina il punto medio è

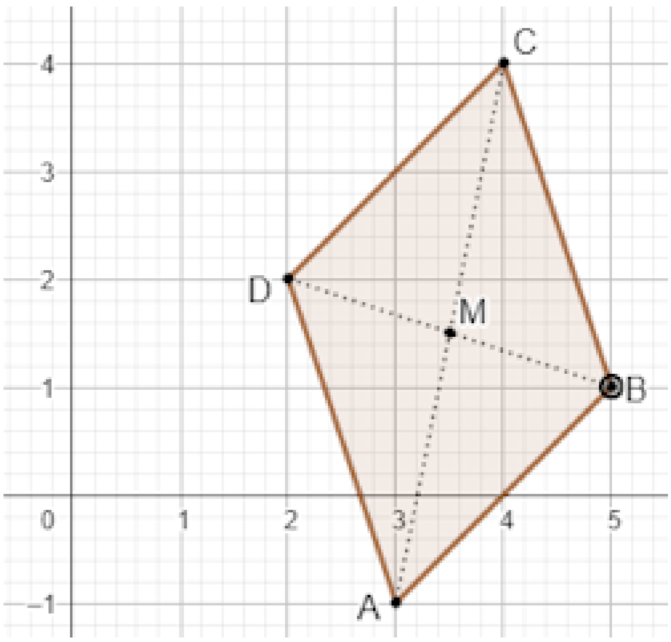
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_C}{2}$$

per cui

$$x_c = 2x_M - x_A = 7 - 3 = 4 \quad y_c = 2y_M - y_A = 3 + 1 = 4$$

analogamente per D

$$x_D = 2y_M - y_B = 7 - 5 = 2 \quad y_D = 2y_M - y_B = 3 - 1 = 2$$



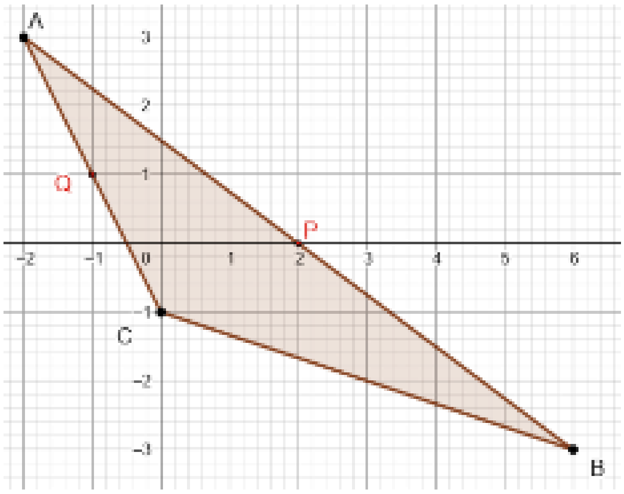
Esercizio. Dato il punto $A(-2;3)$, sia B il simmetrico di A rispetto a $P(2;0)$ e C il simmetrico di A rispetto al punto $Q(-1;1)$. Trovare il perimetro e area del triangolo ABC.

Soluzione. Troviamo il punto B, applicando le equazioni della simmetria rispetto a un punto diverso dall'origine

$$\begin{cases} x_B = 2x_P - x_A \\ y_B = 2y_P - y_A \end{cases} \quad \begin{cases} x_B = 2 \cdot 2 - (-2) = 6 \\ y_B = 2 \cdot 0 - 3 = -3 \end{cases} \quad B(6;-3)$$

Analogamente troviamo il punto C

$$\begin{cases} x_C = 2x_Q - x_A \\ y_B = 2y_Q - y_A \end{cases} \begin{cases} x_C = 2 \cdot (-1) - (-2) = 0 \\ y_C = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \end{cases} \quad C(0;-1)$$



Troviamo il perimetro sommando le lunghezze dei lati, che ricaviamo dalla formula della distanza tra due punti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-6)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{100} = 10$$
$$\overline{AC} = \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\overline{CB} = \sqrt{(6-0)^2 + (-3+1)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Pertanto

$$2p = 10 + 2\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$$

Per determinare l'area, moltiplichiamo la base AB per la distanza del punto C dalla retta AB (altezza del triangolo sulla base AB). Troviamo la retta AB: il coefficiente angolare è

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

imponiamo il passaggio per il punto A e avremo q

$$y_A = mx_A + q$$

da cui

$$q = 3 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot (-2) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

da cui

$$retta\, AB:\ 3x + 4y - 6 = 0$$

applichiamo la formula della distanza di un punto da una retta

$$CH = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

L'area sarà pertanto

$$A_{ABC} = \frac{AB \cdot CH}{2} = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10$$

Esercizio 117. Data la retta di equazione $x + y - 1 = 0$, scrivere la sua simmetrica rispetto al punto $P(-1; 4)$

Soluzione. Applichiamo le equazioni della simmetria centrale rispetto a un punto non coincidente con l'origine.

$$\begin{cases} x' = 2x_P - x \\ y' = 2y_P - y \end{cases}$$

da cui

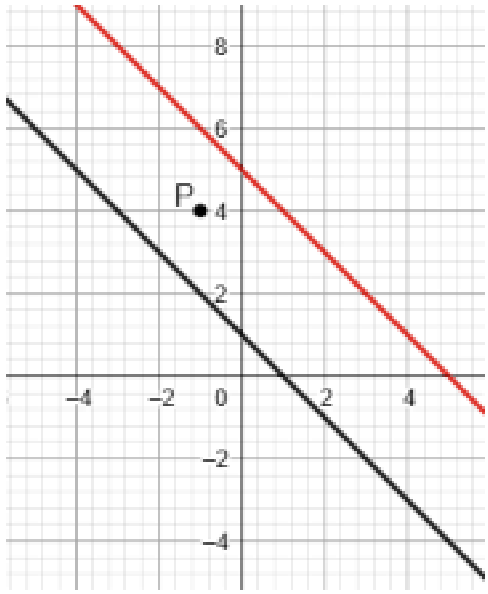
$$\begin{cases} x = 2x_P - x' \\ y = 2y_P - y' \end{cases}$$

e sostituiamo nella equazione della retta data

$$(2x_p - x) + (2y_p - y) - 1 = 0$$
$$-2 - x + 8 - y - 1 = 0$$

cioè

$$x + y - 5 = 0$$



Esercizio 118. Determina il punto P, appartenente alla retta $y = 2x$, rispetto al quale sono simmetriche la retta $r : x + y - 1 = 0$ e la retta $s : x + y + 5 = 0$.

Soluzione. Il punto P ha coordinate $P\,(x; 2x)$. Se la retta s è simmetrica rispetto al punto P, allora la sua equazione si ottiene dalle equazioni delle simmetria, cioè

$$(2x_P - x) + (2y_p - y) - 1 = 0$$

$$2x_p - x + 4x_p - y - 1 = 0$$

si ottiene

$$x + y + 1 - 6x_P = 0$$

questa equazione deve coincidere con quella assegnata della retta s, per cui

$$1 - 6x_p = 5 \quad x_P = -\tfrac{2}{3} \quad y_P = 2 \cdot \left(-\tfrac{2}{3}\right) = -\tfrac{4}{3}$$

le coordinate del punto P cercato sono

$$P\left(-\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$$

Esercizio 119. Determina il punto P rispetto al quale sono simmetriche le parabole di equazione $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x + 3$.

Soluzione. Le coordinate del punto sono $P\,(x_P; y_P)$. La simmetrica di $y = x^2$ rispetto a questo punto è

$$(2y_p - y) = (2x_P - x)^2$$

svolgendo

$$2y_P - y = 4x_P^2 + x^2 - 4x_p x$$

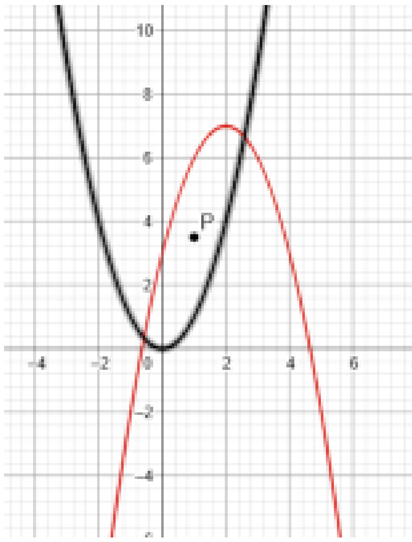
cioè

$$y = -x^2 + 4x_P x - 4x_P^2 + 2y_P$$

questa equazione deve coincidere con quella assegnata della simmetrica, per cui

$$\begin{cases} 4x_P = 4 \\ -4x_P^2 + 2y_P = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_P = 1 \\ -4x_P^2 + 2y_P = 3 \end{cases} \qquad P \begin{cases} x_P = 1 \\ y_P = \frac{7}{2} \end{cases}$$



Esercizio 120. Individuare il centro di simmetria della curva $xy - 3x + 2y + 1 = 0$.

Soluzione. Sia $P(x_P, y_P)$ il possibile centro di simmetria. Allora l'equazione della simmetrica rispetto a P deve coincidere con l'equazione data.

Troviamo la curva simmetrica, applicando le equazioni della simmetria rispetto a un punto diverso dall'origine.

$$(2x_P - x)(2y_P - y) - 3(2x_p - x) + 2(2y_P - y) + 1 = 0$$

svolgendo si ottiene

$$4x_Py_P - 2x_Py - 2y_Px + xy - 6x_P + 3x + 2y_P - 2y + 1 = 0$$

cioè

$$xy + x(3 - 2y_P) + 2y(-1 - x_P) + (4x_Py_P - 6x_P + 4y_P + 1) = 0$$

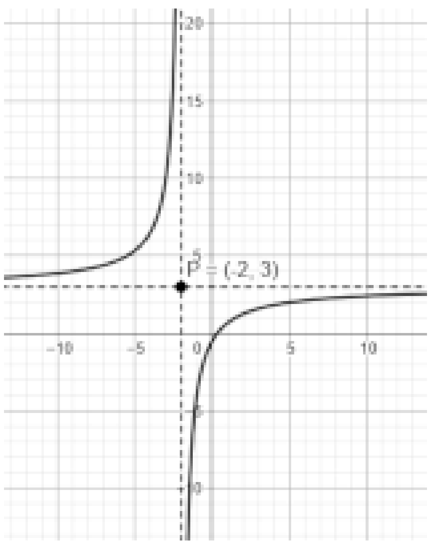
Affinché questa equazione coincida con quella assegnata, devono valere le seguenti condizioni

$$\begin{cases} 3 - 2y_P = -3 \\ -1 - x_P = 1 \\ 4x_Py_P - 6x_P + 4y_P + 1 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} y_P = 3 \\ x_P = -2 \\ -24 + 12 + 12 + 1 = 1 \end{cases}$$

Il punto di simmetria sarà $P(-2; 3)$



La figura mostra come l'equazione data rappresenti un'iperbole traslata (funzione omografica) e come il punto P sia il centro dell'iperbole coincidendo all'intersezione degli asintoti.

Esercizio 121. Determinare per quale valore di m la retta r', simmetrica della retta $r : x + 2y - 1 = 0$ rispetto al punto $P(m; m)$ passa per il punto $Q(4; 4)$.

Soluzione. troviamo l'equazione della retta simmetrica r', applicando le formule della simmetria centrale.

$$(2m - x) + 2(2m - y) - 1 = 0$$

cioè

$$x + 2y - 6m + 1 = 0$$

imponiamo il passaggio di tale per il punto Q

$$4 + 8 - 6m + 1 = 0$$

da cui

$$m = \frac{13}{6}$$

Esercizio 122. Dato il triangolo ABC, di vertici $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 6)$, siano A', B', C' rispettivamente i simmetrici di A, B, C, rispetto al baricentro G del triangolo ABC. L'intersezione dei due triangoli è un esagono, del quale si chiede di calcolare l'area e il perimetro.

Soluzione. Troviamo il baricentro del triangolo (intersezione delle mediane) con la relazione

$$G_x = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad G_y = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

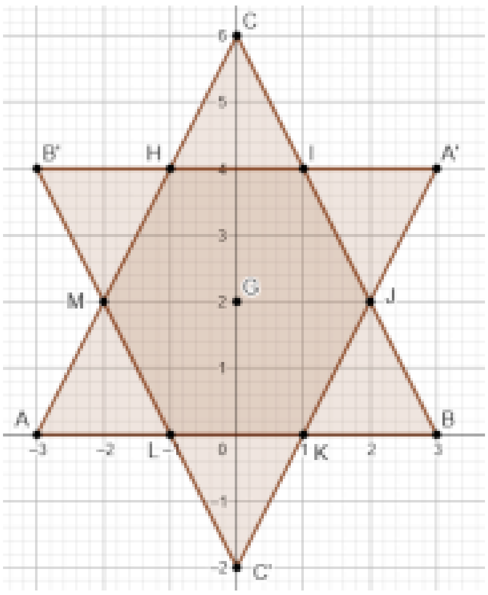
sostituendo

$$G_x = \frac{-3+3+0}{3} = 0 \quad G_y = \frac{0+0+6}{3} = 2$$

troviamo i simmetrici dei tre vertici del triangolo ABC.

$$A'(3; 4) \quad B'(-3; 4) \quad C'(0; -2)$$

Il punto C e il baricentro stanno sull'asse y, A e B sono simmetrici rispetto all'origine. Si ha quindi un triangolo isoscele, così come dovrà essere pure il suo simmetrico avente per vertici A', B', C'. La loro intersezione darà pertanto un esagono non regolare, perché i due triangoli non sono equilateri.



Troviamo la retta AC; essa ha $m_{AC} = \frac{y_c - y_A}{x_c - x_A} = \frac{6-0}{0-(-3)} = 2$ e $q = 6$ (ordinata all'origine), per cui $AC : y = 2x + 6$. La retta A'C' è parallela alla retta AC e avrà lo stesso coefficiente angolare ma $q = -2$; per cui $A'C' : y = 2x - 2$. Troviamo ora le coordinate del punto H intersecando le rette A'B' (retta parallela all'asse x, di eq. $A'B' : y = 4$) e AC.

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = 4 \end{cases} \qquad H \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

La retta BC avrà eq: $BC : -2x + 6$; troviamo il punto I

$$\begin{cases} y = -2x + 6 \\ y = 4 \end{cases} \qquad I \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

da cui $\overline{HI} = \overline{LK} = |-1-1| = 2$. Troviamo ora le coordinate del punto M, intersecando la retta AC con la retta B'C', che avrà equazione $B'C' : y = -2x - 2$; per cui

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -2x - 2 \end{cases} \quad M \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Troviamo il segmento MH

$$\overline{MH} = \sqrt{(-2+1)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$$

Il perimetro sarà quindi

$$2p = 2 \times 2 + 4 \times \sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5}$$

Calcoliamo l'area dell'esagono per differenza tra l'area del triangolo ABC e il triplo dell'area del triangolo HIC; avremo

$$A = \frac{6 \times 6}{2} - 3 \times \frac{2 \times 2}{2} = 18 - 6 = 12$$

Esercizio 123. Scrivere l'equazione della simmetria che trasforma il punto $P(-2;-1)$ nel punto $P'(-2;3)$, sapendo che l'asse di simmetria è parallelo all'asse x.

Soluzione. L'asse di simmetria avrà equazione $y = h$. Le equazioni della simmetria sono

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2h - y \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} x' = x \\ 3 = 2h + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \\ h = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2 - y \end{cases}$$

Esercizio 124. Scrivere l'equazione della simmetria che trasforma il punto $P(-3;4)$ nel punto $P'(6;4)$, sapendo che l'asse di simmetria è parallelo all'asse y.

Soluzione. L'asse di simmetria avrà equazione $x = k$. Le equazioni della simmetria sono

$$\begin{cases} x' = 2k - x \\ y' = y \end{cases}$$

per cui

$$\begin{cases} 6 = 2k + 3 \\ y' = y \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{3}{2} \\ y' = y \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 3 - x \\ y' = y \end{cases}$$

Esercizio 125. Sia dato il punto $P(2;1)$. Siano A, B, C rispettivamente il simmetrico di P rispetto all'asse y, rispetto all'asse x e rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Trovare il perimetro e l'area del triangolo ABC.

Soluzione. Troviamo le coordinate del punto A, simmetrico di P rispetto all'asse x

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \quad A \begin{cases} x' = 2 \\ y' = -1 \end{cases}$$

Troviamo le coordinate del punto B, simmetrico di P rispetto all'asse y

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \quad B \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 1 \end{cases}$$

Troviamo le coordinate del punto C, simmetrico di P rispetto alla bisettrice $x = y$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad C \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2 \end{cases}$$

Calcoliamo la lunghezza dei lati con la formula della distanza

$$\overline{AB} = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10}$$

il perimetro è

$$2p = 2\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

Il triangolo risulta isoscele sulla base AB. Troviamo la retta AB; il suo coefficiente angolare è $m = \frac{-1-1}{2+2} = -\frac{1}{2}$. Imponendo il passaggio per A,

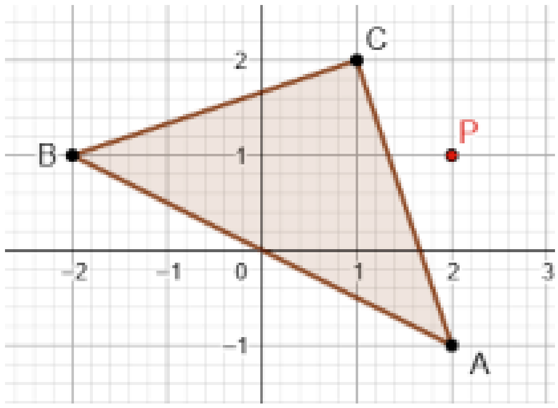
$$-1 = -\tfrac{1}{2} \times 2 + q \quad q = 0$$

la retta ha equazione $AB : x + 2y = 0$. Calcoliamo ora la distanza del punto C dalla retta AB, che sarà l'altezza del triangolo isoscele

$$\overline{CH} = \frac{|1 \times 1 + 2 \times 2 + 0|}{\sqrt{1+4}} = \sqrt{5}$$

L'area del triangolo è

$$A_{ABC} = \frac{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = 5$$



[In alternativa si poteva mostrare che l'altezza del triangolo è proprio il segmento CO, poiché la retta AB passa per l'origine, calcolando il coefficiente angolare della retta OC e osservando che è l'antireciproco del coefficiente angolare della retta AB, cioè OC è perpendicolare ad AB]

Esercizio 126. Si consideri il triangolo ABC di vertici $A(2; -1)$, $B(-1; -1)$, $C(-3; -2)$. Determinare i vertici del triangolo A'B'C' corrispondente di ABC nella simmetria rispetto alla retta di equazione $y = 2$ e i vertici del triangolo A"B"C" corrispondenti di A'B'C' nella simmetria rispetto alla retta di equazione $x = 1$. Determinare la simmetria centrale che fa corrispondere i due triangoli ABC e A"B"C".

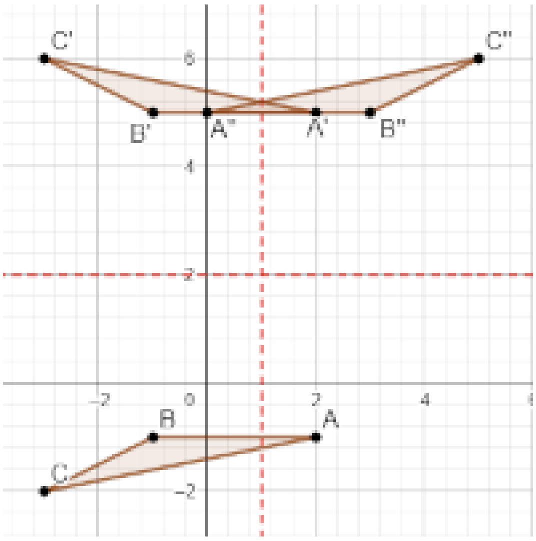
Soluzione. Troviamo le coordinate dei vertici di A'B'C'. La simmetria è rispetto ad una retta parallela all'asse y e quindi sono conservate le ascisse.

$$A' \begin{cases} x' = 2 \\ y' = 4 + 1 = 5 \end{cases} \qquad B' \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 4 + 1 = 5 \end{cases} \qquad C' \begin{cases} x' = -3 \\ y' = 4 + 2 = 6 \end{cases}$$

Troviamo ora le coordinate dei vertici di A"B"C". La simmetria è rispetto ad una retta parallela all'asse x, per cui sono conservate le ordinate

$$A" \begin{cases} x' = 2 - 2 = 0 \\ y' = 5 \end{cases} \qquad B" \begin{cases} x' = 2 + 1 = 3 \\ y' = 5 \end{cases} \qquad C" \begin{cases} x' = 2 + 3 = 5 \\ y' = 6 \end{cases}$$

In questo caso è facile trovare il centro di simmetria che fa corrispondere il triangolo ABC al triangolo A"B"C", perché i due assi di simmetria sono tra loro perpendicolari e si intersecano nel punto $P(1; 2)$. Questo sarà il centro di simmetria cercato, perché la composizione di due simmetrie assiali con rette tra loro perpendicolari dà una simmetria centrale con centro nel punto di intersezione. (la stessa cosa che avviene per gli assi cartesiani)



Esercizio 127. Determinare le coordinate del punto simmetrico dell'origine rispetto alla retta di equazione $y = 2x - 1$.

Soluzione. Il punto simmetrico O' starà sulla perpendicolare alla retta tracciata dall'origine $O(0;0)$. Inoltre, l'intersezione tra le due rette individuerà il punto medio della distanza tra il punto O e il suo simmetrico rispetto alla retta data. Pertanto, trovando questo punto medio, M, si può pensare O' come il simmetrico di O rispetto a M.

Troviamo la perpendicolare alla retta data passante per O; essa avrà coefficiente angolare $m = -\frac{1}{2}$ e $q = 0$, passando per l'origine. La sua equazione è $y = -\frac{1}{2}x$.

Troviamo il punto medio M, intersecando le due rette

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \qquad \begin{cases} -\frac{1}{2}x = 2x - 1 \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \qquad M \begin{cases} x = \frac{2}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Troviamo ora il simmetrico O' rispetto a M

$$\begin{cases} x' = 2 \cdot \frac{2}{5} - 0 \\ y' = 2 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) - 0 \end{cases} \qquad O' \begin{cases} x' = \frac{4}{5} \\ y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

Esercizio 128. Determinare rispetto a quale retta parallela all'asse x è simmetrica la curva di equazione $y^2 - 5y - x = 0$.

Soluzione. Una generica retta parallela all'asse x ha equazione $y = h$. Applichiamo quindi la simmetria rispetto a tale retta generica per poter poi calcolare il valore di h.

La simmetria rispetto all'asse x lascia invariate le ascisse dei punti della curva e ne modifica le ordinate

$$(2h - y)^2 - 5(2h - y) - x = 0$$

da cui

$$4h^2 - 4hy + y^2 + 5y - 10h - x = 0$$
$$y^2 - y(4h - 5) + \left(4h^2 - 10h\right) - x = 0$$

allora l'equazione $y^2 - 5y - x = 0$ coinciderà con la retta simmetrica se

$$\begin{cases} 4h - 5 = 5 \\ 4h^2 - 10h = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \frac{5}{2} \\ 25 - 25 = 0 \end{cases}$$

La retta parallela all'asse x, avrà allora equazione

$$y = \frac{5}{2}$$

Esercizio 129. Sia r' la retta simmetrica di $r : y = -2x + 1$ rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Determinare sulla retta r' un punto P tale che $\overline{PQ} = 2\sqrt{5}$, essendo Q il punto di intersezione di tra r e r'.

Soluzione. Troviamo innanzitutto la retta simmetrica r' rispetto alla bisettrice di equazione $y = x$. In questo caso si scambia l'ascissa con l'ordinata e viceversa.

$$x = -2y + 1 \quad r': \ y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}$$

Troviamo il punto Q, intersezione delle due rette

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -2x + 1 \\ -2x + 1 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \qquad Q \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Il punto P, appartenendo alla retta r' avrà coordinate $P(x; -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})$. Imponiamo ora che la distanza tra i punti P e Q abbia il valore indicato.

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{36} = 20$$

$$\frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{5}{36} = 20$$

dividendo tutto per 5 si ha

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{36} = 4$$

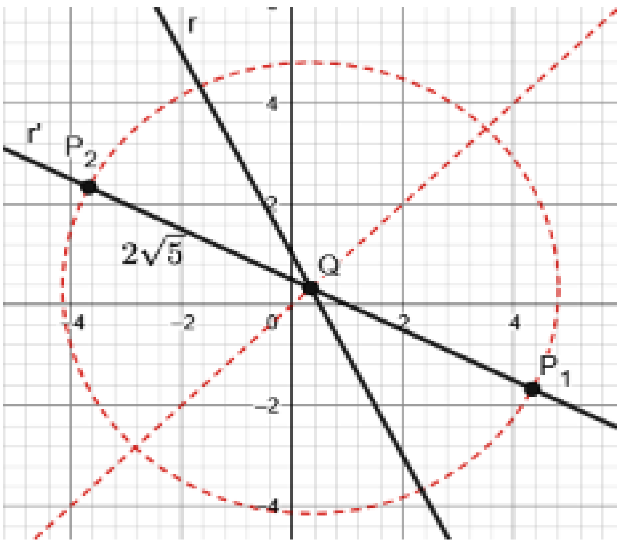
$$9x^2 - 6x - 143 = 0$$

applicando la formula risolutiva si ottengono le due soluzioni

$$x_1 = -\tfrac{11}{3} \quad x_2 = \tfrac{13}{3}$$

si hanno pertanto due punti che soddisfano la condizione e saranno simmetrici rispetto al punto Q.

$$P_1\left(-\tfrac{11}{3}; \tfrac{7}{3}\right) \quad P_2\left(\tfrac{13}{3}; -\tfrac{5}{3}\right)$$



Esercizio 130. Scrivere le equazioni delle due rette, passanti per $P(0; 2)$ e simmetriche rispetto alla retta di equazione $y = 2$, che formano con la retta di equazione $x = 4$ un triangolo di area 8.

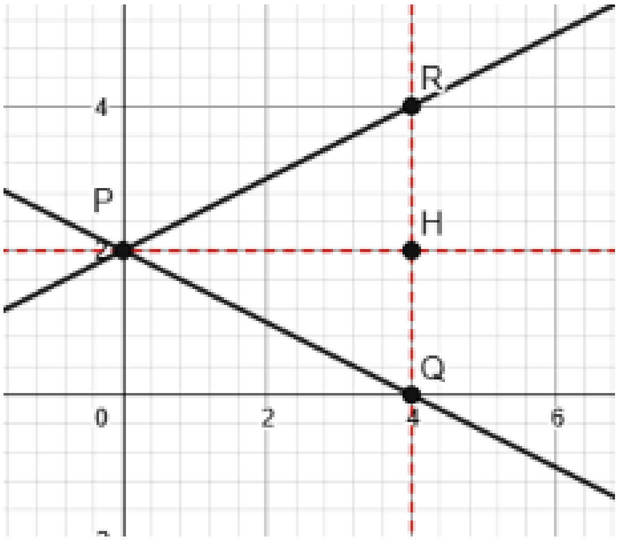
Soluzione. Il punto P appartiene all'asse y e può essere visto come il centro del fascio proprio $mx - y + 2$. Le due rette devono soddisfare inoltre alle condizioni: essere simmetriche rispetto alla retta $y = 2$ e formare con la $x = 4$ un triangolo di area 8.

Troviamo le rette simmetriche in funzione di m. La retta $y = 2$ è parallela all'asse x e la simmetria mantiene quindi le ascisse; le rette avranno quindi equazione

$$mx - (2 \cdot 2 - y) + 2 = 0 \quad mx + y - 2 = 0$$

Intersechiamo ora queste rette con la $x = 4$, sempre in funzione di m.

$$\begin{cases} y = -mx + 2 \\ x = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -4m + 2 \\ x = 4 \end{cases}$$



[La figura rappresenta già la condizione richiesta.]

Il punto di intersezione tra le rette $y = 2$ e $x = 4$ sarà $H(4; 2)$. Il triangolo deve essere isoscele in quanto le due rette del fascio sono entrambe simmetriche rispetto alla retta $y = 2$. Pertanto il punto H sarà il piede della altezza del triangolo, la cui lunghezza è uguale a 4. La base del triangolo è la distanza tra i due punti di intersezione della retta $x = 4$ con le due rette simmetriche, e tale lunghezza è

$$QR = \frac{2Area}{\overline{PH}} = \frac{16}{4} = 4$$

Soluzione. Troviamo ora il lato obliquo del triangolo isoscele, applicando il th. di Pitagora al triangolo PHR

$$\overline{PR}^2 = \overline{RH}^2 + \overline{PH}^2 = \sqrt{(0-4)^2 + (2+4m-2)^2} = 2^2 + 4^2$$

$$16 + 16m^2 = 20 \quad 16m^2 = 4 \quad m = \pm\tfrac{1}{2}$$

Le rette cercate avranno quindi equazioni, sostituendovi il valore di m trovato

$$y = \pm\frac{1}{2}x + 2$$

Esercizio 131. Scrivere le equazioni della traslazione che trasforma il punto $A(1; -1)$ nel punto $B(-2; 4)$. Determinare poi il corrispondente nella traslazione del punto $P(-6; -11)$.

Soluzione. Applichiamo le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad \begin{cases} -2 = 1 + a \\ 4 = -1 + b \end{cases} \quad \begin{cases} a = -3 \\ b = 5 \end{cases}$$

il vettore traslazione sarà pertanto $\overrightarrow{v}(-3; 5)$. (Il calcolo delle componenti del vettore lungo gli assi sono ottenibili anche direttamente dai due punti).

Applicando le equazioni così trovate, ricaviamo il punto associato a P

$$\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = -6 - 3 \\ y' = -11 + 5 \end{cases} \quad P\begin{cases} x' = -9 \\ y' = -6 \end{cases}$$

Esercizio 132. Si abbia il quadrilatero ABCD di vertici $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(0; 2)$, $D(-1; 1)$. Dopo aver verificato che è un parallelogramma, determinare i vertici del suo corrispondente A'B'C'D' nella traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(2; -2)$. Verificare che il centro del parallelogramma A'B'C'D' è il corrispondente, nella traslazione, del centro di ABCD.

Soluzione. Verifichiamo che i lati del quadrilatero sono a due a due paralleli. I punti B e C appartengono entrambi all'asse y, mentre i punti A e C appartengono alla retta $x = -1$, parallela all'asse y, ne segue che BC è parallelo a CA. Il coefficiente angolare della retta per AB è $m = 1$, così come quello della retta per CD, per cui anche questi lati sono paralleli. Il quadrilatero è pertanto un parallelogramma.

Poiché la traslazione è un movimento rigido, basterebbe graficamente traslare, ad esempio, il punto di intersezione delle due diagonali. Applichiamo ora la traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(2;-2)$ ai diversi punti.

$$A' \begin{cases} x_{A'} = -1+2 = 1 \\ y_{A'} = 0-2 = -2 \end{cases} \quad B' \begin{cases} x_{B'} = 0+2 = 2 \\ y_{B'} = 1-2 = -1 \end{cases} \quad C' \begin{cases} x_{C'} = 0+2 = 2 \\ y_{C'} = 2-2 = 0 \end{cases} \quad D' \begin{cases} x_{D'} = -1+2 = 1 \\ y_{D'} = 1-2 = -1 \end{cases}$$

Troviamo ora l'intersezione delle due diagonali di entrambi i parallelogrammi.

Per ABCD: la retta DB ha equazione $y=1$; la retta AC ha coefficiente angolare $m=2$ e $q=2$, l'equazione è $y=2x+2$. Troviamo il punto di intersezione E

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = 2x+2 \end{cases} \quad E \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 1 \end{cases}$$

Applichiamo la traslazione a questo punto e otterremo $E'(-\frac{1}{2}+2;1-2)$, cioè $E'\left(\frac{3}{2};-1\right)$. Troviamo ora il punto E' mediante l'intersezione delle diagonali di A'B'C'D'

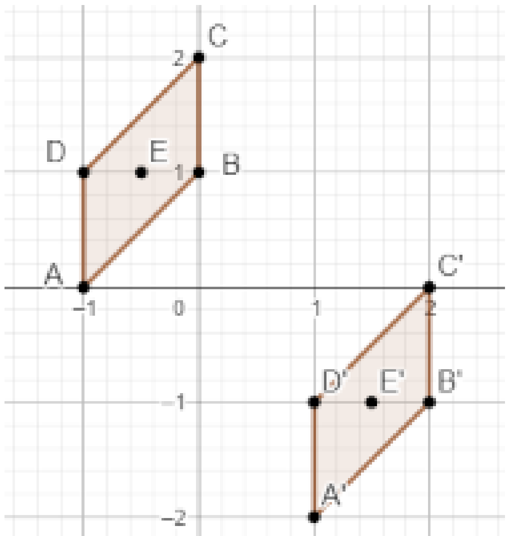
la retta D'B' ha equazione $y=-1$; la retta A'C' ha coefficiente angolare $m=2$, e passa per C'

$$0 = 2\times 2+q \quad q=-4$$

l'equazione è $y=2x-4$. Troviamo l'intersezione

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = 2x-4 \end{cases} \quad E' \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -1 \end{cases}$$

I due punti, trovati con i due metodi coincidono.



Esercizio 133. Determinare l'equazione corrispondente della $r: x-2y+3=0$ nella traslazione di vettore $\overrightarrow{v}(2;3)$.

Soluzione. Dalle coordinate del vettore è possibile ottenere le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y+3 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'-3 \end{cases}$$

sostituendo, la retta diviene

$$r': x-2-2(y-3)+3=0$$
$$x-2y+7=0$$

Esercizio 134. Determinare l'equazione della curva corrispondente alla $\gamma: x^2-xy+y^2-1=0$ nella traslazione $\overrightarrow{v}(-1;1)$.

Soluzione. Osservando il vettore traslazione otteniamo le equazioni della traslazione

$$\begin{cases} x' = x-1 \\ y' = y+1 \end{cases} \quad o \quad \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'-1 \end{cases}$$

per cui

$$(x+1)^2-(x+1)(y-1)+(y-1)^2-1=0$$

svolgendo

$$x^2+2x+1-xy+x-y+1+y^2-2y+1-1=0$$
$$x^2-xy+y^2+3x-3y+2=0$$

Esercizio 135. Determinare le equazioni della traslazione che trasforma la curva $\gamma : 2x^2-2x-y=0$ nella $\gamma' : 2x^2-6x-y+6=0$

Soluzione. La traslazione è caratterizzata dal vettore $\overrightarrow{v}(a;b)$, per cui applicando alla γ questa generica traslazione, si ha

$$2(x-a)^2-2(x-a)-(y-b)=0$$

svolgendo

$$2x^2-4ax+2a^2-2x+2a-y+b=0$$

e raccogliendo

$$2x^2-x(4a+2)-y+\left(2a^2+2a-b\right)=0$$

Se questa equazione deve essere identica alla γ', allora

$$\begin{cases} 4a+2=6 \\ 2a^2+2a+b=6 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

il vettore traslazione è pertanto $\overrightarrow{v}(1;2)$ e le equazioni sono

$$\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y+2 \end{cases}$$

Esercizio 136. Scrivere le equazioni delle rette r e s parallele alla retta $y=\frac{1}{2}x$ e distanti $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ dall'origine (indicare con r la retta avente ordinata all'origine negativa). Una traslazione rispetto alla quale la bisettrice del secondo e quarto quadrante è una retta unita trasforma la retta r nella s; scrivere le equazioni di questa traslazione.

Soluzione. Se le rette r e s sono parallela alla retta data, allora hanno lo stesso coefficiente angolare, $m=\frac{1}{2}$. La loro equazione sarà $y=\frac{1}{2}x+q$ oppure $x-2y+2q=0$. Imponiamo che la distanza dall'origine sia quella assegnata.

$$\frac{6\sqrt{5}}{5}=\frac{|1\cdot 0-2\cdot 0+2q|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\pm\frac{2q}{\sqrt{5}}$$

Si ricava $q=\pm 3$. Le rette saranno

$$r: y=\tfrac{1}{2}x-3 \quad s: y=\tfrac{1}{2}x+3$$

Una retta unita è la retta che si trasforma in se stessa. La bisettrice del 2° e 4° quadrante ha equazione $x+y=0$. La trasformazione che la trasforma in se stessa è

$$(x-a)+(y-b)=0$$
$$x+y-a-b=0$$

cioè $-a-b=0$, $a=-b$; applichiamo questa trasformazione alla retta r

$$\begin{cases} x=x'+b \\ y=y'-b \end{cases}$$

per cui, essendo la retta $r: x-2y-6=0$ e la retta $s: x-2y+6=0$

$$(x+b)-2(y-b)-6=0$$
$$x-2y+3b-6=0$$

per avere la retta s come trasformata, è necessario che

$$3b-6=6$$

da cui $b=4$. La trasformazione avrà equazioni

$$\begin{cases} x'=x-4 \\ y'=y+4 \end{cases}$$

Esercizio 137. Trovare le equazioni della dilatazione con centro nell'origine che manda $A(-4;2)$ in $A'(-2;6)$.

Soluzione. le equazioni di questa omotetia centrata nell'origine sono

$$\begin{cases} x' = hx \\ y' = ky \end{cases}$$

sostituendo i valori delle coordinate dei due punti corrispondenti

$$\begin{cases} -2 = -4h \\ 6 = 2k \end{cases} \qquad \begin{cases} h = \frac{1}{2} \\ k = 3 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x \\ y' = 3y \end{cases}$$

Esercizio 138. Determinare l'equazione dell'omotetia avente rapporto uguale a 3 e centro in $C(-2, 1)$.

Soluzione. In questo caso il centro dell'omotetia è traslato rispetto all'origine ma il rapporto di omotetia è uguale nelle due direzioni, per cui le equazioni sono

$$\begin{cases} x' = 3x + a \\ y' = 3y + b \end{cases}$$

Affinché il centro sia il punto $C(-2; 1)$, l'omotetia deve trasformare il punto C in se stesso, quindi

$$\begin{cases} -2 = 3 \cdot (-2) + a \\ 1 = 3 \cdot 1 + b \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 4 \\ b = -2 \end{cases}$$

le equazioni diventano

$$\begin{cases} x' = 3x + 4 \\ y' = 3y - 2 \end{cases}$$

Esercizio 139. È dato il segmento AB, di estremi $A(-2; 1)$ e $B(4; -1)$. Determinare il corrispondente A'B' nella dilatazione di equazioni $x' = \frac{1}{2}x$, $y' = -2y$ e disegnare entrambi i segmenti. Verificare poi che il punto medio di A'B' è il corrispondente nella dilatazione del punto medio di AB.

Soluzione. Applichiamo le equazioni della dilatazione per ricavare A'B'

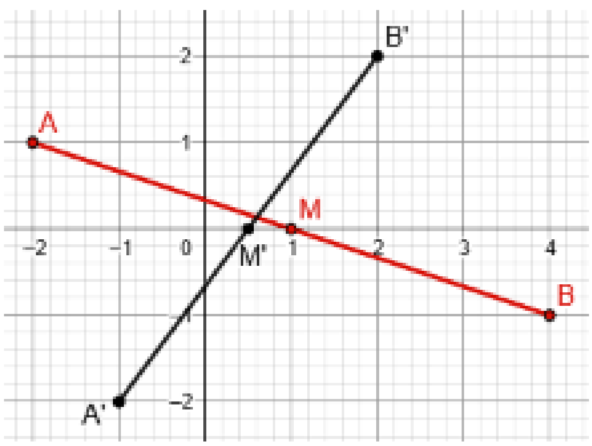
$$\begin{cases} x_{A'} = \frac{1}{2}x \\ y_{A'} = -2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{A'} = \frac{1}{2}(-2) = -1 \\ y_{A'} = -2(1) = -2 \end{cases} \qquad A'(-1; -2)$$

$$\begin{cases} x_{B'} = \frac{1}{2}(4) = 2 \\ y_{B'} = -2(-1) = 2 \end{cases} \qquad B'(2; 2)$$

Troviamo il punto medio dei due segmenti

$$M_x(AB) = \frac{-2+4}{2} = 1 \quad M_y(AB) = \frac{1-1}{2} = 0 \quad M(1; 0)$$

$$M'_x(A'B') = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \quad M'_y(A'B') = \frac{-2+2}{2} = 0 \quad M'\left(\frac{1}{2}; 0\right)$$



Applichiamo le equazioni della omotetia per verificare se M' è il corrispondente di M rispetto a tale trasformazione.

$$\begin{cases} x_{M'} = \frac{1}{2}x \\ y_{M'} = -2y \end{cases} \quad \begin{cases} x_{M'} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2} \\ y_{M'} = -2(0) = 0 \end{cases}$$

che sono proprio le coordinate di M'.

Esercizio 140. Sia dato il triangolo di vertici $A(0;1)$, $B(2;2)$, $C(1;0)$. Determinare il corrispondente A'B'C' del triangolo ABC nella dilatazione di equazioni $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = 3y \end{cases}$. Rappresentare poi i due triangoli e calcolare i loro perimetri e le loro aree.

Soluzione. Troviamo prima il perimetro e l'area del triangolo ABC.

$$\overline{AB} = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(2-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

il triangolo è isoscele e il suo perimetro è

$$2p_{ABC} = \sqrt{2} + 2\sqrt{5}$$

Per trovare l'area calcoliamo la distanza del vertice B dal punto medio, M, della base AC.

$$M = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

allora

$$\overline{BM} = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Per cui

$$A_{ABC} = \sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Troviamo ora le coordinate dei vertici del triangolo corrispondente A'B'C'

$$A'(-2 \cdot 0; 3 \cdot 1) \rightarrow A'(0;3)$$

$$B'(-2 \cdot 2; 3 \cdot 2) \rightarrow B'(-4;6)$$

$$C'(-2 \cdot 1; 3 \cdot 0) \rightarrow C'(-2;0)$$

Il triangolo A'B'C' non sarà più isoscele in quanto la dilatazione non avviene allo stesso modo lungo le due coordinate.

Calcoliamo il suo perimetro

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(0+4)^2 + (3-6)^2} = 5$$

$$\overline{A'C'} = \sqrt{(0+2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$\overline{B'C'} = \sqrt{(-4+2)^2 + (6-0)^2} = 2\sqrt{10}$$

$$2p_{A'B'C'} = 2\sqrt{10} + \sqrt{13} + 5$$

Per calcolare l'area troviamo l'altezza relativa al lato B'C'. Troviamo, pertanto, l'equazione della retta B'C'. Essa ha $m = -3$ e passa per C', per cui

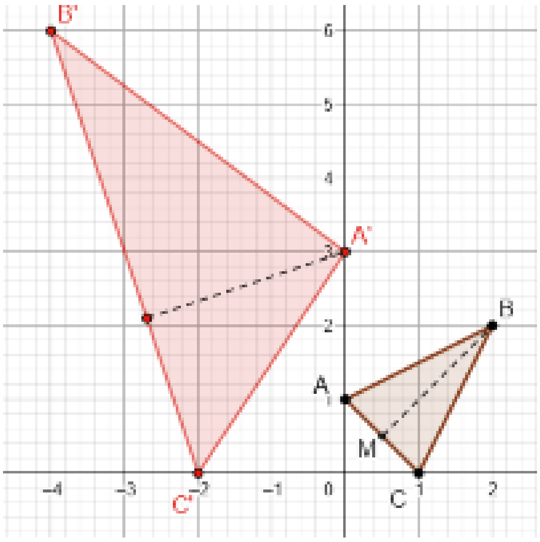
$$0 = -3 \cdot (-2) + q \quad q = -6 \quad 3x + y + 6 = 0$$

La distanza di A' da questa retta è l'altezza cercata

$$h = \frac{|3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$$

L'area sarà allora

$$A_{A'B'C'} = \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{10}} \cdot \frac{9}{\cancel{\sqrt{10}}}}{\cancel{2}} = 9$$



Esercizio 141. Determinare l'equazione della curva corrispondente di $\gamma : y = x^2 - 2x$ nella dilatazione le cui equazioni sono

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Soluzione. Riscriviamo le equazioni della dilatazione rispetto alle variabili x, y e sostituiamo

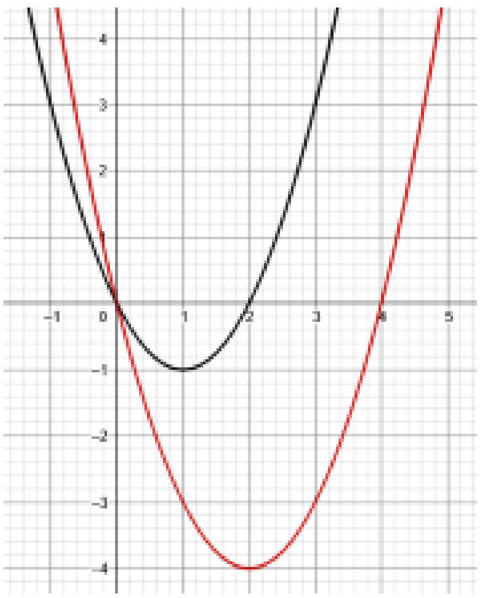
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' \\ y = \frac{1}{4}y' \end{cases}$$

$$\gamma' : \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x^2 - x$$

cioè

$$y = x^2 - 4x$$

La figura (in nero: parabola assegnata, in rosso la corrispondente) mostra che il punto $O(0;0)$ è un punto unito, cioè è il corrispondente di se stesso. Lo si può osservare anche algebricamente perché la coppia $(0;0)$ è soluzione di entrambe le equazioni della dilatazione.



Esercizio 142. Determinare le equazioni delle rette parallele alla retta $r : 2x - 3y - 1 = 0$ e distanti $\sqrt{13}$ da essa; delle due rette trovate indicare con s la retta che interseca l'asse y in un punto di ordinata positiva e con t l'altra. Determinare poi l'equazione dell'omotetia avente per centro l'origine che trasforma r in s e l'equazione dell'omotetia avente centro nell'origine che trasforma s in t.

Soluzione. Consideriamo un punto generico delle due rette parallele, esso avrà coordinate $P(x;y)$. Calcoliamo la sua distanza dalla retta r che sappiamo essere $\sqrt{13}$.

$$\sqrt{13}=\frac{|2x-3y-1|}{\sqrt{13}}$$

cioè

$$13=|2x-3y-1| \quad 2x-3y-1=\pm 13 \quad \begin{array}{l} \nearrow \; t: 2x-3y-14=0 \\ \searrow \; s: 2x-3y+12=0 \end{array}$$

L'omotetia con centro nell'origine trasforma r in s

$$2\left(\frac{x}{k}\right)-3\left(\frac{y}{k}\right)-1=0 \quad con \quad \begin{cases} x=\frac{x}{k} \\ y=\frac{y}{k} \end{cases}$$

cioè

$$2x-3y-k=0$$

da cui

$$k=-12$$

e le equazioni sono

$$\begin{cases} x'=-12x \\ y'=-12y \end{cases}$$

Analogamente, l'omotetia con centro nell'origine trasforma s in t

$$2\left(\frac{x}{k}\right)-3\left(\frac{y}{k}\right)+12=0 \quad con \quad \begin{cases} x=\frac{x}{k} \\ y=\frac{y}{k} \end{cases}$$

cioè

$$2x-3y+12k=0$$

da cui $12k=-14$

$$k=-\frac{7}{6}$$

e le equazioni sono

$$\begin{cases} x'=-\frac{7}{6}x \\ y'=-\frac{7}{6}y \end{cases}$$

Esercizio 143. Determinare le equazioni delle due rette del fascio $(k+1)x+y-1+2k=0$, simmetriche rispetto alla generatrice parallela all'asse y, che formano con l'asse x un triangolo di area 6.

Soluzione. Troviamo la generatrice del fascio di rette, svolgendo l'equazione e raccogliendo k

$$kx+x+y-1+2k=0$$
$$x+y-1+k(x+2)=0$$

la generatrice parallela all'asse y, ha allora equazione $x+2=0$ o $x=-2$. Troviamo ora le corrispondenti simmetriche, sempre in funzione di k. Ricordiamo che le equazioni generali sono

$$\begin{cases} x'=2x_0-x \\ y'=y \end{cases}$$

per cui

$$(k+1)(-4-x)+y-1+2k=0$$
$$(k+1)x-y+5+2k=0$$

Calcoliamo ora l'intersezione di quest'ultima con l'asse x, di equazione $y=0$, avremo, con $k\neq-1$

$$P_1\left(-\frac{5+2k}{k+1};0\right)$$

analogamente per la retta data del fascio

$$P_2\left(\frac{1-2k}{k+1};0\right)$$

La distanza $\overline{P_1P_2}$ è la base del triangolo che sarà isoscele

$$\overline{P_1P_2}=\left|\frac{1-2k}{k+1}+\frac{5+2k}{k+1}\right|=\left|\frac{6}{k+1}\right|$$

Se l'area è uguale a 6, allora l'altezza è

$$h=\frac{12}{\left|\frac{6}{k+1}\right|}$$

Tale altezza è la distanza del punto medio del segmento P_1P_2 dal vertice opposto, cioè dal punto in cui le due rette simmetriche rispetto a $x = -2$ si intersecano. Poiché sappiamo, per la simmetria, che tale punto avrà ascissa $x = -2$, possiamo scrivere il sistema

$$\begin{cases} (k+1)\,x + y - 1 + 2k = 0 \\ x = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - 2k + 2k + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$$

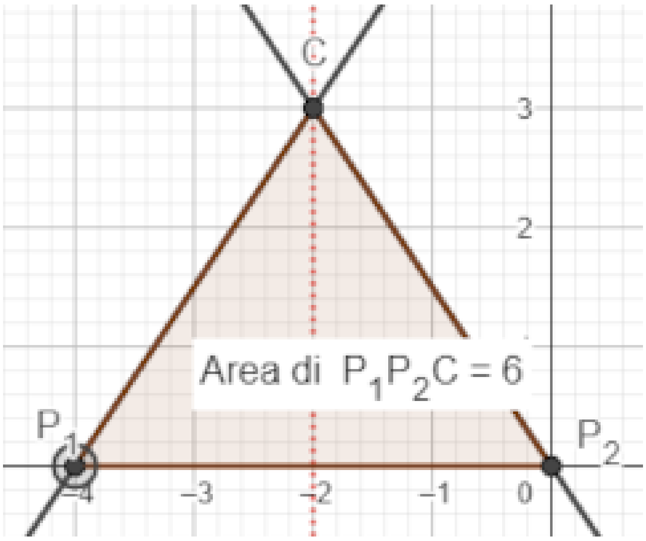
Questo punto è il centro del fascio. Pertanto l'altezza cercata è proprio l'ordinata di questo punto. Eguagliando le due espressioni dell'altezza

$$\frac{12}{\left|\frac{6}{k+1}\right|} = 3 \quad 4 = \left|\frac{6}{k+1}\right| \quad 16 = \frac{36}{(k+1)^2}$$

da cui

$$(k+1)^2 = \frac{9}{4} \quad k + 1 = \pm\frac{3}{2} \quad \begin{array}{l} \nearrow \; k = -\frac{5}{2} \\ \searrow \; k = \frac{1}{2} \end{array}$$

le due rette saranno allora per $k = \frac{1}{2}$, $3x + 2y = 0$; per $k = -\frac{5}{2}$, $3x - 2y + 12 = 0$



La figura rappresenta il risultato finale.